Columbus问题的解答

朱 如 曾

(中国科学院力学研究所,北京)

对于充液腔体平衡转动的稳定性问题已有大量研究[1-5],然而由 Kelvin 所提出的"Columbus 蛋"的稳定性问题[6,7]则至今尚未从流体动力学角度获得具体的解答.

"Columbus 蛋"没有固定点,但有一个单面约束面,因而文献 [6,8] 对 Columbus 蛋应用全充液腔体绕定点转动的稳定性判据是错误的;如果从 Румянцев 的一般性定理[1]出发,则不能得到大范围稳定性质;其次,对于不稳定性,按文献 [1] 的定义,也只能得到关于本文 (1) 式中的 ρ_θ、ρ_{ω_1}、ρ_{ω_2}、ρ_ψ 及 T_r (液体关于一个特定标架的动能) 中至少一个不稳定的笼统结论,而得不到究竟关于哪几个量不稳定的细致结论. 为了就尽可能多样的 Movchan 距离[9],对"Columbus 蛋"的平衡转动给出局部和大范围稳定性质,并证明竖转的"Columbus 蛋"将因不稳定而趋向于横转状态,从 Movchan 的连续系统稳定性理论出发将是方便的.

一、问题的表述

"Columbus 蛋"用在重力场中水平面 N 上方的 (可离开 N) 充满粘性均匀液体的光滑对称椭球形腔体 K 来描写,如图 1 所示. 设外壳和液体的密度分别为 ρ_1 和 ρ_2,质量为 M_1 和 M_2,总质量为 M;壳体的内外表面关于中心 o' 成透射,因而壳体和液体的惯量主轴重合;K 的长半轴为 c,两个相等的短半轴为 a,关于 o' 的主转动惯量为 C、A、A,并有 $A > C$;记 o' 点到 N 上的动垂线足为 o''. 取如下三个直角右旋标架:

(i) 固定标架 $(o, \boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_2, \boldsymbol{i}_3)$,$o$ 在 N 上,$\boldsymbol{i}_3$ 反平行于重力方向,记 $\boldsymbol{oo'} = x\boldsymbol{i}_1 + y\boldsymbol{i}_2 + z\boldsymbol{i}_3$.

(ii) 平移转动标架 $(o'', \boldsymbol{i}'_1, \boldsymbol{i}'_2, \boldsymbol{i}'_3)$,它相对于标架 (i) 有某一角速度 $\Omega\boldsymbol{i}_3$ 及 o'' 点沿水平方向的某一速度. $\boldsymbol{i}'_3 /\!/ \boldsymbol{i}_3$.

(iii) 转子固联标架 $(o', \boldsymbol{i}''_1, \boldsymbol{i}''_2, \boldsymbol{i}''_3)$,$\boldsymbol{i}''_3$ 与长轴重合. 它相对于标架 (ii) 的角速度、章动角、自转角和进动角分别为 $\boldsymbol{\omega}$、θ、ψ 和 φ.

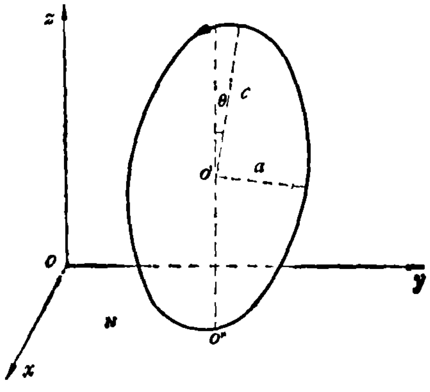

图 1

K 的状态由 $p = (x, y, z', \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \psi, \varphi, \theta, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}))$ 描写,这里 z' 为 K 的最低点与 N 之间的距离,只取正实数或零,ω_1、ω_2 和 ω_3 分别为 $\boldsymbol{\omega}$ 在标架 (ii) 上的投影,$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ 是液体相对于标架 (ii) 的速度分布.

本文 1984 年 1 月 23 日收到. 1985 年 2 月 8 日收到修改稿.

K必须以常角速度作整体刚性运动才能无耗散，故求解关于刚体运动的尤拉方程得引理1.

引理 1　K系统平衡运动的角速度方向只可能取如下三类：(i) 沿短轴而垂直于 N，$\theta=\frac{\pi}{2}$；(ii) 沿长轴而垂直于N，$\theta=0$ (或 π)；(iii) 沿长轴而平行于 N，$\theta=\pi/2$.　它们都 $z'=0$.

我们讨论角速度为 $\Omega \boldsymbol{i}_3 \neq 0$ 的两个平衡转动轨道：竖转轨道 $p^{(1)}=(0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})=0)$，横转轨道 $p^{(2)}=\left(0,0,0,0,0,0,0,0,\frac{\pi}{2},0,0,0,\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})=0\right)$. 对应的初始扰动 Movchan 距离 ρ_0[9] 分别为 $\rho_0^{(1)}=\max(|x|,|y|,|z'|,|\dot{x}|,|\dot{y}|,|\dot{z}|,|\psi|,|\varphi|,|\theta|,|\boldsymbol{\omega}|,|\boldsymbol{v}|)$ 和 $\rho_0^{(2)}=\max\left(|x|,|y|,|z'|,|\dot{x}|,|\dot{y}|,|\dot{z}|,|\psi|,|\varphi|,\left|\theta-\frac{\pi}{2}\right|,|\boldsymbol{\omega}|,|\boldsymbol{v}|\right)$. 本文讨论 $p^{(1)}$ 和 $p^{(2)}$ 关于如下 Movchan 距离的局部和大范围稳定性：$\rho_x=|x|$，$\rho_y=|y|$，$\rho_{z'}=z'$，$\rho_{\dot{x}}=|\dot{x}|$，$\rho_{\dot{y}}=|\dot{y}|$，$\rho_{\dot{z}}=|\dot{z}|$，$\rho_\psi=|\psi|$，$\rho_\varphi=|\varphi|$，$\rho_\theta^{(1)}=|\theta|$ $\left(\rho_\theta^{(2)}=\left|\theta-\frac{\pi}{2}\right|\right)$，$\rho_{\omega_1}=|\omega_1|$，$\rho_{\omega_2}=|\omega_2|$，$\rho_{\omega_3}=|\omega_3|$，$\rho_{\boldsymbol{v}}=\iiint_\tau \boldsymbol{v}^2 d\tau$，$\rho_{\boldsymbol{v}_r}=\iiint_\tau \boldsymbol{v}_r^2 d\tau$，这里 τ 是腔中液体占有的空间，$\boldsymbol{v}_r$ 是液体相对于标架 (iii) 的速度分布.

虽然本文只具体给出关于上述 14 个距离的稳定性结论，但利用如下的引理 2 和 3，可以直接写出更多的稳定性结论. 这也是本文处理方法的优点.

引理 2　系统关于 ρ_a 和 ρ_b (渐近)稳定，等价于系统关于 $\rho=\sqrt{K_a\rho_a^2+K_b\rho_b^2}$ (渐近)稳定，这里，K_a 和 K_b 是任意正常数.

引理 3　系统关于 $\rho=\sqrt{K_a\rho_a^2+K_b\rho_b^2}$ 不稳定，等价于系统关于 ρ_a 和 ρ_b 中至少一个不稳定.

二、$p^{(1)}$ 和 $p^{(2)}$ 态的稳定性结论

由于K与N间无摩擦，故得定理 1.

定理 1　$p^{(1)}$ 和 $p^{(2)}$ 关于 $\rho_{\dot{x}}$ 和 $\rho_{\dot{y}}$ 稳定而不渐近稳定；关于 ρ_x 和 ρ_y 不稳定；$\dot{x}$ 和 $\dot{y}$ 守恒于扰动初态的数值.

关于标架 (i)，K的角动量的 $\boldsymbol{i}_3$ 分量守恒，故得定理 2.

定理 2　$p^{(1)}$ 和 $p^{(2)}$ 关于 ρ_{ω_3} 和 $\rho_{\boldsymbol{v}}$ 不渐近稳定，关于 ρ_φ 不稳定.

引理 4　对K系统的任一初态 p_0，$p(t,p_0)$ 按 $\rho_{\boldsymbol{v}_r}$ 及K的外壳的一切广义坐标和广义速度而言的极限轨道是平衡转动轨道 $\mathscr{L}(p_0)$.

这一引理是以往关于充粘性液体腔渐近稳定性和不稳定性定理的基础[1].

在非惯性系的标架 (ii) 中观察，根据机械能耗散率 ϕ 的已知公式[10]

$$\phi=\frac{1}{2}\iiint_\tau \sum_{i,j=1}^{3}\mu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)^2 d\tau \geqslant 0, \tag{1}$$

即得

$$\frac{d}{dt}V=-\phi\leqslant 0,\ V=T+U. \tag{2}$$

$$T=\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{J}_1\cdot\boldsymbol{\omega}+\frac{1}{2}M_1\dot{z}^2\right)+\frac{1}{2}\rho_2\iiint_\tau \boldsymbol{v}^2 d\tau, \tag{3}$$

$$U=Mg\left[\sqrt{(c^2-a^2)(1-\sin^2\theta)+a^2}-c+z'\right]+\frac{1}{2}\Omega^2(C-A)\sin^2\theta+Q, \tag{4}$$

式中，$\boldsymbol{J}_1$ 是壳体关于 o' 点的转动惯量张量；μ 是液体的动力粘性系数；x_i 和 v_i 分别是 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 在标架 (ii) 上的投影；T 和 U 分别为 K 相对于标架 (ii) 的动能和势能，后者由重力及惯性离心力所引起，Q 为任意常数．将 U 在 $\theta=0$ 及 $\pi/2$ 处展开，并调整常数，使 $U^{(1)}(\theta=0)=U^{(2)}\left(\theta=\frac{\pi}{2}\right)=0$，得

$$U=\begin{cases}U^{(1)}=\frac{1}{2}\left[Mgc\left(\frac{a^2}{c^2}-1\right)+\Omega^2(C-A)\right]\sin^2\theta+Mgz'+O(\sin^4\theta), & (5)\\ U^{(2)}=\frac{1}{2}\left[Mga\left(\frac{c^2}{a^2}-1\right)+\Omega^2(A-C)\right]\sin^2\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right) & \\ \qquad\qquad +Mgz'+O\left(\sin^4\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)\right), & (6)\end{cases}$$

相应地记 $V^{(i)}=T+U^{(i)}$，$i=1, 2$.

定理 3 横转态 $p^{(2)}$ 关于 ρ_{ω_3} 和 ρ_v 稳定，关于 $\rho_\theta^{(2)}$、ρ_{ω_1}、ρ_{ω_2}、$\rho_{z'}$、$\rho_{\dot{z}}$ 和 ρ_{v_r} 渐近稳定．

证 (6) 式表明存在 $p^{(2)}$ 的邻域 $N_l(\rho_\theta^{(2)})=\{p\,|\,0<\rho_\theta^{(2)}<l\}$，其中 $U^{(2)}$ 关于 $\rho_\theta^{(2)}$ 和 $\rho_{z'}$ 正定，(3) 式表明 T 关于 ρ_{ω_1}、ρ_{ω_2}、ρ_{ω_3}、ρ_v 及 $\rho_{\dot{z}}$ 正定，故 $V^{(2)}$ 在 $N_l(\rho_\theta^{(2)})$ 中关于 $\rho_\theta^{(2)}$、ρ_{ω_1}、ρ_{ω_2}、ρ_{ω_3}、ρ_v、$\rho_{z'}$ 及 $\rho_{\dot{z}}$ 正定；$V^{(2)}$ 关于 $\rho_0^{(2)}$ 显然连续；(2) 式表明 $V^{(2)}$ 非增．因此，根据 Movchan 的定理(文献 [8] 定理 5.1)* 得 $p^{(2)}$ 关于 $\rho_\theta^{(2)}$、ρ_{ω_1}、ρ_{ω_2}、ρ_{ω_3}、ρ_v、$\rho_{z'}$ 及 $\rho_{\dot{z}}$ 稳定．由 $\boldsymbol{v}_r=\boldsymbol{v}-\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}-\dot{z}\boldsymbol{i}_3'$ 得 $\boldsymbol{v}_r^2\leqslant 3(\boldsymbol{v}^2+4C^2\boldsymbol{\omega}^2+\dot{z}^2)$，即 $\rho_{v_r}\leqslant 3(\rho_v+4C\tau\boldsymbol{\omega}^2+\dot{z}^2\tau)$，故 $p^{(2)}$ 关于 ρ_{v_r} 也稳定．由引理 4 知，极限态必为引理 1 中三类．其中第 (ii) 类，$\theta=0$ 和 π，$\rho_\theta^{(2)}=\frac{\pi}{2}$；第 (iii) 类，$\omega_3=-\Omega$，$\rho_{\omega_3}=\Omega$．当 $\rho_0^{(2)}$ 足够小时，这两类分别与 $p^{(2)}$ 关于 $\rho_\theta^{(2)}$ 及 ρ_{ω_3} 稳定相矛盾，故只可能趋向第 (i) 类中某平衡轨道，所以 $\omega_1=\omega_2=0$，$\theta=\frac{\pi}{2}$，$\boldsymbol{v}_r\equiv 0$，$z'=\dot{z}=0$．此即 $p^{(2)}$ 关于 $\rho_\theta^{(2)}$、ρ_{ω_1}、ρ_{ω_2}、$\rho_{z'}$、$\rho_{\dot{z}}$ 和 ρ_{v_r} 渐近稳定．

定理 4 $p^{(1)}$ 关于 $\rho_\theta^{(1)}$、ρ_{ω_3}、ρ_v 不稳定．若初始扰动态 p_0 有 $V^{(1)}(p_0)<0$，或虽然 $V^{(1)}(p_0)=0$，但在腔中并不处处成立 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$，则 $p(t, p_0)$ 将按 $\rho_\theta^{(2)}$、$\rho_{z'}$、$\rho_{\dot{z}}$、ρ_{ω_1}、ρ_{ω_2}、$|\omega_3-\omega_3'|$ 和 ρ_{v_r} 趋向某横转轨道 $p_{\omega_3'}^{(2)}\left(\theta=\frac{\pi}{2}, \boldsymbol{\omega}=\omega_3'\boldsymbol{i}_3\right)$．并且如果令 p_0 按 $\rho_0^{(1)}$ 趋向 $p^{(1)}$，则

$$\lim_{\rho_0^{(1)}\to 0}\omega_3=\left(\frac{C}{A}-1\right)\Omega. \tag{7}$$

证 (5) 式表明，在 $p^{(1)}$ 的任意小 $\rho_0^{(1)}$ 邻域内，总可找到 p_0，使 $V^{(1)}(p_0)<0$．由于 $V^{(1)}$ 非增且显然有界，故存在实数 V^*，使 $\lim_{t\to\infty}V^{(1)}(p(t, p_0))=V^*<V^{(1)}(p_0)<0$．按引理 4，$p(t, p_0)$ 趋向于某 $\phi\equiv 0$ 的平衡轨道 $\mathscr{L}(p_0,)$ 故

* Movchan 的定理要求 V 关于某 ρ 正定，此处 V 只在 $N_l(\rho_\theta^{(2)})$ 中关于某 ρ 正定，但稍加推理便可知仍可应用此定理的结论．

$$V^{(1)}(\mathscr{L}) = V^* < V^{(1)}(p_0) < 0. \tag{8}$$

在引理 1 所给定的可能极限轨道中，对 $\theta = 0, \pi$，有 $U^{(1)} = 0$，故 $V^{(1)} \geqslant 0$，这违反 (8) 式，应舍去，因此对于 $\mathscr{L}$，只可能 $\theta = \pi/2$. 在标架 (i) 中看来，引理 1 中第 (iii) 类的角动量的 $\boldsymbol{i}_3$ 分量 L_3 为零，当初始扰动态的 $\rho_0^{(1)}$ 很小时，应有 $L_3 \approx \Omega C$，根据 L_3 守恒条件，也应舍去第 (iii) 类. 因此 $\mathscr{L}$ 必属于引理 1 中第 (i) 类，即 $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\omega_1 = \omega_2 = z' = \dot{z} = 0$, $\boldsymbol{v}_r \equiv 0$. 此即 $p(t, p_0)$ 按 $\rho_\theta^{(2)}$, $\rho_{z'}$, $\rho_{\dot{z}}$, ρ_{ω_1}, ρ_{ω_2}, $|\omega_3 - \omega_3'|$, ρ_{v_r} 趋向某 $p_{\omega_3}^{(2)}$ 轨道.

在标架 (i) 中观察，当 $\rho_0^{(1)} \to 0$ 时，扰动初态 p_0 的 L_3 趋向于 ΩC，因此 $\mathscr{L}(p_0)$ 轨道的角速度趋向于 $\frac{C}{A}\Omega$. 回到标架 (ii) 中，$\mathscr{L}(p_0)$ 轨道角速度 ω_3 趋向于 $\left(\frac{C}{A} - 1\right)\Omega$. 此即 (7) 式得证. 这也同时表明 $p^{(1)}$ 态关于 $\rho_\theta^{(1)}$ 和 ρ_{ω_3} 不稳定，从而关于 $\rho_{\boldsymbol{v}}$ 也不稳定.

若 $V^{(1)}(p_0) = 0$，但 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ 不处处等于 $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$，则 $\phi(0) > 0$，$\frac{d}{dt} V^{(1)}\Big|_{t=0} < 0$. 显然存在某一有限时间 t_0，使 $V^{(1)}(t_0, p_0) < 0$. 选 $t = t_0$ 为时间的起点，其余证明与上面完全一样. 证毕.

致谢：感谢谈镐生和王照林教授的指导.

参 考 文 献

[1] Моисеев Н. Н., Румянцев В. В., Динамика тела с полостями, *Содержащими Жидкость*, М., Изд-во, Иаука, 1965.
[2] Ишлинский А. Ю., Темченко М. Е., *ПМТФ*, **3** (1960), 65—75.
[3] Соболев, С. Л., *ПМТФ*, **3**(1960), 20—55.
[4] 徐硕昌，中国科学，1979, 9: 857—865.
[5] 朱如曾，中国科学，A辑，1984, 4: 353.
[6] 徐硕昌，力学学报，1981 年特刊，31—36.
[7] Kelvin, L., *Mathamalical and Physical Papers*, 3, 4, Cambridge, 1910.
[8] 徐硕昌，中国科学，1982, 3: 254—264.
[9] Movchan, A. A., *Appl. Math. Mech.*, N. Y., **23** (1959), 186.
[10] Л. Д. 朗道等，连续介质力学(上册)，第 2 章，高等教育出版社，1985.