第4期　　固体力学学报　　№4
1984年12月　　ACTA MECHANICA SOLIDA SINICA　　December 1984

复合材料的多层、夹层和加筋圆柱曲板的稳定和振动

王震鸣　戴溶陵　吕明身

(中国科学院力学研究所)

提要　本文在文献〔1，2〕的基础上，考虑了沿壳体厚度方向的剪切变形，探讨周边简支的纤维增强复合材料的正交各向异性的多层、夹层和加筋矩形圆柱曲板（与圆柱壳），在轴压、侧压和剪切(扭矩)作用下的临界载荷和横向振动固有频率的计算问题．在编成计算程序后，用一些算例将用文献〔1〕中的扁壳方程（Donnell 壳体理论）和文献〔3〕中的非扁壳方程（Love 的壳体一阶近似理论）算得的结果作了比较；将轴压下轴对称失稳和非轴对称失稳的临界载荷作了比较；将在轴压和侧压作用下失稳时外加筋曲板和内加筋曲板的临界载荷作了比较；将有薄膜力 $N_x{}^0$ 和 $N_y{}^0$ 同时和分别作用时与没有薄膜力作用时的横向振动固有频率作了比较；将按壳体的剪切变形理论和经典理论算得的临界载荷作了比较；将铺层情况对临界载荷的影响作了比较．

一、引　言

复合材料具有比强度高、比刚度大等优点，常做成板壳结构的形式．多层、夹层和加筋圆柱曲板(与圆柱壳)，由于几何形状简单、容易加工成型，是航空和航天工程上常用的结构形式．在轴压、侧压和剪切(扭矩)作用下的临界载荷和横向振动固有频率的计算问题，是设计人员所关心的重要问题．

壳体结构临界载荷的实验值与用线性稳定理论算得的临界载荷之间的显著差别，主要是由壳体的原始缺陷造成的．采用非线性理论，考虑壳体原始缺陷的影响，从原则上说，可使理论计算值和实验值相接近．可是在工程设计中，壳体尚未制造出来，原始缺陷的分布还不清楚，因此不能用计及原始缺陷的非线性理论来计算屈曲载荷．Kármán-钱的非线性稳定理论，由于计算工作量很大，目前主要用于对典型问题作理论上的探讨，还难于在工程设计中应用．对于用碳纤维(或硼纤维)增强环氧复合材料制成的多层、夹层和加筋壳，与相应的铝合金结构相比，由于原始缺陷及其影响较小，按线性稳定理论算得的结果和实验符合的程度也较好．

本文只讨论正交各向异性的圆柱曲板和圆柱壳的问题．对于承受较大载荷的复合材料板壳结构，由于铺层的数目较多，在设计时总可使 A_{16}，A_{26}，B_{16}，B_{26}，D_{16}，D_{26}，C_{45} 为零或为可忽略的量，成为正交各向异性的结构．对于正交各向异性的多层、夹层

本文于1982年12月22日收到．

和加筋圆柱壳，可以求得在轴压、侧压下临界载荷和横向振动固有频率的封闭解，而在剪切(扭矩)作用下的临界载荷，则需要用无穷级数求解．当 A_{16}，A_{26}，B_{16}，B_{26}，D_{16}，D_{26}，C_{45} 不为零时，用解析方法求解会引起相当大的困难．

和文献〔2〕一样，对于扁壳情况采用 u_0，v_0，γ_x，γ_y 和 w 作为广义位移．对于密加筋板壳，当面板不产生局部失稳或显著变形的情况，可采用不均匀构造的结构均匀化的方法，象文〔2〕那样，求得折合刚度和惯量．对于面板或筋条先发生局部失稳然后发生加筋板壳整体失稳的情况，可用非线性理论及屈曲波形相互作用的概念，近似地求得面板局部屈曲后的折合刚度和加筋板壳的折合刚度，从而也可化为正交各向异性壳的问题．这样，就能把多层、夹层和加筋壳的计算问题统一起来，采用统一的分析方法和计算程序，便于实际应用．

在计算横向振动固有频率时，只考虑转动惯量 I 和沿 z 轴方向的惯性力 $\left(-\bar{\rho}\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right)$，而略去起次要作用的惯性力 $\left(-\bar{\rho}\dfrac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}\right)$，$\left(-\bar{\rho}\dfrac{\partial^2 v_0}{\partial t^2}\right)$ 和耦合惯量 Q 的影响．

用若干算例讨论了采用剪切变形理论和经典理论时扁壳方程和非扁壳方程的差别；给出了 N_x^0 和 N_y^0 有一定比值时临界载荷的比较；在轴压下圆柱壳的轴对称失稳和非轴对称失稳时临界载荷的比较；在轴压下有内、外和纵、横加筋时临界载荷的比较；有薄膜力 N_x^0、N_y^0 同时或分别作用或皆为零时横向振动固有频率的比较；在不同的铺层情况下圆柱曲板在剪切失稳时临界载荷的比较等．

本文所用符号与文献〔1〕相同．除新引入的符号外，不再作说明．

二、基本方程

对于正交各向异性的多层、夹层和加筋圆柱曲板(与圆柱壳)在轴压、侧压和剪切(扭矩)作用下的稳定问题和横向振动固有频率问题，采用线性理论，考虑沿壳体厚度方向的剪切变形，不考虑温差的影响，由文〔1〕中(4.1)式可得下列方程

$$\{a\}+\{e\}+\{f\}=0 \tag{2.1}$$

其中，由文〔1〕中(4.2)式得

$$\{a\}=\begin{Bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} & L_{14} & L_{15} \\ L_{12} & L_{22} & L_{23} & L_{24} & L_{25} \\ L_{13} & L_{23} & L_{33} & L_{34} & L_{35} \\ L_{14} & L_{24} & L_{34} & L_{44} & L_{45} \\ -L_{15} & -L_{25} & -L_{35} & -L_{45} & L_{55} \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ \phi_x \\ \phi_y \\ w \end{Bmatrix} \tag{2.2}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}
&L_{11}=A_{11}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+A_{66}\frac{\partial^2}{\partial y^2} && L_{12}=(A_{12}+A_{66})\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\\
&L_{13}=B_{11}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+B_{66}\frac{\partial^2}{\partial y^2} && L_{14}=L_{23}=(B_{12}+B_{66})\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\\
&L_{15}=\frac{A_{12}}{R}\frac{\partial}{\partial x} && L_{22}=A_{66}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+A_{22}\frac{\partial^2}{\partial y^2}-f_1\frac{C_{44}}{R^2}\\
&L_{24}=B_{66}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+B_{22}\frac{\partial^2}{\partial y^2}+f_1\frac{C_{44}}{R} && L_{25}=\frac{1}{R}(A_{22}+f_1C_{44})\frac{\partial}{\partial y}\\
&L_{33}=D_{11}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+D_{66}\frac{\partial^2}{\partial y^2}-C_{55} && L_{34}=(D_{12}+D_{66})\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\\
&L_{35}=(\frac{B_{12}}{R}-C_{55})\frac{\partial}{\partial x} && L_{44}=D_{66}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+D_{22}\frac{\partial^2}{\partial y^2}-C_{44}\\
&L_{45}=(\frac{B_{22}}{R}-C_{44})\frac{\partial}{\partial y} && L_{55}=-\frac{A_{22}}{R^2}+C_{55}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+C_{44}\frac{\partial^2}{\partial y^2}
\end{aligned}\right\}\tag{2.3}$$

在(2.3)式中，R为圆柱曲板的半径．对于扁壳方程，取$f_1=0$；对于非扁壳方程，$f_1=1$，可与文〔3〕中的(7.23)式作对比后导得，其中L_{25}，L_{35}，L_{55}的表达式有一些错误（本文引用时已改正）．

在(2.1)式中，当薄膜力$N_x=N_x{}^0(y)$，$N_y=N_y{}^0(x)$和$N_{xy}=N^0{}_{xy}=\text{const.}$时，由文〔1〕中(4.7)式可得

$$\{e\}=\left\{0,\ 0,\ 0,\ 0,\ N_x{}^0\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+2N^0{}_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+N_y{}^0\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right\}^T\tag{2.4}$$

由文〔1〕中(4.8)式可得

$$\{f\}=-\left\{0,0,\ I\frac{\partial^2\varphi_x}{\partial t^2},\ I\frac{\partial^2\varphi_y}{\partial t^2},\ \bar\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right\}^T\tag{2.5}$$

将(2.2)，(2.4)和(2.5)式代入(2.1)式得

$$\left.\begin{aligned}
&L_{11}u_0+L_{12}v_0+L_{13}\varphi_x+L_{14}\varphi_y+L_{15}w=0\\
&L_{12}u_0+L_{22}v_0+L_{23}\varphi_x+L_{24}\varphi_y+L_{25}w=0\\
&L_{13}u_0+L_{23}v_0+(L_{33}-I\frac{\partial^2}{\partial t^2})\varphi_x+L_{34}\varphi_y+L_{35}w=0\\
&L_{14}u_0+L_{24}v_0+L_{34}\varphi_x+(L_{44}-I\frac{\partial^2}{\partial t^2})\varphi_y+L_{45}w=0\\
&L_{15}u_0+L_{25}v_0+L_{35}\varphi_x+L_{45}\varphi_y-L_{55}w-q_1=0
\end{aligned}\right\}\tag{2.6}$$

其中

$$q_1=N_x{}^0\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+2N_{xy}{}^0\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+N_y{}^0\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\bar\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\tag{2.7}$$

将(2.6)式中的第五式，减去第三式对x微分，再减去第四式对y微分，得

$$\bar L_{15}u_0+\bar L_{25}v_0+(\bar L_{35}+I\frac{\partial^3}{\partial x\partial t^2})\varphi_x+(\bar L_{45}+I\frac{\partial^3}{\partial y\partial t^2})\varphi_y+\bar L_{55}w-q_1=0\tag{2.8}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}
\overline{L}_{15}&=\frac{A_{12}}{R}\frac{\partial}{\partial x}-B_{11}\frac{\partial^3}{\partial x^3}-(B_{12}+2B_{66})\frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}\\
\overline{L}_{25}&=\frac{A_{22}}{R}\frac{\partial}{\partial y}-B_{22}\frac{\partial^3}{\partial y^3}-(B_{12}+2B_{66})\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial y}\\
\overline{L}_{35}&=\frac{B_{12}}{R}\frac{\partial}{\partial x}-D_{11}\frac{\partial^3}{\partial x^3}-(D_{12}+2D_{66})\frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}\\
\overline{L}_{45}&=\frac{B_{22}}{R}\frac{\partial}{\partial y}-D_{22}\frac{\partial^3}{\partial y^3}-(D_{12}+2D_{66})\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial y}\\
\overline{L}_{55}&=\frac{A_{22}}{R^2}-\frac{B_{12}}{R}\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{B_{22}}{R}\frac{\partial^2}{\partial y^2}
\end{aligned}\right\}\tag{2.9}$$

(2.6)式的前四式和(2.8)式，为以 u_0，v_0，φ_x，φ_y 和 w 作为广义位移的基本方程，结合相应的边界条件，可求解在考虑沿厚度方向剪切变形情况下采用扁壳和非扁壳理论时的临界载荷和横向振动固有频率.

对于扁壳理论，还可引用新的广义位移 γ_x 和 γ_y，使

$$\gamma_x=\varphi_x+\frac{\partial w}{\partial x}\qquad\qquad \gamma_y=\varphi_y+\frac{\partial w}{\partial y}\tag{2.10}$$

其中，$\gamma_x=\gamma_{xy}$，$\gamma_y=\gamma_{yz}$，为平均剪应变. 则(2.6)式的前四式和(2.8)式可化为

$$\left.\begin{aligned}
&L_{11}u_0+L_{12}v_0+L_{13}\gamma_x+L_{14}\gamma_y+\overline{L}_{15}w=0\\
&L_{12}u_0+L_{22}v_0+L_{23}\gamma_x+L_{24}\gamma_y+\overline{L}_{25}w=0\\
&L_{13}u_0+L_{23}v_0+(L_{33}-I\frac{\partial^2}{\partial t^2})\gamma_x+L_{34}\gamma_y+(\overline{L}_{35}+I\frac{\partial^3}{\partial x\partial t^2})w=0\\
&L_{14}u_0+L_{24}v_0+L_{34}\gamma_x+(L_{44}-I\frac{\partial^2}{\partial t^2})\gamma_y+(\overline{L}_{45}+I\frac{\partial^3}{\partial y\partial t^2})w=0\\
&\overline{L}_{15}u_0+\overline{L}_{25}v_0+(\overline{L}_{35}+I\frac{\partial^3}{\partial x\partial t^2})\gamma_x+(\overline{L}_{45}+I\frac{\partial^3}{\partial y\partial t^2})\gamma_y+\\
&\quad+\left[\tilde{L}_{55}-I\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2})\right]w-q_1=0
\end{aligned}\right\}\tag{2.11}$$

其中

$$\tilde{L}_{55}=\frac{A_{22}}{R^2}-2\frac{B_{12}}{R}\frac{\partial^2}{\partial x^2}-2\frac{B_{22}}{R}\frac{\partial^2}{\partial y^2}+D_{11}\frac{\partial^4}{\partial x^4}+$$

$$+2(D_{12}+2D_{66})\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}+D_{22}\frac{\partial^4}{\partial y^4}\tag{2.12}$$

由(2.11)式及相应的边界条件，可用广义位移 u_0，v_0，γ_x，γ_y 和 w 求解临界载荷和横向振动固有频率.

对于经典的非扁壳理论，由文〔3〕p316 的(7.7)和(7.8)式可得 $\varphi_x=-\frac{\partial w}{\partial x}$，$\varphi_y=-\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{v_0}{R}$，代入(2.6)的第一、二式和(2.8)式可得下列方程组

$$\left.\begin{aligned}&L_{11}u_0+\left(L_{12}+\frac{L_{14}}{R}\right)v_0+\overline{L}_{15}=0\\&L_{12}u_0+\left(L_{22}+\frac{L_{24}}{R}\right)v_0+\overline{L}_{25}=0\\&\overline{L}_{15}u_0+\left(\overline{L}_{25}+\frac{\overline{L}_{45}}{R}\right)v_0+\tilde{L}_{55}w-q_1=0\end{aligned}\right\}\tag{2.13}$$

由(2.13)式及相应的边界条件，可用广义位移 u_0, v_0 和 w 求解临界载荷和忽略转动惯量 I 时的横向振动固有频率.

三、轴压和侧压下的临界载荷和横向振动固有频率

对于四边简支的矩形圆柱曲板：

1. 采用扁壳方程时，设广义位移为

$$\left.\begin{aligned}&u_0=\bar{u}_0\cos\frac{m\pi x}{l}\ \sin\frac{n\pi y}{b}\ \sin\omega t\\&v_0=\bar{v}_0\sin\frac{m\pi x}{l}\ \cos\frac{n\pi y}{b}\ \sin\omega t\\&\gamma_x=\bar{\gamma}_x\cos\frac{m\pi x}{l}\ \sin\frac{n\pi y}{b}\ \sin\omega t\\&\gamma_y=\bar{\gamma}_y\sin\frac{m\pi x}{l}\ \cos\frac{n\pi y}{b}\ \sin\omega t\\&w=\bar{w}\ \sin\frac{m\pi x}{l}\ \sin\frac{n\pi y}{b}\ \sin\omega t\end{aligned}\right\}\tag{3.1}$$

已满足四边第二类简支的边界条件[4]和 $t=0$ 时广义位移为零广义速度为已知值的初始条件. 在(3.1)式中，l 和 b 分别为曲板沿母线方向和周向的长度；m 和 n 分别为轴向和周向在失稳及振动时的半波数. 将(3.1)式代入(2.11)式，当 $\bar{u}_0$，$\bar{v}_0$，$\bar{\gamma}_x$，$\bar{\gamma}_y$ 和 $\bar{w}$ 具有非零解时，要求齐次方程组系数的行列式为零，即得

$$\begin{vmatrix}T_{11} & T_{12} & T_{13} & T_{14} & T_{15}\\ T_{12} & T_{22} & T_{23} & T_{24} & T_{25}\\ T_{13} & T_{23} & (T_{33}-I\omega^2) & T_{34} & \left(T_{35}-\frac{m\pi}{l}I\omega^2\right)\\ T_{14} & T_{24} & T_{34} & (T_{44}-I\omega^2) & \left(T_{45}-\frac{n\pi}{b}I\omega^2\right)\\ T_{15} & T_{25} & \left(T_{35}-\frac{m\pi}{l}I\omega^2\right) & \left(T_{45}-\frac{n\pi}{b}I\omega^2\right) & \begin{bmatrix}T_{55}-I\omega^2\left(\frac{m^2\pi^2}{l^2}+\frac{n^2\pi^2}{b^2}\right)+\\+N_x{}^0\frac{m^2\pi^2}{l^2}+N_y{}^0\frac{n^2\pi^2}{b^2}-\bar{\rho}\omega^2\end{bmatrix}\end{vmatrix}$$

$$=0\tag{3.2}$$

由(3.2)式可以求解临界载荷(当 $\omega=0$，且 $N_y{}^0/N_x{}^0=\text{const.}$)或固有频率(当 $N_x{}^0$，$N_y{}^0$ 已知). 在(3.2)式中

$$
\left.\begin{aligned}
&T_{11}=A_{11}\frac{m^2\pi^2}{l^2}+A_{66}\frac{n^2\pi^2}{b^2} \qquad T_{12}=(A_{12}+A_{66})\frac{mn\pi^2}{lb}\\
&T_{13}=B_{11}\frac{m^2\pi^2}{l^2}+B_{66}\frac{n^2\pi^2}{b^2} \qquad T_{14}=T_{23}=(B_{12}+B_{66})\frac{mn\pi^2}{lb}\\
&T_{22}=A_{66}\frac{m^2\pi^2}{l^2}+A_{22}\frac{n^2\pi^2}{b^2} \qquad T_{24}=B_{66}\frac{m^2\pi^2}{l^2}+B_{22}\frac{n^2\pi^2}{b^2}\\
&T_{33}=D_{11}\frac{m^2\pi^2}{l^2}+D_{66}\frac{n^2\pi^2}{b^2}+C_{55} \qquad T_{34}=(D_{12}+D_{66})\frac{mn\pi^2}{lb}\\
&T_{44}=D_{66}\frac{m^2\pi^2}{l^2}+D_{22}\frac{n^2\pi^2}{b^2}+C_{44}\\
&T_{15}=-\left(\frac{A_{12}}{R}\frac{m\pi}{l}+B_{11}\frac{m^3\pi^3}{l^3}+(B_{12}+2B_{66})\frac{mn^2\pi^3}{lb^2}\right)\\
&T_{25}=-\left(\frac{A_{22}}{R}\frac{n\pi}{b}+B_{22}\frac{n^3\pi^3}{b^3}+(B_{12}+2B_{66})\frac{m^2n\pi^3}{l^2b}\right)\\
&T_{35}=-\left(\frac{B_{12}}{R}\frac{m\pi}{l}+D_{11}\frac{m^3\pi^3}{l^3}+(D_{12}+2D_{66})\frac{mn^2\pi^3}{lb^2}\right)\\
&T_{45}=-\left(\frac{B_{22}}{R}\frac{n\pi}{b}+D_{22}\frac{n^3\pi^3}{b^3}+(D_{12}+2D_{66})\frac{m^2n\pi^3}{l^2b}\right)\\
&T_{55}=\frac{A_{22}}{R^2}+2\frac{B_{12}}{R}\frac{m^2\pi^2}{l^2}+\frac{2B_{22}}{R}\frac{n^2\pi^2}{b^2}+D_{11}\frac{m^4\pi^4}{l^4}+\\
&\qquad +2(D_{12}+2D_{66})\frac{m^2n^2\pi^4}{l^2b^2}+D_{22}\frac{n^4\pi^4}{b^4}
\end{aligned}\right\}\tag{3.3}
$$

2. 采用非扁壳方程时，将(3.1)式中广义位移γ_x和γ_y用φ_x和φ_y来替代，即

$$
\left.\begin{aligned}
\varphi_x&=\bar{\varphi}_x\cos\frac{m\pi x}{l}\sin\frac{n\pi y}{b}\sin\omega t\\
\varphi_y&=\bar{\varphi}_y\sin\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{n\pi y}{b}\sin\omega t
\end{aligned}\right\}\tag{3.4}
$$

则u_0，v_0，φ_x，φ_y和w已满足边界条件和初始条件．将(3.4)式和(3.1)式中的u_0，v_0和w的表达式代入(2.6)式的前四式及(2.8)式后，可得

$$
\begin{vmatrix}
T_{11} & T_{12} & T_{13} & T_{14} & T_{15}'\\
T_{12} & T_{22}' & T_{23} & T_{24}' & T_{25}'\\
T_{13} & T_{23} & (T_{33}-I\omega^2) & T_{34} & T_{35}'\\
T_{14} & T_{24}' & T_{34} & (T_{44}-I\omega^2) & T_{45}'\\
T_{15} & T_{25} & T_{35} & T_{45} & T_{55}'+N_x^0\frac{m^2\pi^2}{l^2}+N_y^0\frac{n^2\pi^2}{b^2}-\bar{\rho}\omega^2
\end{vmatrix}
=0 \tag{3.5}
$$

其中

$$
\left.\begin{aligned}
&T_{22}'=T_{22}+f_1\frac{C_{44}}{R^2} \qquad T_{24}'=T_{24}-f_1\frac{C_{44}}{R}\\
&T_{15}'=-\frac{A_{12}}{R}\frac{m\pi}{l} \qquad T_{25}'=-\frac{1}{R}(A_{22}+f_1C_{44})\frac{n\pi}{b}\\
&T_{35}'=-\left(\frac{B_{12}}{R}-C_{55}\right)\frac{m\pi}{l} \qquad T_{45}'=-\left(\frac{B_{22}}{R}-C_{44}\right)\frac{n\pi}{b}\\
&T_{55}'=\frac{A_{22}}{R^2}+\frac{B_{12}}{R}\frac{m^2\pi^2}{l^2}+\frac{B_{22}}{R}\frac{n^2\pi^2}{b^2}
\end{aligned}\right\}\tag{3.6}
$$

在(3.5)和(3.6)式中，T_{11}、T_{12}、T_{13}、T_{14}、T_{22}、T_{23}、T_{24}、T_{33}、T_{34}、T_{44}、T_{15}、T_{25}、T_{35}、T_{45}和(3.3)式相同.

当R、l、b、$\bar{\rho}$、I和A_{11}、A_{12}、A_{22}、A_{66}、B_{11}、B_{12}、B_{22}、B_{66}、D_{11}、D_{12}、D_{22}、D_{66}以及C_{44}、C_{55}为已知时，令$m=1，2，3，\cdots$，$n=1，2，3，\cdots$，依次进行试算，可分别求得曲板在轴压作用下，在侧压作用下，在轴压和侧压联合作用下（此时要给定$N_x{}^0$和$N_y{}^0$的比值）失稳时的临界载荷和在$N_x{}^0$和$N_y{}^0$给定情况下的横向振动固有频率$\dfrac{\omega}{2\pi}$.

对于闭合圆柱壳，取$b=2\pi R$. 受轴压的圆柱壳轴对称失稳时，$n=0$，$m=1，2，3，\cdots$，非轴对称失稳时，$n=4，6，8，\cdots$，$m=1，2，3，\cdots$（其中，对于扁壳方程，$f_1=0$，n应从6开始，$n=4$时误差太大；对于非扁壳方程，$f_1=1$，n可从4开始）进行试算. 算得的最小值即所求的临界载荷. 对于受侧压的曲板和圆柱壳，$m=1$，$n=4，6，8，\cdots$，（其中，对于扁壳方程，n亦应从6开始，否则误差太大；对于非扁壳方程，n可从4开始）.

对于在$N_x{}^0$和$N_y{}^0$（其中的一个或两个皆可为零和不为零）作用下，圆柱曲板的横向振动固有频率，当$m=1，2，3，\cdots$，$n=1，2，3，\cdots$，给定时，或圆柱壳的$m=1，2，3，\cdots$，$n=0，4，6，8，\cdots$，给定时，振型就已确定（当$n=0$时，振型是轴对称的；当$n\neq0$时，振型是非轴对称的；对于扁壳方程，$n=6，8，10，\cdots$，对于非扁壳方程，$n=2，4，6，\cdots$）依次试算，就可求得横向振动的最低阶固有频率.

四、剪切作用下的临界载荷

对于四边第二类简支的正交各向异性的矩形圆柱曲板，采用扁壳方程，在(2.7)式中当$N_{xy}{}^0\neq0$，其余各项均为零时，可设

$$\left.\begin{aligned}
u_0&=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}u_{mn}\cos\frac{m\pi x}{l}\sin\frac{n\pi y}{b}\\
v_0&=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}v_{mn}\sin\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{n\pi y}{b}\\
\gamma_x&=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_{xmn}\cos\frac{m\pi x}{l}\sin\frac{n\pi y}{b}\\
\gamma_y&=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_{ymn}\sin\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{n\pi y}{b}\\
w&=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}w_{mn}\sin\frac{m\pi x}{l}\sin\frac{n\pi y}{b}
\end{aligned}\right\}\tag{4.1}$$

将(4.1)式代入(2.11)式可得

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(T_{11}u_{mn}+T_{12}v_{mn}+T_{13}\gamma_{xmn}+T_{14}\gamma_{ymn}+T_{15}w_{mn})\cos\frac{m\pi x}{l}\sin\frac{n\pi y}{b}=0\\
&\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(T_{12}u_{mn}+T_{22}v_{mn}+T_{23}\gamma_{xmn}+T_{24}\gamma_{ymn}+T_{25}w_{mn})\sin\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{n\pi y}{b}=0\\
&\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(T_{13}u_{mn}+T_{23}v_{mn}+T_{33}\gamma_{xmn}+T_{34}\gamma_{ymn}+T_{35}w_{mn})\cos\frac{m\pi x}{l}\sin\frac{n\pi y}{b}=0\\
&\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(T_{14}u_{mn}+T_{24}v_{mn}+T_{34}\gamma_{xmn}+T_{44}\gamma_{ymn}+T_{45}w_{mn})\sin\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{n\pi y}{b}=0\\
&\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\Big[(T_{15}u_{mn}+T_{25}v_{mn}+T_{35}\gamma_{xmn}+T_{45}\gamma_{ymn}+T_{55}w_{mn})\sin\frac{m\pi x}{l}\sin\frac{n\pi y}{b}-\\
&\qquad -2N_{xy}{}^{0}\frac{mn\pi^2}{lb}w_{mn}\cos\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{n\pi y}{b}\Big]=0
\end{aligned}\right\}\tag{4.2}$$

在(4.2)式中，T_{11}、T_{12}、T_{13}、…、T_{55}和(3.3)式相同.

将(4.2)式中的$\cos\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{n\pi y}{b}$展成$\sin\frac{m\pi x}{l}\sin\frac{n\pi y}{b}$的级数，经过运算后可得

$$2N^0_{xy}\frac{mn\pi^2}{lb}w_{mn}\cos\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{n\pi y}{b}=N^0_{xy}\times$$

$$\times\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}\frac{32\,mnpq}{(m^2-p^2)(n^2-q^2)}w_{pq}\sin\frac{m\pi x}{l}\sin\frac{n\pi y}{b}\tag{4.3}$$

再将(4.2)式改写成

$$\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & T_{14} & T_{15}\\ T_{12} & T_{22} & T_{23} & T_{24} & T_{25}\\ T_{13} & T_{23} & T_{33} & T_{34} & T_{35}\\ T_{14} & T_{24} & T_{34} & T_{44} & T_{45}\\ T_{15} & T_{25} & T_{35} & T_{45} & T_{55}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_{mn}\\ v_{mn}\\ \gamma_{xmn}\\ \gamma_{ymn}\\ w_{mn}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\\0\\0\\ \frac{32}{lb}N_{xy}{}^0\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}\frac{mn\,pq\,w_{pq}}{(m^2-p^2)(n^2-q^2)}\end{Bmatrix}\tag{4.4}$$

分别对每一组的mn值用高斯消去法化成一个上三角矩阵，此时w_{mn}的系数为$T_{55}{}^*$，则得

$$T_{55}{}^*w_{mn}=\frac{32N_{xy}{}^0}{lb}\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}\frac{mnpq}{(m^2-p^2)(n^2-q^2)}w_{pq}\tag{4.5}$$

改写为

$$\frac{w_{mn}lb}{32N_{xy}{}^0}=\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}\frac{mnpq}{(m^2-p^2)(n^2-q^2)T_{55}{}^*}w_{pq}\tag{4.6}$$

令

$$\lambda=\frac{lb}{32N_{xy}{}^{0}}\qquad B_{mnpq}=\frac{mnpq}{(m^2-p^2)(n^2-q^2)T_{55}{}^{*}}\tag{4.7}$$

就化为无穷阶矩阵求最大特征值的问题．排成计算程序，取有限项，可求得 $N_{xycr}{}^{0}$ 的近似值．

五、采用经典理论的情况

采用扁壳方程和经典理论时，由于剪切刚度 $C_{44}=\infty$，$C_{55}=\infty$，由(3.2)式可得

$$\begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{15} \\ T_{12} & T_{22} & T_{25} \\ T_{15} & T_{25} & \left[T_{55}+N_x{}^0\frac{m^2\pi^2}{l^2}+N_y{}^0\frac{n^2\pi^2}{b^2}-\bar{\rho}\omega^2-I\omega^2\left(\frac{m^2\pi^2}{l^2}+\frac{n^2\pi^2}{b^2}\right)\right] \end{vmatrix}=0\tag{5.1}$$

由(4.4)式可得

$$\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{15} \\ T_{12} & T_{22} & T_{25} \\ T_{15} & T_{25} & T_{55} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_{mn} \\ v_{mn} \\ w_{mn} \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{32N_{xy}{}^{0}}{lb}\sum\limits_{p=1}^{\infty}\sum\limits_{q=1}^{\infty}\frac{mnpq}{(m^2-p^2)(n^2-q^2)} \end{Bmatrix}\tag{5.2}$$

(5.2)

对于非扁壳方程，由(2.13)式可得

$$\begin{vmatrix} T_{11} & T_{12}+\frac{1}{R}T_{14} & T_{15} \\ T_{12} & T_{22}+\frac{1}{R}T_{24} & T_{25} \\ T_{15} & T_{25}+\frac{1}{R}T_{45} & T_{55}+N_x{}^0\frac{m^2\pi^2}{l^2}+N_y{}^0\frac{n^2\pi^2}{b^2}-\bar{\rho}\omega^2 \end{vmatrix}=0\tag{5.3}$$

在(5.1)—(5.3)式中，T_{11}、T_{12}、T_{22}、T_{14}、T_{24}、T_{25}、T_{45}、T_{55} 和(3.3)式相同．由(5.1)、(5.3)和(5.2)式可分别求解圆柱曲板和圆柱壳在轴压、侧压和剪切(扭矩)作用下的临界载荷和横向振动固有频率．排成计算程序，给定参数，就可象前二节用壳体的剪切变形理论那样，算得所需的结果．

六、算例和讨论

算例中的各种多层、夹层和加筋圆柱曲板或圆柱壳，其弹性模量、泊桑比、密度、铺层情况及几何尺寸分别为：$E_{11}=1.2\times10^6\ \mathrm{kg/cm^2}$，$E_{22}=\frac{1}{20}E_{11}$，$\nu_{12}=0.3$，$G_{12}=G_{13}=0.6E_{22}$，$G_{23}=0.4E_{22}$，$\rho=0.00155\ \mathrm{kg/cm^3}$．每一铺层的厚度为 0.015 cm．

1) 多层圆柱曲板和圆柱壳，$R=l=b=50$ cm．(1) 正交铺层，共 40 层；(2) ±45° 铺层，共 40 层；(3) ±22.5° 铺层，共 40 层；(4) ±45° 铺层，共 20 层；(5) ±22.5°

铺层，共20层.

2）夹层圆柱壳，内、外表板皆为正交铺层，$l=50$ cm，$R=30$ cm，夹心厚 1.8cm，

表 1　各种刚度的数值

	A_{11}	A_{12}	A_{22}	A_{66}	B_{11}	B_{12}	B_{22}	B_{66}	D_{11}	D_{12}	D_{22}	D_{66}	C_{44}	C_{55}
(1)	3.7971	0.1085	3.7971	0.2160	−0.2577	0	0.2577	0	1.1391	0.0326	1.1391	0.0648	1.5000	1.5000
(2)	2.1688	1.7368	2.1688	1.8443	0	0	0	0	0.6506	0.5210	0.6506	0.5533	1.5000	1.5000
(3)	5.4122	0.9226	0.5537	1.0302	0	0	0	0	1.6237	0.2768	0.1661	0.3091	1.7121	1.2878
(4)	1.0844	0.8684	1.0844	0.9222	0	0	0	0	0.0813	0.0651	0.0813	0.0691	0.7500	0.7500
(5)	2.7061	0.4613	0.2769	0.5151	0	0	0	0	0.2030	0.0364	0.0208	0.0386	0.8561	0.6939
(6)	2.2783	0.0651	2.2783	0.1296	0	0	0	0	22.697	0.6397	22.093	1.2737	1.1160	1.0800
(7)	2.4500	0.0651	2.1065	0.1296	−6.1900	−0.1758	−6.1126	−0.3499	24.367	0.6477	20.968	1.2895	1.1310	1.0650
(8)	2.4500	0.0651	2.1065	0.1296	6.1900	0.1758	6.1126	0.3499	24.367	0.6477	20.968	1.2895	1.1310	1.0650
(9)	3.1920	0.0281	0.6880	0.0750	−5.7400	0	0	0	7.8200	0.0082	0.0221	0.6903	∞	∞
(10)	3.1920	0.0281	0.6880	0.0750	5.7400	0	0	0	7.8200	0.0082	0.0221	0.6903	∞	∞
(11)	0.6880	0.0281	3.1920	0.0750	0	0	−5.7400	0	0.0221	0.0082	7.2800	0.6903	∞	∞
(12)	0.6880	0.0281	3.1920	0.0750	0	0	5.7400	0	0.0221	0.0082	7.2800	0.6903	∞	∞
注	$\times10^5$kg/cm				$\times10^4$kg				$\times10^4$kgcm				$\times10^4$kg/cm	

夹心的剪切模量 $G_{13}=1000\ \mathrm{kg/cm^2}$， $G_{23}=800\ \mathrm{kg/cm^2}$. (6) 内、外表板各为 12 层；(7) 内表板为 15 层，外表板为 9 层；(8) 内表板为 9 层，外表板为 15 层.

3) 加筋曲板，$l=b=50$ cm，$R=30$ cm，面板为正交铺层，共 13 层， 其中轴向 8 层，周向 5 层，有 4 根帽形筋(只给出加筋壳的折合刚度， 详细铺层情况及筋条尺寸从略). (9) 纵向内侧加筋；(10) 纵向外侧加筋；(11) 横向内侧加筋；(12) 横向外侧加

表 2　在轴压和侧压下各种情况临界载荷的比较

		剪切变形理论					经典理论				
		轴压			侧压		轴压			侧压	
		轴对称失稳	非轴对称失稳		扁壳	非扁壳	轴对称失稳	非轴对称失稳		扁壳	非扁壳
		扁壳和非扁壳	扁壳	非扁壳			扁壳和非扁壳	扁壳	非扁壳		
(1)	曲板	—	$m=2$ $n=2$ 897.5	$m=2$ $n=2$ 887.7	$m=1$ $n=2$ 311.6	$m=1$ $n=2$ 302.4	—	$m=2$ $n=2$ 903.1	$m=2$ $n=2$ 898.0	$m=1$ $n=2$ 313.9	$m=1$ $n=2$ 309.2
(1)	圆柱壳	$m=6$ $n=0$ 2529.7	$m=2$ $n=14$ 907.8	$m=2$ $n=14$ 895.8	$m=1$ $n=14$ 309.9	$m=1$ $n=14$ 300.8	$m=5$ $n=0$ 2663.1	$m=2$ $n=12$ 915.7	$m=2$ $n=12$ 911.0	$m=1$ $n=14$ 313.4	$m=1$ $n=14$ 308.7
(2)	圆柱壳	$m=4$ $n=0$ 892.6	$m=4$ $n=6$ 1037.6	$m=4$ $n=4$ 956.8	$m=1$ $n=16$ 327.9	$m=1$ $n=16$ 320.0	$m=4$ $n=0$ 903.6	$m=4$ $n=6$ 1055.8	$m=4$ $n=4$ 970.8	$m=1$ $n=16$ 333.4	$m=1$ $n=16$ 329.3
(3)	圆柱壳	$m=3$ $n=0$ 998.5	$m=3$ $n=6$ 1057.7	$m=3$ $n=4$ 1024.7	$m=1$ $n=22$ 173.3	$m=1$ $n=22$ 171.3	$m=3$ $n=0$ 1023.2	$m=3$ $n=6$ 1085.8	$m=3$ $n=4$ 1051.0	$m=1$ $n=22$ 175.7	$m=1$ $n=22$ 174.6
(4)	圆柱壳	$m=6$ $n=0$ 223.3	$m=6$ $n=6$ 240.8	$m=6$ $n=4$ 231.0	$m=1$ $n=18$ 50.7	$m=1$ $n=18$ 49.8	$m=6$ $n=0$ 225.0	$m=6$ $n=6$ 243.0	$m=6$ $n=4$ 233.0	$m=1$ $n=18$ 51.0	$m=1$ $n=18$ 50.5
(5)	圆柱壳	$m=4$ $n=0$ 251.5	$m=4$ $n=6$ 259.1	$m=4$ $n=4$ 254.9	$m=1$ $n=26$ 27.1	$m=1$ $n=26$ 26.9	$m=4$ $n=0$ 253.8	$m=4$ $n=6$ 261.6	$m=4$ $n=4$ 257.3	$m=1$ $n=26$ 27.2	$m=1$ $n=26$ 27.1
(6)	圆柱壳	$m=5$ $n=0$ 9849.6	$m=2$ $n=6$ 5530.4	$m=2$ $n=6$ 5261.8	$m=1$ $n=6$ 2850.4	$m=1$ $n=6$ 2448.9	$m=3$ $n=0$ 15183.1	$m=2$ $n=6$ 6903.2	$m=2$ $n=4$ 6723.0	$m=1$ $n=6$ 3303.4	$m=1$ $n=6$ 3048.5
(7)	圆柱壳	$m=5$ $n=0$ 9596.2	$m=2$ $n=6$ 5377.0	$m=2$ $n=6$ 5153.7	$m=1$ $n=6$ 2643.8	$m=1$ $n=6$ 2308.9	$m=3$ $n=0$ 14676.4	$m=2$ $n=6$ 6689.0	$m=2$ $n=6$ 6549.0	$m=1$ $n=6$ 3002.6	$m=1$ $n=6$ 2798.6
(8)	圆柱壳	$m=5$ $n=0$ 9601.0	$m=2$ $n=6$ 5383.6	$m=2$ $n=6$ 5125.6	$m=1$ $n=6$ 2644.1	$m=1$ $n=6$ 2263.1	$m=3$ $n=0$ 14691.5	$m=2$ $n=6$ 6694.1	$m=2$ $n=6$ 6526.2	$m=1$ $n=6$ 3003.6	$m=1$ $n=6$ 2763.9

筋.

由上述数据算得的各种刚度数值见表1.

从表2—表6中给出下列情况的计算结果：在轴压、侧压和剪切作用下临界载荷的计算结果；在 $N_x{}^0$，$N_y{}^0$ 同时或分别作用下，I，$\bar{\rho}$ 皆不为零和 $I=0$，$\bar{\rho}\neq 0$ 时横向振动固有频率的计算结果；以及用壳体的剪切变形理论和经典理论，扁壳和非扁壳方程，外加筋和内加筋，对称和非对称铺层情况的计算结果．从算例可以看到：

表 3　在轴压下内、外和纵、横加筋时临界载荷的比较

		经典（扁壳）理论	
		轴压时非轴对称失稳	侧压
(9)	曲板	$m=1$，$n=2$ 1115.8	$m=1$，$n=5$ 33.65
(10)	曲板	$m=1$，$n=2$ 1274.9	$m=1$，$n=5$ 38.17
(11)	曲板	$m=1$，$n=2$ 1175.4	$m=1$，$n=1$ 1175.4
(12)	曲板	$m=1$，$n=2$ 1201.6	$m=1$，$n=2$ 1201.6

表 4　没有薄膜力作用时各种情况固有振动频率的比较

			剪切变形理论			经典理论			
			轴对称振动	非轴对称振动		轴对称振动		非轴对称振动	
						考虑 I	不考虑 I	考虑 I	不考虑 I
		薄膜力	扁壳和非扁壳	扁壳	非扁壳	扁壳			
(1)	曲板	$N_x{}^0=0$	—	$m=1$，$n=2$ 2274.5	$m=1$，$n=2$ 2242.2	—	—	$m=1$，$n=2$ 2286.9	$m=1$，$n=2$ 2287.5
(1)	圆柱壳	$N_y{}^0=0$	$m=1$，$n=0$ 12649.2	$m=1$ $n=10$ 2145.2	$m=1$ $n=10$ 2121.0	$m=1$，$n=0$ 12643.8	$m=1$，$n=0$ 12649.2	$m=1$ $n=10$ 2143.2	$m=1$ $n=10$ 2145.2

1）对于多层圆柱曲板和圆柱壳(1)—(5)，在轴压和侧压作用下，不论是扁壳方程还是非扁壳方程的情况，采用经典理论比采用剪切变形理论算得的临界载荷高0.4—5.3%．其中除圆柱壳(1)在轴对称失稳时高5.3%外，其余情况高0.4—2.9%．沿厚度方向剪切变形的影响甚小，为简便起见，采用经典理论已可满足设计需要.

2）对于夹层圆柱壳(6)—(8)，上述比值在轴压时的轴对称失稳情况，高52.9—54.1%；在轴压时的非轴对称失稳情况，高24.3—27.6%；在侧压时高13.6—24.5%．这说明沿厚度方向剪切变形的影响不可忽略，必须采用剪切变形理论.

表 5　在各种薄膜力作用下固有振动频率的比较

		薄膜力 kg	剪切变形理论(扁壳) 非轴对称振动	
(2)	曲板	$N_x^0=N_y^0=10^3$	$m=n=1$	4108.7
		$N_x^0=-N_y^0=-10^3$	$m=n=1$	2925.0
		$N_x^0=-N_y^0=10^3$	$m=2$，$n=4$	533.3
		$N_x^0=N_y^0=-10^3$	$m=1$，$n=1$	501.0
		$N_x^0=10^3$　$N_y^0=0$	$m=1$，$n=2$	3020.0
		$N_x^0=-10^3$　$N_y^0=0$	$m=1$，$n=2$	832.7
		$N_x^0=0$　$N_y^0=10^3$	$m=n=1$	3568.2
		$N_x^0=0$　$N_y^0=-10^3$	$m=n=3$	125.2

表 6　剪切临界载荷的比较

		扁壳	
		剪切变形理论	经典理论
(1)	曲板	724.5	746.5
(2)		1142.7	1186.9

注：在表2、3、6中，临界载荷N_{xcr}，N_{ycr}，N_{xycr}的单位为kg/cm. 在表4、5中，固有振动频率(圆频率)ω的单位为rad/sec.

3）对于多层圆柱曲板和圆柱壳(1)—(5)，不论采用扁壳还是非扁壳方程，算得的轴对称失稳临界载荷和横振动固有频率均相同. 对于非轴对称问题，采用扁壳方程要比非扁壳方程算得的临界载荷和横向振动固有频率高0.4—8.6%，与周向半波数n的多少有关. 其中，当出现采用非扁壳方程时$n=4$，扁壳方程$n=6$的情况，相差1.6—8.6%，以采用非扁壳方程较为妥当；当n数较大时，相差较小，为0.5—1.3%，采用扁壳方程已可满足设计需要.

4）对于夹层圆柱壳(6)—(8)，采用经典理论，轴压时扁壳方程比非扁壳方程的临界载荷高2.1—2.7%，侧压时高7.3—8.7%；采用剪切变形理论，轴压时高4.3—5.0%，侧压时高14.5—16.8%. 这说明对于侧压问题$n=6$时，采用扁壳方程比非扁壳方程的临界载荷高7.3—16.8%，以采用非扁壳方程为宜.

5）对于多层圆柱壳(1)，不论采用剪切变形理论还是经典理论，轴对称失稳的临界载荷约为非轴对称失稳临界载荷的2.8倍，而对于多层圆柱壳(2)—(5)，这个比值为0.860—0.987，对于别的铺层情况，这个比值可能还要低些. 这与铺层方式不同所引起的各向异性因素不同有关. 和各向同性圆柱壳在轴压下轴对称失稳与非轴对称失稳时的最小临界载荷相等的情况有明显的不同. 在设计时必须同时计算轴对称失稳和非轴对称失稳两种情况.

6）对于加筋曲板(9)—(12)，不论是轴向加筋还是环向加筋，受轴压还是侧压，外加筋曲板的临界载荷均高于内加筋曲板的临界载荷，这是和以往文献上见到的金属加筋曲板的情况一致的．对于本文所选用的参数，内、外加筋曲板相应的结果相比，差别不大．当参数改变时，两者的差别有可能变大．

7）对于多层圆柱曲板(1)和(2)，两者间仅铺层角度不同，±45°铺层所能承受的剪切临界载荷，在采用剪切变形理论时要比正交铺层高57.7％，采用经典理论时要高59.0％．这说明铺层的合理与否对承载能力有很大的影响；也说明存在着以铺层角度为自变量，曲板的剪切临界载荷为目标函数的无约束优化问题．

8）对于多层圆柱壳(1)—(3)，它们间的差别也仅是铺层情况的不同．以采用扁壳的剪切变形理论的计算为例，在轴压下轴对称失稳和非轴对称失稳最低的临界载荷之比为907.8:892.6:998.5＝1:0.983:1.100，以±22.5°的铺层即圆柱壳(3)为好；在侧压下临界载荷之比为309.9:327.9:173.3＝1:1.058:0.559，以±45°铺层的圆柱壳(2)为好．这说明对于轴压和侧压问题，也存在着无约束优化的问题，需分别研究．

9）从表4中可以看到，对于多层圆柱曲板和圆柱壳(1)，考虑转动惯量I和不考虑I的情况相比，横向振动固有频率仅低0.1％，因此I的影响可以略去．从表4还可看到，有预应力与没有预应力的情况相比，圆柱曲板与圆柱壳的横向振动固有频率有显著改变．当预应力为拉应力时，振动频率升高，为压应力时，振动频率降低．周向薄膜力的影响要比轴向薄膜力的影响大．

参 考 文 献

〔1〕王震鸣、刘国玺、吕明身，各向异性多层扁壳的大挠度方程，应用数学和力学，3，1(1982)，49—65．

〔2〕王震鸣、戴浩陵，正交各向异性的多层、夹层和加筋扁壳的弯曲、稳定和振动，力学学报，5(1983)，480—492.

〔3〕Vinson J. R. and chou T. W., Composite Materials and Their Use in Structures (1975), 320.

〔4〕Jones R. M., Mechanics of Composite Materials (1975), 246.

STABILITY AND VIBRATION OF LAMINATED, SANDWICHED AND STIFFENED CYLINDRICAL PANELS

Wang Zhen-ming　Dai Fu-ling　Lu Ming-shen

(Institute of Mechanics, Academia Sinica)

Abstract

In this paper, critical loads and natural frequencies are calculated for simply supported orthotropic laminated, sandwiched and stiffened rectangular cylindrical panels. The following problems are calculated and discussed: the critical loads of the shells under axisymmetrical and asymmetrical buckling; the buckling loads and the natural frequencies of the panels and shells under the action of membrane forces Nx and Ny, the buckling loads of the stiffened panels with the stiffeners outside or inside and the influences of transverse shear deformations and different lay-up of the panels and shells on their critical loads.