

用自然三角形单元计算应力强度因子

吴永礼

(中国科学院力学研究所)

用有限元法计算应力强度因子的各种奇异元中,由八节点或十二节点的四边形等参数单元所派生的奇异元最为简单^[1-5],因为这种单元就是原有的等参数单元,无须程序变动,只要适当地改变裂纹顶点单元的边中点的坐标,就可使应变具有 $r^{-1/2}$ 的奇异性.这种单元是协调单元,满足收敛准则,当有人提出^[4,6]过渡单元概念以后,使计算结果更为精确.因此,这种单元是工程中广泛应用的一种计算应力强度因子的奇异元.

与四边形等参数单元相应的一族单元是自然三角形单元^[7].下面证明六节点的二次三角形单元和十节点的三次三角形单元,尽管它们的形状函数与上述四边形二次和三次单元通过一边收缩成一点而成的三角形单元的形状函数不同,但通过边上点取与上述等参数单元相同的位置,也可得到角点的应变具有 $r^{-1/2}$ 的奇异性.不同的是,对于六节点二次自然三角形单元,角点对边上的点可以不受限制;对于十节点的三次自然三角形单元,则多了一个内节点.此外,这二种三角形单元也有与文[4]中所导得的过渡元边中点的计算公式.通过算例表明这种单元也能给出较精确的应力强度因子数值.

1. 奇异性的形成 1) 六节点二次自然三角形

根据文[7],对于图1所示的六节点三角形,形状函数为

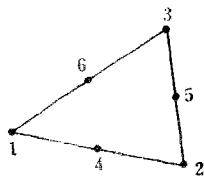


图1

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= L_1(2L_1 - 1) \\ N_2 &= L_2(2L_2 - 1) \\ N_3 &= L_3(2L_3 - 1) \\ N_4 &= 4L_1L_2 \\ N_5 &= 4L_2L_3 \\ N_6 &= 4L_3L_1 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

其中, L_1, L_2, L_3 为三角形的面积坐标, 现引入 ξ, η 坐标:

$$\left. \begin{aligned} L_1 &= \frac{1}{2}(1 - \xi), \quad L_2 = \frac{1}{4}(1 - \eta)(1 + \xi) \\ L_3 &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) \quad -1 \leq \xi, \eta \leq 1 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

那么形状函数(1)可以写为

本文于1981年12月26日收到.

$$\left. \begin{aligned}
 N_1 &= -\frac{1}{2}\xi(1-\xi) \\
 N_2 &= \frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)(\xi-\eta-\xi\eta+1) \\
 N_3 &= \frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)(\xi+\eta+\xi\eta-1) \\
 N_4 &= \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta) \\
 N_5 &= \frac{1}{4}(1+\xi)^2(1-\eta^2) \\
 N_6 &= \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta)
 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

若将八节点的四边形等参数单元中的一边上的三点合并成一点而变成三角形时, 其中的三个节点 1, 4, 6 的形状函数 N_1, N_4, N_6 与公式 (3) 相同, 而另外三个节点 2, 3, 5 的形状函数则与 (3) 式中的不同. 令节点 4, 6 取 $1/4$ 的位置:

$$\left. \begin{aligned}
 x_4 &= \frac{3}{4}x_1 + \frac{1}{4}x_2 & y_4 &= \frac{3}{4}y_1 + \frac{1}{4}y_2 \\
 x_6 &= \frac{3}{4}x_1 + \frac{1}{4}x_3 & y_6 &= \frac{3}{4}y_1 + \frac{1}{4}y_3
 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

则坐标变换公式为:

$$\left. \begin{aligned}
 x &= \sum_{i=1}^6 N_i x_i = x_1 - x_1 \left(\frac{1+\xi}{2}\right)^2 + \frac{\eta(\eta-1)}{2} \left(\frac{1+\xi}{2}\right)^2 x_2 \\
 &\quad + \frac{\eta(\eta+1)}{2} \left(\frac{1+\xi}{2}\right)^2 x_3 + (1-\eta^2) \left(\frac{1+\xi}{2}\right)^2 x_5 \\
 y &= \sum_{i=1}^6 N_i y_i = y_1 - y_1 \left(\frac{1+\xi}{2}\right)^2 + \frac{\eta(\eta-1)}{2} \left(\frac{1+\xi}{2}\right)^2 y_2 \\
 &\quad + \frac{\eta(\eta+1)}{2} \left(\frac{1+\xi}{2}\right)^2 y_3 + (1-\eta^2) \left(\frac{1+\xi}{2}\right)^2 y_5
 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

对于以节点 1 为顶点的半径 r :

$$r = \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2} \sim \left(\frac{1+\xi}{2}\right)^2 \quad (6)$$

单元的位移模式 $u = \sum_{i=1}^6 N_i u_i, v = \sum_{i=1}^6 N_i v_i$ 中具有与 $(1+\xi)$ 成正比的项, 而 r 与 $(1+\xi)^2$ 成正比, 因而, 位移 u, v 具有与 \sqrt{r} 成正比的项, 也即应变具有 $r^{-1/2}$ 的奇异性, 而且在 $\theta = \text{常数}$ (即 $y/x = \text{常数}$, 或 $\eta = \text{常数}$) 的方向上均具有这种奇异性. 这里与八节点派生的三角形奇异元不同, 对节点 5 没有提出一定的要求, 在八节点派生的三角形奇异元中, 节点 5 要在中分点上, 才能使得应变在 $\theta = \text{常数}$ 的方向上均具有奇异性. 现在我们

假设节点 5 也在中分点上, $x_5 = \frac{1}{2}(x_2 + x_3), y_5 = \frac{1}{2}(y_2 + y_3)$, 这时 (5) 式化为

$$\left. \begin{aligned} x &= x_1 - \left(\frac{1+\eta}{2} x_3 + \frac{1-\eta}{2} x_2 - x_1 \right) \left(\frac{1+\xi}{2} \right)^2 \\ y &= y_1 - \left(\frac{1+\eta}{2} y_3 + \frac{1-\eta}{2} y_2 - y_1 \right) \left(\frac{1+\xi}{2} \right)^2 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

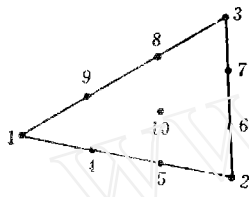
这个坐标转换公式与八节点派生的三角形的坐标转换公式是相同的。但是，二者的位移插值函数仍然是不同的。可以证明刚度矩阵是非奇异的。

对于顶点奇异元以外的过渡元，则边上点的公式与〔4〕中相同，假使图1中的节点1并不是裂纹的顶点，而边1—4—2在裂纹顶点的射线上时，则节点4的位置为

$$r_4 = \frac{(\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2})^2}{4} \quad (8)$$

其中 r_1 , r_2 , r_4 分别为节点1, 2, 4到裂纹顶点的距离。

2) 十节点三次自然三角形。对于图2所示的十节点三角形，形状函数为^[7]



$$\left. \begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{2} L_1 (3L_1 - 1) (3L_1 - 2), \dots \\ N_4 &= \frac{9}{2} L_1 L_2 (3L_1 - 1), \\ N_5 &= \frac{9}{2} L_1 L_2 (3L_1 - 2), \dots \\ N_{10} &= 27 L_1 L_2 L_3 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

仍然采用公式(2)的坐标变换公式，可将这十个形状函数写成 ξ , η 的函数：

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{16} (1-\xi) (9\xi^2 - 1) \\ N_2 &= \frac{1}{8} (1-\eta) (1+\xi) \left[\frac{3}{4} (1-\eta) (1+\xi) - 1 \right] \left[\frac{3}{4} (1-\eta) (1+\xi) - 2 \right] \\ N_3 &= \frac{1}{8} (1+\eta) (1+\xi) \left[\frac{3}{4} (1+\eta) (1+\xi) - 1 \right] \left[\frac{3}{4} (1+\eta) (1+\xi) - 2 \right] \\ N_4 &= \frac{9}{32} (1-\eta) (1-\xi^2) (1-3\xi) \\ N_5 &= \frac{9}{16} (1-\xi^2) (1-\eta) \left[\frac{3}{4} (1-\eta) (1+\xi) - 1 \right] \\ N_6 &= \frac{9}{32} (1-\eta^2) (1+\xi)^2 \left[\frac{3}{4} (1-\eta) (1+\xi) - 1 \right] \\ N_7 &= \frac{9}{32} (1-\eta^2) (1+\xi)^2 \left[\frac{3}{4} (1+\xi) (1+\eta) - 1 \right] \\ N_8 &= \frac{9}{16} (1-\xi^2) (1+\eta) \left[\frac{3}{4} (1+\xi) (1+\eta) - 1 \right] \\ N_9 &= \frac{9}{32} (1-\xi^2) (1+\eta) (1-3\xi) \\ N_{10} &= \frac{27}{32} (1-\xi) (1+\xi)^2 (1-\eta^2) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

若将这些形状函数与十二节点的四边形等参数单元通过缩并一边而成的九节点三角形的形状函数相比较，可以看出，只有1, 4, 9三个节点的形状函数相同，2, 3, 5, 6, 7, 8

六个节点的形状函数是不同的, 而内节点 10 则是自然三角形单元所特有的。

对边上点和内节点取如下的位置:

$$\begin{aligned}
 x_4 &= \frac{8}{9}x_1 + \frac{1}{9}x_2 & y_4 &= \frac{8}{9}y_1 + \frac{1}{9}y_2 \\
 x_9 &= \frac{8}{9}x_1 + \frac{1}{9}x_3 & y_9 &= \frac{8}{9}y_1 + \frac{1}{9}y_3 \\
 x_5 &= \frac{5}{9}x_1 + \frac{4}{9}x_2 & y_5 &= \frac{5}{9}y_1 + \frac{4}{9}y_2 \\
 x_8 &= \frac{5}{9}x_1 + \frac{4}{9}x_3 & y_8 &= \frac{5}{9}y_1 + \frac{4}{9}y_3 \\
 x_6 &= \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 & y_6 &= \frac{2}{3}y_2 + \frac{1}{3}y_3 \\
 x_7 &= \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 & y_7 &= \frac{1}{3}y_2 + \frac{2}{3}y_3 \\
 x_{10} &= \frac{1}{2}(x_5 + x_8) = \frac{5}{9}x_1 + \frac{2}{9}(x_2 + x_3) \\
 y_{10} &= \frac{1}{2}(y_5 + y_8) = \frac{5}{9}y_1 + \frac{2}{9}(y_2 + y_3)
 \end{aligned} \tag{11}$$

节点 4, 9 即为 $1/9$ 的位置, 5, 8 即为 $4/9$ 的位置, 节点 6, 7 取均分点的位置, 这些位置与十二节点派生的九节点三角形单元相同^[4,5]。这时的坐标变换公式, $x =$

$$\sum_{i=1}^{10} N_i x_i, \quad y = \sum_{i=1}^{10} N_i y_i \text{ 就是公式 (7), 位移模式 } u = \sum_{i=1}^{10} N_i u_i, \quad v = \sum_{i=1}^{10} N_i v_i \text{ 中有 } (1 + \xi)$$

项, 也即有与 \sqrt{r} 成正比的项, 而且沿任意 $\theta = \text{常数}$ ($\eta = \text{常数}$) 方向上均有此特性, 因此, 这种单元也满足弹性情况下裂纹顶点的应变奇异性要求。与文[4]相似, 若节点 1 不在裂纹顶点上, 而边 1—4—5—2 在裂纹顶点的射线上, 则这种单元称为过渡元, 边上点 4, 5 的坐标计算公式为:

$$r_4 = \frac{(2\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2})^2}{9}, \quad r_5 = \frac{(\sqrt{r_1} + 2\sqrt{r_2})^2}{9} \tag{12}$$

其中 r_1, r_2, r_4, r_5 分别为节点 1, 2, 4, 5 到裂纹顶点的距离。

2. 应力强度因子的确定方法 前面已经证明了在二次和三次自然三角形单元中, 通过适当的移动边上点和内节点的位置, 可以形成奇异元和过渡元, 使在裂纹顶点的应变具有 $r^{-1/2}$ 的奇异性, 因而可以用来计算应力强度因子。用这种自然三角形单元可以直接得到各节点的位移, 从位移来确定应力强度因子时, 有三种方法, 下面以 I 型为例说明确定应力强度因子 K_I 的方法。

1) 节点位移直接算法。从断裂力学可以知道, 在裂纹面上:

$$K_I = \frac{2G\sqrt{2\pi}}{(\kappa+1)} \frac{v}{\sqrt{r}} \tag{13}$$

其中 G 为剪切模量, 平面应变时, $\kappa = 3 - 4\nu$, 平面应力时 $\kappa = \frac{3 - \nu}{1 + \nu}$, ν 为泊桑比。从有限元计算得到裂纹顶点附近的位移, 根据 (13) 式可以直接计算出应力强度因子。

2) 外推法

文[1]中采用的外推法是根据(13)式,计算出裂纹面上不同 r 处的 K_I ,画出 $K_I \sim r/a$ 的曲线,经过外推到 $r=0$ 处的 K_I 即为所求的应力强度因子.从[1]中的外推曲线可以看出, $K_I \sim r/a$ 的曲线在 $r/a=0.5 \sim 1$ 之间线性较好,而公式(13)在这一部分是不适用的,所以这种解释不恰当.为了给外推法有合理的解释,我们取裂纹面顶点附近位移展开式为

$$v = \frac{(\kappa+1)K_I}{2G\sqrt{2\pi}}\sqrt{r} + Ar^{3/2}$$

可以证明第二项(即 r 项)的系数等于零.因而

$$Y = \frac{2G\sqrt{2\pi}}{(\kappa+1)} \frac{v}{\sqrt{r}} = K_I + Br \quad (14)$$

由此可见,参数 $Y = \frac{2G\sqrt{2\pi}}{(\kappa+1)} \frac{v}{\sqrt{r}}$ 是与 r 成线性关系的,直线与 Y 轴的交点(即 Y 轴的截距)为应力强度因子.虽然 Y 的形式与(13)式相同,但并不能称作应力强度因子,从文[4],[8]和本文的计算表明,由于采用了奇异元与过渡元,计算结果在 $r/a=0.1 \sim 0.5$ 之间线性就很好.

3) 单元位移直接计算法

文献[9,10]在对[2]的讨论中认为,根据等参数奇异单元的位移分布, K_I 应按下式直接计算得到:

$$K_I = \frac{2G\sqrt{2\pi}}{(\kappa+1)} \frac{(4v_1 - v_2)}{\sqrt{l}} \quad (15)$$

这里仍然取裂纹面上的位移, l 为顶点单元的长度, v_1 为 $l/4$ 处的位移, v_2 为 l 处的位移,顶点的位移假定为零.此公式的根据是令奇异单元中与 \sqrt{r} 成正比的项和展开式中 \sqrt{r} 的项相等.可以证明,本文的奇异单元也能用此公式.

3. 算例 1) 受均匀拉伸的中心裂纹平板(图3).因为对称,只需取板的 $1/4$ 就可以了.在这个例子中,全部采用六节点三角形单元,计算单元刚度矩阵时用的是三点积分^[7].计算六种不同的边长比 $L/w=1.0, 1.2, 1.4, 1.6, 1.8, 2.0$,对每种边长比计算了二种不同长度的裂纹 $a/w=0.4, 0.6$,计算结果列于表1,表中的三个计算结果分别为前面三种确定应力强度因子的方法所得的结果,其中第一种方法采用的是奇异单元顶点的位移来计算的,用最靠近裂纹顶点的节点($1/4$ 点)位移并不比单元顶点的好,这是由于靠近裂纹顶点位移变化较大,不易求得精确.同样理由,采用公式(15)来计算应力强度因子,由于也要用到最靠近裂纹顶点的位移,所以,计算结果也不如外推法好.文献[11]是对于这种问题的比较精确的解,该文没有 $L/w=1.4, 1.6$ 的结果,所以表中列出 $L/w=1.5$ 的结果以供比较.

2) 含有一个中心裂纹和四条边缘裂纹的正方形板,受有均匀拉伸载荷(图4). $L/w=1.0, c/L=0.4333, a/w=0.4$,由于对称也只需计算 $1/4$.计算所得的应力强度因子无量纲值为: A 点 $\bar{K}_I=1.995, \bar{K}_{II}=0.330, B$ 点 $\bar{K}_I=1.803$.由于对称 B 点的 $K_{II}=0$,这个算例中,裂纹顶点 A, B 附近采用自然三角形奇异元,其他均采用八节点四边形等参数单元,应力强度因子是从外推法得出的.可以看出,由于边裂纹的存在,使 B 点的应力强度因子有所提高.文献[12]用杂交元计算了类似的例子,根据[12]的曲线读出 A 点 $\bar{K}_I=1.88, \bar{K}_{II}=0.38, B$ 点数值没有给出,但是[12]中 $c/L=0.5$,所以本文与[12]的

结果有所不同。

从以上计算可以得出结论：

1) 自然三角形单元可以直接用来计算应力强度因子，它与四边形等参数单元具有相同的优点。在有些结构用三角形单元来剖分单元合适时，自然三角形单元是可取的。

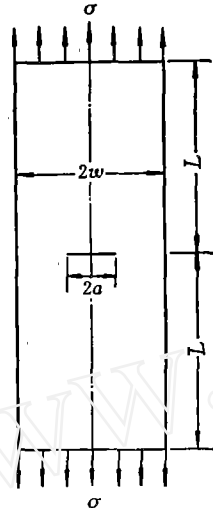


图 3

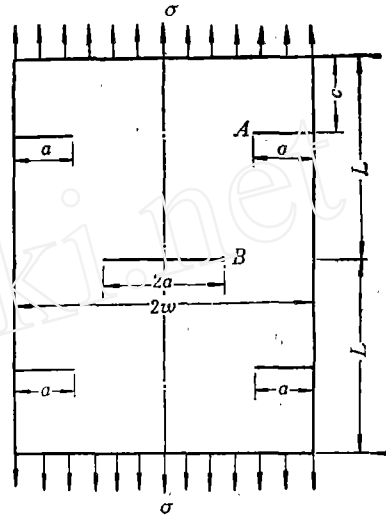


图 4

表 1 受均匀拉伸的中心裂纹平板无量纲应力强度因子值

a/w (l/a)	L/w	单元数	节点数	本文三种方法计算结果			文献[11]
				1	2	3	
0.4 (1/30)	1.0	76	179	1.192	1.208	1.133	1.216
	1.2	76	179	1.134	1.145	1.079	1.158
	1.4	86	201	1.106	1.118	1.053	1.122
	1.6	86	201	1.094	1.105	1.042	
	1.8	96	223	1.087	1.102	1.037	1.112
	2.0	96	223	1.087	1.100	1.035	1.109
0.6 (1/45)	1.0	76	179	1.457	1.468	1.376	1.481
	1.2	76	179	1.353	1.360	1.281	1.380
	1.4	86	201	1.308	1.318	1.240	1.320
	1.6	86	201	1.289	1.305	1.223	
	1.8	96	223	1.282	1.294	1.216	1.310
	2.0	96	223	1.280	1.291	1.214	1.303

2) 用自然三角形单元来计算应力强度因子的精确度是比较高的. 在确定应力强度因子时, 外推法比较好. 由于这种单元是协调单元, 且满足收敛准则, 所以在增加单元数和节点数时, 另外二种方法也能直接算得较精确的应力强度因子数值.

参 考 文 献

- (1) Henshell R.D. and Shan K.C. Crack Tip Elements are Unnecessary, *Int Jour. for Num. Methods in Eng.* 9, (1975), 495—509.
- (2) Barsoum R. S., On the Use of Isoparametric Finite Elements in Linear Fracture Mechanics, *Int. Jour. for Num. Methods in Eng.* 10, (1976), 25—37.
- (3) Barsoum R. S., Triangular Quarter Point Elements as Elastic and Perfectly Plastic Crack Tip Elements, *Int. Jour. for Num. Methods in Eng.* 11, (1977), 85—89.
- (4) Wang Ken-Jen, Hsu Chi-lin (徐纪林) and Kao Hua, Calculation of Stress Intensity Factors for Combined Mode Bent Specimens, *Advances in Research on Strength and Fracture of Materials*, Vol. 4 ed by D. M. F. Taplin 1978 或“中国科学(英文版)”1979年Vol. XX I No 5.
- (5) Pu S. L., Hussain M. A. and Lorenzen W. E., The Collapsed Cubic Isoparametric Elements as a Singular Elements for Crack Problems, *Int. Jour. for Num. Methods in Eng.* 12, (1978), 1727—1742.
- (6) Lynn P. and Ingraffea A. R. Transition Elements to be used with Quarter-Point Crack Tip Elements, *Int. Jour. for Num. Methods in Eng.* 12, (1978), 1031—1036.
- (7) Zienkiewicz O. C., *The Finite Element Methods*, 3rd, ed. McGraw-Hill, (1977).
- (8) 徐纪林, 吴永礼. 计算应力强度因子的奇异等参单元, *固体力学学报*, 1983年, 2期, 258—263.
- (9) Tracey D. M., Discussion of On the Use of Isoparametric Finite Elements in Linear Fracture Mechanics, *Int. Jour for Num. Methods in Eng.* 11, (1977), 401—402.
- (10) Barsoum R. S., Author's Reply to the Discussion by Tracey, *Int. Jour. for Num. Methods in Eng.* 11, (1977), 402—403.
- (11) Isida M., Effect of Width and Length on Stress Intensity Factors of Internally Cracked Plates under Various Boundary Conditions, *Int. Jour. of Fract. Mech.* 7, (1971), 301—316.
- (12) Pian T. H. H., Teng P. and Luk C., Elastic Crack Analysis by a Finite Element Hybrid Method, *Proc. Third Air Force Conf. On Matrix Methods in Struct. Mech* Dayton, Ohio, October 1971, AD—785968.

**CALCULATION OF STRESS INTENSITY FACTORS
BY NATURAL TRIANGULAR ELEMENTS**

Wu Yong-li

(Institute of Mechanics, Academia Sinica)

www.cnki.net