

弱引力场中活塞运动的球对称解

唐泽眉

(中国科学院力学研究所)

提要 本文研究在弱引力场中活塞球对称运动的气体动力学过程。取特征重力逃逸速度与流体质点运动特征速度之比为小参数展开。零级近似是活塞运动的普通气体动力学球对称问题。一级近似表明了引力场的影响。数值结果给出了活塞与激波间的流场。对强激波给出了分析解。分析讨论了本结果与平面活塞及柱对称解的差别，以及球对称条件下引力场的影响。

一、引言

天体物理中存在着大量爆发现象，例如日冕瞬变，超新星爆发等。这些现象都发生在恒星周围的大气中，其过程均受到恒星引力场的影响，因此研究恒星引力场对气体非定常运动的影响具有普遍意义。

最近胡文瑞提出用活塞过程来描述日冕瞬变现象，用特征方法讨论了太阳重力场中的非定常流动^[1]。并讨论了在弱引力场中的平面活塞运动，在直角坐标系中给出了一维活塞运动的分析解^[2]，并给出了柱对称条件下的数值解。天体中的爆发过程是在恒星大气空间中发生的，因此我们有必要进一步研究在弱引力场中活塞运动的球对称解，这种解更具有典型意义。

以球对称活塞沿径向向与引力相反方向的匀速运动来模拟天体中的某些爆发现象。以特征重力逃逸速度与特征流体质点运动速度之比为小参数将流体力学方程组展开，按零级近似及一级近似分别求解。相应于三种产生不同激波强度的活塞运动进行数值研究，找出符合初条件及激波间断条件的零级及一级近似解。对 $a_0/N^{(0)} = 1/4$ 的强激波按级数解法所得到的分析解与数值结果是一致的。由于球对称运动和引力场作用，激波强度将要减弱。

二、基本方程及弱引力场近似

研究恒星周围大气中的活塞匀速，球对称运动，采用球坐标系，取恒星中心为坐标原点， x 沿恒星半径方向，在球对称条件下，引入声速 $a = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$ ，考虑活塞与激波之间为等熵流动，可将一维非定常流体力学方程组简化为：

$$\frac{\partial a}{\partial t} + v \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\gamma - 1}{2} a \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{2v}{x} \right) = 0 \quad (2.1)$$

本文于1982年6月23日收到。

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{2}{\gamma-1} a \frac{\partial a}{\partial x} = -\frac{GM}{x^2} \quad (2.2)$$

式中 G 为引力常数, M 为恒星质量, γ 取为 $5/3$. 取活塞运动速度 v_p 为特征速度, 恒星半径 x_* 为特征长度, 可将上述方程的无量纲形式写为:

$$\frac{\partial a}{\partial t} + v \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\gamma-1}{2} a \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{2v}{x} \right) = 0 \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{2}{\gamma-1} a \frac{\partial a}{\partial x} = -\frac{v_*^2}{v_p^2 x^2} \quad (2.4)$$

式中 $v_*^2 = \frac{GM}{x_*}$, v_* 为特征逃逸速度. 当某种爆发过程的特征速度 v_p 大到使 $\varepsilon = \frac{v_*^2}{v_p^2}$ 是小量时, 可将方程中各量按小参数展开.

$$v = v^{(0)} + \varepsilon v^{(1)} + \dots, \quad a = a^{(0)} + \varepsilon a^{(1)} + \dots$$

零级近似方程为:

$$\frac{\partial a^{(0)}}{\partial t} + v^{(0)} \frac{\partial a^{(0)}}{\partial x} + \frac{\gamma-1}{2} a^{(0)} \left(\frac{\partial v^{(0)}}{\partial x} + \frac{2v^{(0)}}{x} \right) = 0 \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial v^{(0)}}{\partial t} + v^{(0)} \frac{\partial v^{(0)}}{\partial x} + \frac{2}{\gamma-1} a^{(0)} \frac{\partial a^{(0)}}{\partial x} = 0 \quad (2.6)$$

一级近似方程为:

$$\begin{aligned} \frac{\partial a^{(1)}}{\partial t} + v^{(0)} \frac{\partial a^{(1)}}{\partial x} + \frac{\gamma-1}{2} a^{(0)} \left(\frac{\partial v^{(1)}}{\partial x} + \frac{2v^{(1)}}{x} \right) + v^{(1)} \frac{\partial a^{(0)}}{\partial x} \\ + \frac{\gamma-1}{2} a^{(1)} \left(\frac{\partial v^{(0)}}{\partial x} + \frac{2v^{(0)}}{x} \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v^{(1)}}{\partial t} + v^{(0)} \frac{\partial v^{(1)}}{\partial x} + \frac{2}{\gamma-1} a^{(0)} \frac{\partial a^{(1)}}{\partial x} + v^{(1)} \frac{\partial v^{(0)}}{\partial x} \\ + \frac{2}{\gamma-1} a^{(1)} \frac{\partial a^{(0)}}{\partial x} = -\frac{1}{x^2} \end{aligned} \quad (2.8)$$

根据量纲分析有:

$$a^{(0)} = a^{(0)}(\xi), \quad v^{(0)} = v^{(0)}(\xi), \quad a^{(1)} = a^{(1)}(\xi, t), \quad v^{(1)} = v^{(1)}(\xi, t), \quad \xi = \frac{x}{t}$$

$$\text{取} \quad a^{(1)}(\xi, t) = \frac{1}{t} g(\xi), \quad v^{(1)}(\xi, t) = \frac{1}{t} f(\xi) \quad (2.9)$$

则零级及一级近似方程可表示为:

$$[v^{(0)}(\xi) - \xi] \frac{da^{(0)}(\xi)}{d\xi} + \frac{\gamma-1}{2} a^{(0)}(\xi) \left[\frac{dv^{(0)}(\xi)}{d\xi} + \frac{2v^{(0)}(\xi)}{\xi} \right] = 0 \quad (2.10)$$

$$[v^{(0)}(\xi) - \xi] \frac{dv^{(0)}(\xi)}{d\xi} + \frac{2}{\gamma-1} a^{(0)}(\xi) \frac{da^{(0)}(\xi)}{d\xi} = 0 \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} v^{(0)}(\xi) g'(\xi) + \frac{\gamma-1}{2} a^{(0)}(\xi) f'(\xi) - \xi g'(\xi) - g(\xi) + (\gamma-1) \frac{a^{(0)} f(\xi)}{\xi} \\ = - \left\{ f(\xi) \frac{da^{(0)}(\xi)}{d\xi} + \frac{\gamma-1}{2} g(\xi) \left(\frac{dv^{(0)}(\xi)}{d\xi} + \frac{2v^{(0)}(\xi)}{\xi} \right) \right\} \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned}
 & v^{(0)}(\xi)f'(\xi) + \frac{2}{\gamma-1} a^{(0)}(\xi)g'(\xi) - g'(\xi) - f(\xi) \\
 &= -\frac{1}{\xi^2} - f(\xi) \frac{dv^{(0)}(\xi)}{d\xi} - \frac{2g(\xi)}{\gamma-1} \frac{da^{(0)}(\xi)}{d\xi}
 \end{aligned} \quad (2.13)$$

三、初条件及激波条件

对匀速活塞运动问题,初条件取为:

$$v^{(0)}(1) = 1 \quad (3.1)$$

由(2.9)式导出:

$$f(1) = 0 \quad (3.2)$$

$a^{(0)}(1)$ 及 $g(1)$ 由激波条件决定,某一确定的 $a^{(0)}(1)$ 、 $g(1)$ 值与一定强度的激波对应.此外,问题的解要满足激波面上的动力学条件.假定未受活塞扰动的激波前区域,气体处于静止均匀状态,以下标“0”表示,以“s”表示激波后参量,根据激波守恒关系有:

$$v_s = \frac{2}{\gamma+1} \frac{1}{N} (N^2 - a_0^2) \quad (3.3)$$

$$p_s = p_0 + \frac{2\rho_0}{\gamma+1} (N^2 - a_0^2) \quad (3.4)$$

$$\rho_s = \frac{\rho_0}{\left[\frac{\gamma-1}{\gamma+1} + \frac{2}{\gamma+1} \left(\frac{a_0}{N} \right)^2 \right]} \quad (3.5)$$

N 为激波传播速度.将 v 、 p 、 ρ 、 N 对 ε 展开,零级近似为:

$$v_s^{(0)} = \frac{2}{\gamma+1} \frac{1}{N^{(0)}} (N^{(0)2} - a_0^2) \quad (3.6)$$

$$p_s^{(0)} = p_0 + \frac{2\rho_0}{\gamma+1} (N^{(0)2} - a_0^2) \quad (3.7)$$

$$\rho_s^{(0)} = \frac{\rho_0}{\left[\frac{\gamma-1}{\gamma+1} + \frac{2}{\gamma+1} \left(\frac{a_0}{N^{(0)}} \right)^2 \right]} \quad (3.8)$$

一级激波关系为:

$$v_s^{(1)} = \frac{2}{\gamma+1} \frac{1}{N^{(0)}} (N^{(0)2} + a_0^2) \frac{N^{(1)}}{N^{(0)}} \quad (3.9)$$

$$p_s^{(1)} = \frac{4\rho_0}{\gamma+1} N^{(0)} N^{(1)} \quad (3.10)$$

$$\rho_s^{(1)} = \frac{\frac{4}{\gamma+1} \left(\frac{a_0}{N^{(0)}} \right)^2 \rho_0}{\left[\frac{\gamma-1}{\gamma+1} + \frac{2}{\gamma+1} \left(\frac{a_0}{N^{(0)}} \right)^2 \right]^2} \frac{N^{(1)}}{N^{(0)}} \quad (3.11)$$

又因 $a = \left(\frac{\gamma p}{\rho} \right)^{1/2}$ 则有

$$a^{(0)} = \left(\frac{\gamma p^{(0)}}{\rho_0} \right)^{1/2} \quad (3.12)$$

$$a^{(1)} = \frac{a^{(0)}}{2} \left[\frac{p^{(1)}}{p^{(0)}} - \frac{\rho^{(1)}}{\rho^{(0)}} \right] \quad (3.13)$$

将 (3.7)、(3.8) 代入 (3.12) 中, 有:

$$a_s^{(0)} = \left\{ \left[\left(\frac{a_0}{N^{(0)}} \right)^2 + \frac{2\gamma}{\gamma+1} \left(1 - \left(\frac{a_0}{N^{(0)}} \right)^2 \right) \right] \times \left[\frac{\gamma-1}{\gamma+1} + \frac{2}{\gamma+1} \left(\frac{a_0}{N^{(0)}} \right)^2 \right] \right\}^{1/2} N^{(0)} \quad (3.14)$$

将 (3.7)、(3.8)、(3.10)、(3.11) 代入 (3.13) 中, 有

$$a_s^{(1)} = \frac{a_s^{(0)}}{2} \left[\frac{4\gamma}{(\gamma+1) \left(\frac{a_0}{N^{(0)}} \right)^2 + 2\gamma \left[1 - \left(\frac{a_0}{N^{(0)}} \right)^2 \right]} - \frac{4 \left(\frac{a_0}{N^{(0)}} \right)^2}{(\gamma-1) + 2 \left(\frac{a_0}{N^{(0)}} \right)^2} \right] \frac{N^{(1)}}{N^{(0)}} \quad (3.15)$$

四、解 法

当活塞以不同速度在静止均匀 a_0 场中运动时将产生不同强度的激波, 取 $a_0/N^{(0)} = 1/4, 1/2, 3/4$ 三种情况进行数值研究. 对所取的 $a_0/N^{(0)}$ 值, 按 (3.6) 及 (3.14) 式可求得其比值 $\alpha^{(0)} = \frac{v_s^{(0)}}{a_s^{(0)}}$. 计算得出在激波面后满足 $\alpha^{(0)} = \frac{v_s^{(0)}}{a_s^{(0)}}$, $N^{(0)}(\xi_s) = \xi_s$ 的 $a^{(0)}(1)$ 值及活塞与激波面之间的流场, 即是所求的零级近似解. 然后将此结果代入一级近似方程中求解. (2.12)、(2.13) 及初条件可表示为:

$$L_1(f, g) = 0 \quad (4.1)$$

$$L_2(f, g) = -\frac{1}{x^2} \quad (4.2)$$

$$f(1) = 0, \quad g(1) = c$$

一阶关系是线性的, 其解可以是下列二问题解的叠加:

$$\begin{cases} L_1(f_1, g_1) = 0 \end{cases} \quad (4.3)$$

$$\begin{cases} L_2(f_1, g_1) = -\frac{1}{x^2} \end{cases} \quad (4.4)$$

$$f_1(1) = 0; \quad g_1(1) = 0$$

$$\begin{cases} L_1(f_2, g_2) = 0 \end{cases} \quad (4.5)$$

$$\begin{cases} L_2(f_2, g_2) = 0 \end{cases} \quad (4.6)$$

$$f_2(1) = 0; \quad g_2(1) = 1$$

则一级近似方程 (4.1)、(4.2) 的解为:

$$f = f_1 + cf_2; \quad g = g_1 + cg_2$$

式中 c 为某一常数, 由一阶激波关系决定. 在激波面上有

$$f_1(\xi_s) + cf_2(\xi_s) = \alpha^{(1)} [g_1(\xi_s) + cg_2(\xi_s)] \quad (4.7)$$

式中 $\alpha^{(1)} = \frac{v_s^{(1)}}{a_s^{(1)}}$, 按 (3.9)、(3.15) 式决定. 从 (4.7) 式有:

$$c = \frac{f_1(\xi_s) - \alpha^{(1)} g_1(\xi_s)}{\alpha^{(1)} g_2(\xi_s) - f_2(\xi_s)} \quad (4.8)$$

五、结果与讨论

1. 数值结果:

图 1—图 3 分别绘出了相应于激波强度 $a_0/N^{(0)} = 1/4, 1/2, 3/4$ 的零级近似结果, 图 4—图 6 为一级近似流场, 这些结果按 $a_0 = 1$ 换算, 列于表 1 中.

表 1

$N^{(0)}$	k	0				1							
		$a^{(0)}(1) = a^{(0)}(\xi_s)$	$\Delta a^{(0)}$	$v^{(0)}(1) = v^{(0)}(\xi_s)$	$\Delta v^{(0)}$	$a^{(0)}(1)$	$a_s^{(0)}$	$\Delta a^{(0)}$	$\frac{\Delta a^{(0)}}{a^{(0)}(1)}$	$v^{(0)}(1)$	$v^{(0)}(\xi_s)$	$\Delta v^{(0)}$	$\frac{\Delta v^{(0)}}{v^{(0)}(1)}$
4.0		2.421	0	2.813	0	2.360	2.302	0.058	2.46%	3.322	2.696	0.626	18.8%
2.0		1.441	0	1.125	0	1.423	1.377	0.046	3.23%	1.511	1.084	0.427	28.3%
1.3		1.151	0	0.437	0	1.149	1.096	0.053	4.61%	0.816	0.419	0.397	48.7%

$N^{(0)}$	k	2							
		$a^{(0)}(1)$	$a_s^{(0)}$	$\Delta a^{(0)}$	$\frac{\Delta a^{(0)}}{a^{(0)}(1)}$	$v^{(0)}(1)$	$v_s^{(0)}$	$\Delta v^{(0)}$	$\frac{\Delta v^{(0)}}{v^{(0)}(1)}$
4.0		2.377	2.297	0.0798	3.36%	3.540	2.687	0.853	24.1%
2.0		1.444	1.382	0.0622	4.31%	1.669	1.088	0.581	34.8%
1.3		1.170	1.095	0.0749	6.4%	0.978	0.417	0.561	57.4%

2. 强激波条件下的级数解:

从表中数据可知, 在 $a_0/N^{(0)} = 1/4$ 的强激波条件下, 激波面 (ξ_s) 与活塞面 ($\xi_s = 1$) 的 ξ 差值很小, 因此将其间流场 $v(\xi)$ 、 $a(\xi)$ 在活塞面处展开, 求级数解, 零级近似取,

$$v^{(0)}(\xi) = e_0 + e_1(\xi - 1) + e_2(\xi - 1)^2 \quad (5.1)$$

$$a^{(0)}(\xi) = b_0 + b_1(\xi - 1) + b_2(\xi - 1)^2 \quad (5.2)$$

按方程 (2.10)、(2.11), 根据初条件 (3.1) 取 $e_0 = 1$. 比较 ξ 同次幂系数可得:

$e_1 = -2$; $e_2 = 3$; $b_1 = 0$; $b_2 = -\frac{1}{b_0}$, 其中 b_0 为一常数, 由零级激波关系决定. 在激波面处 $\xi_s = N^{(0)}$, 从 (3.6) 及 (5.1) 式有:

$$v_s^{(0)} = \frac{2}{\gamma + 1} \frac{1}{\xi_s} (\xi_s^2 - a_0^2) \quad (5.3)$$

从 (5.3) 式解得 $\xi_s = 1.128$ 与数值结果 1.130 十分接近. 考虑 (3.14)、(5.2) 式可解得

$$b_0 = 0.706.$$

图 1 中的虚线表示按级数解所得结果和数值结果比较, 最大相对误差小于 5%.

一级近似: 将 (5.1)、(5.2) 式代入 (2.12)、(2.13) 中取

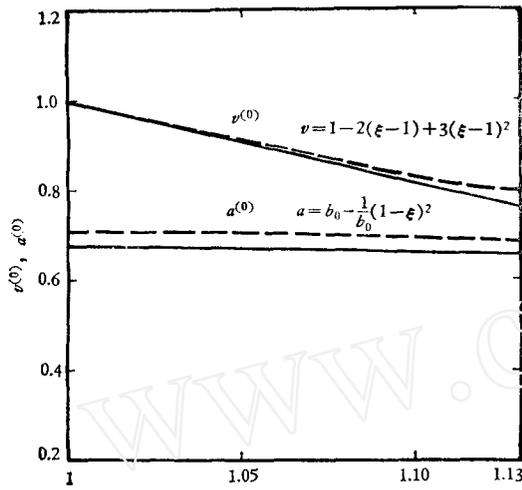


图 1 活塞与激波间流场 ($a_0/N^{(0)} = \frac{1}{4}$)

—数值解 ---分析解

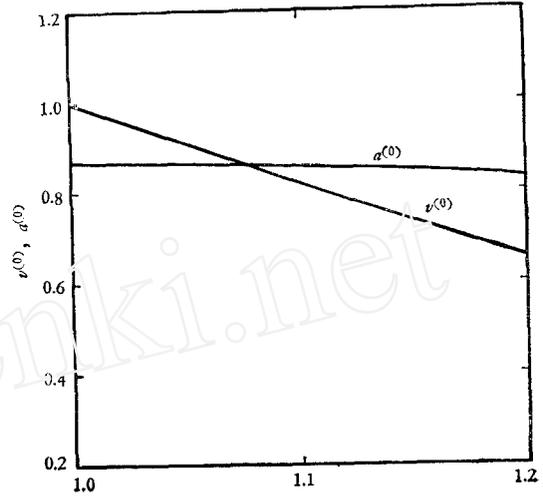


图 2 活塞与激波间流场 ($a_0/N^{(0)} = \frac{1}{2}$)

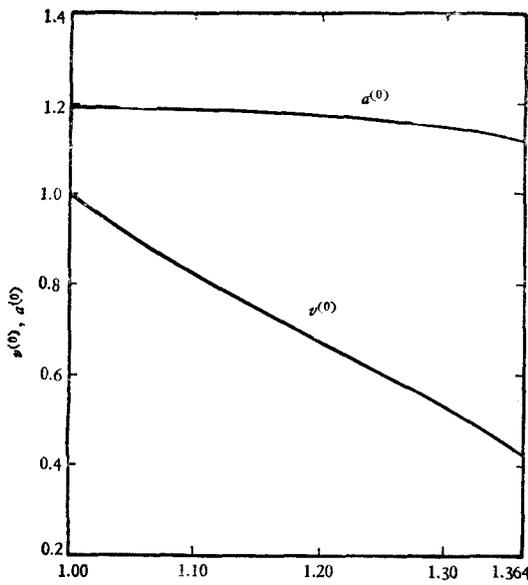


图 3 活塞激波间流场 ($a_0/N^{(0)} = \frac{3}{4}$)

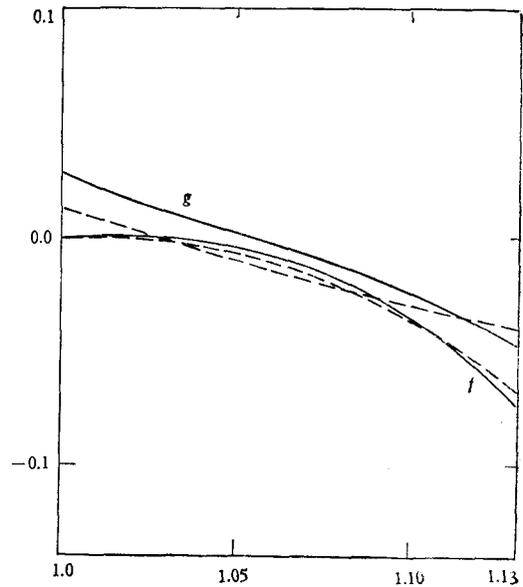


图 4 活塞与激波间 f, g 分布 ($a_0/N^{(0)} = \frac{1}{4}$)

—数值解, ---分析解

$$\begin{cases} f_1 = c_{01} + c_{11}(\xi - 1) + c_{21}(\xi - 1)^2 & (5.4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} g_1 = d_{01} + d_{11}(\xi - 1) + d_{21}(\xi - 1)^2 & (5.5) \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_{01} = 0; d_{01} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_2 = c_{02} + c_{12}(\xi - 1) + c_{22}(\xi - 1)^2 & (5.6) \end{cases}$$

$$\begin{cases} g_2 = d_{02} + d_{12}(\xi - 1) + d_{22}(\xi - 1)^2 & (5.7) \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_{02} = 0; d_{02} = 1, \end{cases}$$

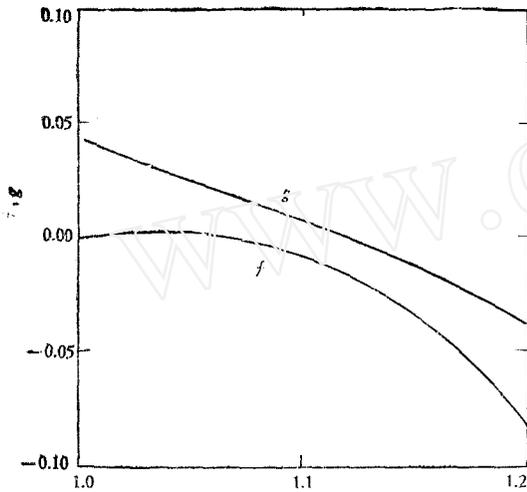


图 5 活塞与激波间 f, g 分布
 $(a_0/N^{(0)} = \frac{1}{2})$

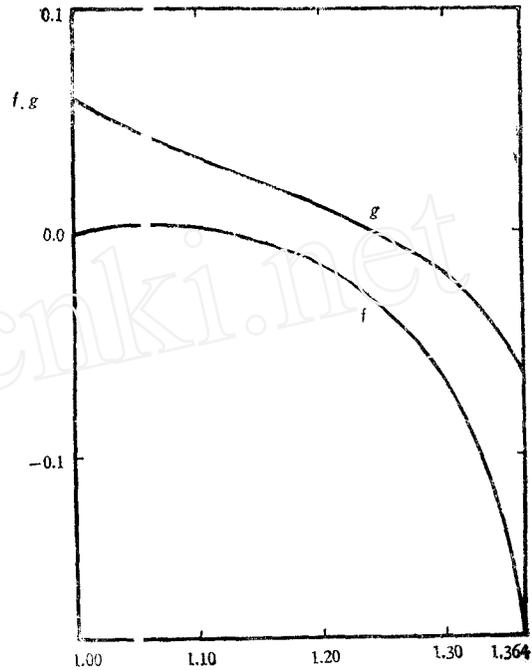


图 6 活塞与激波间 f, g 分布
 $(a_0/N^{(0)} = \frac{3}{4})$

分别将 $f_1, g_1; f_2, g_2$ 及相应的初条件代入一阶方程组 (2.12)、(2.13) 中, 有

$$\begin{cases} f_1 = -4.013(\xi - 1)^2 \\ g_1 = -0.472(\xi - 1) + 0.472(\xi - 1)^2 \\ f_2 = 4.249(\xi - 1) - 8.26(\xi - 1)^2 \\ g_2 = 1 - 0.427(\xi - 1) + 8.5(\xi - 1)^2 \end{cases}$$

从 (3.9)、(3.15) 式之比求得 $\alpha_i^{(1)} = 1.5401$, 再从 (4.8) 式得出 $c = 0.001234$. 将得出的 f, g 值绘在图 4 上, 以虚线表示, 和数值结果相当好地一致.

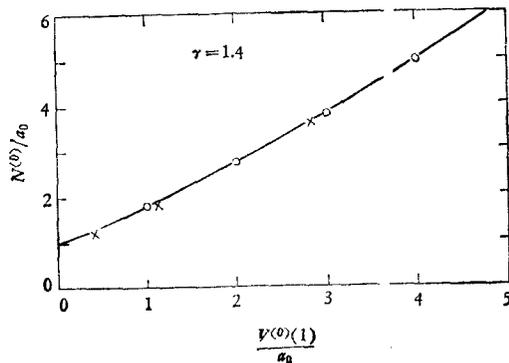


图 7 激波传播速度与活塞运动速度的关系
 \times ——本计算结果, \circ ——Седов 的结果

图 7 给出活塞运动速度与激波传播速度 $N^{(0)}$ 的关系, 若将数值结果按 $\gamma = 1.4$ 换算, 与谢道夫的结果一致^[3].

3. 讨论

计算结果表明, 在弱引力场中活塞球对称运动的零级及一级近似解与平面活塞运动及活塞柱对称问题解的变化趋势是一致的. 若取 a_0 为 1, 从图 7 可看出活塞运动速度越快, 激波的强度越大, 传播速度越快, $a_0/N^{(0)}$ 值越小, 级数解结果越接近于数值解. 活塞运动的速度越快, 对应的活塞面上声速值 $a^{(0)}(1)$ 也就越大. 图 4—图 6 的一级近似流场反映了引力场的影响, 引力场对球对称活塞运动的影响与平面及柱面活塞运动中的情况相似, 活塞前被压缩的流体质点减少内能克服引力做功. 流体质点的运动速度开始略有增加, 之后减少, 在接近激波处下降很快. 引力将使激波强度及传播速度减少, 活塞运动速度越少, 激波越弱, 引力对流体运动的影响也就越大, 这就是为什么在图 6 中 f 、 g 较图 4 中下降得快的原因.

计算结果也表明了球对称运动解与平面、柱面活塞运动的差别. $k = 0, 1, 2$ 的三种情况进行比较, 若要产生相同强度的激波, 在球对称活塞运动中, 活塞需要维持较高的运动速度, 三者相应的声速 $a^{(0)}(1)$ 值却变化不大. 从表中可看出若要产生同样强度的激波, 平面活塞运动的 $\Delta v^{(0)}$ 及 $\Delta a^{(0)}$ 值为零, 球对称活塞则有最大的 $\Delta v^{(0)}$ 、 $\Delta a^{(0)}$ 值. 这是因为要使活塞前逐渐扩大体积中的流体质点压缩, 主要靠消耗流体质点的动能来实现, 内能虽有减少但变化不大. 激波越弱, $v^{(0)}(1)$ 越小则 $\Delta v^{(0)}$ 与 $v^{(0)}(1)$ 的比值越大. 图 4—图 6 的一级近似流场, 与平面、柱面活塞运动有区别. 作用在单位质量流体上的引力仅与恒星质量 M 及距离 x 有关, 而与平面、柱面、球面对称运动无关. 因此在 $k = 0, 1, 2$ 三种情况中, 对相同的激波强度得出的 f 、 g 值的变化, 是由零级近似流场不同所引起的.

综上所述: 球对称活塞运动为压缩活塞前不断扩大空间中的流体质点, 主要是消耗活塞前流体的动能, 内能虽有降低, 但变化不大. 这表现为从活塞面到激波面零级流速减小, 因而激波强度减弱. 一级近似给出了引力场的影响, 流体质点将减少其内能及动能, 用于克服引力做功, 引力将减少激波强度及激波传播速度.

作者感谢胡文瑞同志的指导.

参 考 文 献

- [1] Hu, W. R., XXIV Plenary Committee on Space Research, (1982) p. 39. Ottawa.
- [2] 胡文瑞, 应用数学与力学, 2 (1984).
- [3] Седов, Л. И., 力学中的相似方法与量纲理论, 科学出版社(1982).

THE SPHERIC-SYMMETRICAL SOLUTION OF A PISTON MOVING IN WEAK FIELD OF GRAVITATION

Tang Zemei

(Institute of Mechanics, Academia Sinica)

Abstract

This paper deals with the gasdynamic process of the spherical piston in a weak field of gravitation. The basic equations can be expanded in terms of a small parameter representing the ratio of the characteristic velocity of the fluid to the escape velocity. The zeroth order approximation of these equations corresponds to the gravity free gasdynamic problem. The first order approximation shows the influence of gravity on the process of spherical piston. The flow field between piston and shock is obtained by numerical calculation. The analytical solution is derived for strong shock. The difference among plane, cylindrical and spherical piston and the influence of gravity on sphericsymmetrical piston are discussed in this paper.