

非线性流动稳定性理论

中国科学院力学研究所 李家春

流体的湍流运动普遍存在于大气、海洋、飞行器周围、推进装置和流体机械中，探讨湍流形成的条件和过程是流动稳定性理论的研究对象^[1-6]。

早在1843年，Stokes就预见到流体状态转换的原因是失稳。整整100年前(1883年)，Reynolds^[7]让液体流入不同口径的圆管，并在对称轴上注入一股纤细的颜色水，以便明显、敏感地观察到湍流的发生。他发现：

(1) 流速较低时，可以看到层次分明的层流，流速增加到一定程度后，就转变成高度无序的湍流状态；

(2) 决定流动状态的主要参数是雷诺数，仅当它超过某一临界值 R_c 时，才会发生湍流；

(3) 临界雷诺数 R_c 的大小还同流动所受扰动的程度(如湍流度、管壁粗糙度等)有关，其数值可以从2300一直延伸到40000左右；

(4) 当雷诺数超过临界值时，先在局部地区猝发间歇性的湍流斑，此后，随着区域的扩大，间歇时间缩短，逐渐形成完全发展的湍流。

Reynolds的实验揭示了过渡现象的基本规律。我们知道，圆管中的Hagen-Poiseuille流对于线性扰动是稳定的，只有运用了近20年来发展起来的流动稳定性的非线性理论以后，才使上述的实验事实得到了比较圆满的解释。

笔者认为，流动稳定性理论研究的整100年时间，大致可以分为两个阶段：

(1) 1883—1960年，这前80年主要是线性理论发展阶段。在这一时期，由于受认识水平、数学方法和实验技术的限制，人们只能在小扰动的假定下作线性近似，并因袭以往的简正模(normal mode)方法来进行分析。林家翘^[5]和Chandrasekhar^[6]分别用渐近方法和变分方法解决了平面Poiseuille流、Bénard对流，同心圆柱间的Couette流等一些基本问题。60年代以后，在线性理论方面的研究主要是进一步完善上述工作，如求Orr-Sommerfeld方程的一致有效渐近解；本征值谱及本征函数系完备性的理论研究；非平行流效应等^[8-12]。此外，由于电子计算的更新，数值方法也取得了很大进展^[13-18]。

(2) 1960年以来，非线性理论的研究蓬勃开展，然而，在这方面有开创性的见解是Landau在40年代提出来的。非线性理论发展的主要原因是由于线性理论存在着明显的缺陷：它的结果同扰动振幅无关；失稳以后，振幅将永远以指数律增长，这是与实际情况不符的；对于从层流到湍流的两种过渡方式和对小扰动呈绝对稳定的平面Couette流、Hagen-

Poiseuille 流中出现湍流的现象，也不是用线性理论所能解释的。当然，我们不能因此否定线性理论的意义，它至少描述了湍流发生的初始阶段，它的结论也能定性地说明一些现象。同时，它又是弱非线理论的基本出发点。

本文打算从全局稳定性 (global stability) 和能量法；弱非线性理论和分歧解 (bifurcation)；非线性动力系统和湍流的奇吸引子理论 (Strange attractor) 三个方面来介绍非线性流动稳定性理论的某些进展。我们着重说明其基本思想和数学方法。为了避免过多地纠缠于数学细节，常常采用模型方程来说明问题。

一、全局稳定性和能量法

研究全局稳定性有能量法和 Liapunov 直接法两种方法，两者没有本质上的区别，

能量法是指通过研究扰动能量的演化来获得流动稳定性判据的方法。由于它未对初始扰动振幅加以限制，因此，可以导出对有限振动扰动全局稳定的结论。能量法的不足之处是，一般说来，它只能得到稳定的充分条件，所以临界雷诺数 R_G 往往要比线性理论的低得多。

Reynolds^[18]，Orr^[20]等早已用能量法来研究流动稳定性的个别问题。50 年代末，Serrin^[21]重新用此方法得到一些有意义的结果，并引起人们对能量法新的兴趣。这里 Reynolds-Orr 能量演化方程

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = - \langle \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{U} \cdot \mathbf{u} \rangle - \frac{1}{R} \langle |\nabla \mathbf{u}|^2 \rangle \quad (1.1)$$

是具有根本重要意义的。式中 $\varepsilon = -\frac{1}{V} \int \frac{1}{2} \mathbf{u}^2 dV$ ，是扰动能量。由于

$$\langle \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{U} \cdot \mathbf{u} \rangle = \langle u_i D_{ii} u_i \rangle \quad (1.2)$$

这里 $D_{ii} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_i} + \frac{\partial U_i}{\partial x_i} \right)$ 是速度形变张量， $\langle \cdot \rangle = \frac{1}{V} \int \cdot dV$ 代表体积平均值。方程

(1.1) 具有明显的物理意义：扰动能量的变化率等于主流通过雷诺应力作功传递给扰动的能量同粘性耗散的能量之差。由此可见，纵使存在着粘性，在一定的条件下，扰动依然可以增长而使流动失稳。

Joseph^[3]从能量演化方程出发证明了能量稳定性原理^[22, 23]：若 $R < R_e$ ，则 Navier-Stokes 方程的解是全局单调稳定的。这里

$$\frac{1}{R_e(v, t)} = \max \left\{ - \int u_i D_{ii}(v, t) u_i dV / \int |\nabla \mathbf{u}|^2 dV \right\} \quad (1.3.1)$$

$$R_e = \sup_{t \geq 0} R_e(v, t) \quad (1.3.2)$$

注意到 (1.3.1) 中分子分母的齐次性质，就可看出结果与扰动振幅无关。对于非牛顿流的情况，能量方程不再是扰动速度的齐次函数，因而只能得出条件稳定的结论。

方程 (1.3.1) 的值可以看作在约束 $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ 下的条件变分问题，其 Euler 方程为

$$u_i D_{ii} = - \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \Delta \mathbf{u}, \quad (i = 1, 2, 3, \dots) \quad (1.4)$$

式中 $\lambda(x)$ 是 Lagrange 乘子， R_e 是该问题的最小本征值。

譬如，对于平面 Couette 流， $U(z) = z$ ($-1 \leq z \leq 1$)。Joseph^[22] 还证明了在最小本值时，扰动的形式为 $u_i = u'_i(z)e^{i\beta y}$, $\lambda = \lambda'(z)e^{i\beta y}$ 。这样一来，上述方程就转化为关于垂直速度分量的单一微分方程

$$(D^2 - \beta^2)^3 w = -\frac{1}{4} \beta^2 \rho^2 w \quad (1.5)$$

边界条件为

$$w = Dw = (D^2 - \beta^2)^2 w = 0, \quad z = \pm 1 \quad (1.6)$$

其中 $D = d/dy$ 。上述方程与上下为固壁的 Bénard 对流的方程形式完全一致，所以其最小本征值为

$$R_c = (1/2)\sqrt{1708} = 20.7 \quad (1.7)$$

也就是说，当 $R < 20.7$ 时，平面 Couette 流是全局稳定的。文献 [24, 25] 用同法得到平面和轴对称 Poiseuille 流的临界雷诺数分别为 40.60 和 81.49。

Liapunov 直接法是能量法的推广，它是用 Liapunov 函数代替原先的能量函数来研究流动全局稳定性的方法。

众所周知，Liapunov 方法在微分方程定性理论和控制论中有着广泛的应用^[26, 27]。但在本世纪上半叶，方法仅局限于有限自由度的情况；直到 50 年代，Zubov^[28] Movchan^[29-31] 才将它推广到连续介质系统；Pritchard^[32] 把 Movchan 定理应用于流动问题；徐硕昌^[33] 又在研究充液腔体旋转稳定性问题时，考虑了 $\infty + 6$ 维自由度的混合系统。这里，我们简述 Pritchard 的一些结果：

定理 1 (Liapunov 稳定性定理) 若定义 ρ, ρ_0 为积分轨线相对于未扰轨线的两个度规 (Metric)， z_1, z_2, \dots, z_n 为问题中有关的物理量，那么在下述条件下：

- (1) $\rho(z_1, z_2, \dots, z_n, t)$ 是 t 的连续函数；
- (2) 对于任意的 $\epsilon > 0$ ，存在 $\delta > 0$ ，使 $\rho_0 < \delta$ 时， $\rho < \epsilon$ ；
- (3) 在 $\rho < R$ 的子域上 (R 为实数)，存在着函数 $V(z_1, z_2, \dots, z_n, t)$ 满足
 - (a) $dV/dt \leq -\gamma(\rho) \leq 0$, γ 为 ρ 的非减函数；
 - (b) $0 < \alpha(\rho) \leq V \leq \beta(\rho)$, 式中 α, β 为 ρ 的非减函数；
 - (c) $V(z_1, z_2, \dots, z_n, t)$ 关于度规 ρ_0 是连续的；那么未扰轨线度规为 ρ, ρ_0 时是渐近稳定的 (这里， ρ, ρ_0 往往可取相同的定义)。

定理 2 考虑度规 ρ 及函数 $V(z_1, z_2, \dots, z_n, t)$ 满足

- (1) V, ρ 是 t 的连续可微函数；
- (2) $\alpha\rho^2 \leq V$, 其中 $\alpha > 0$ ；
- (3) $dV/dt \leq H(V)$, 这里 $H(V)$ 是 V 的多项式，其实根已按大小次序沿实轴排列，那么
 - (a) 若 $H(V_0) \geq 0$ ，则 $\rho^2 \leq V_L/\alpha$ ；
 - (b) 若 $H(V_0) < 0$ ，则 $\rho^2 \leq V_0/\alpha$ 以及当 $t \rightarrow \infty$ 时， $\rho^2 \rightarrow V_L/\alpha$ 或 $\rho^2 < V_L/\alpha$ ；

其中， V_L, V_U 为接近于 V_0 的两个相邻实根，即 $V_L \leq V_0 \leq V_U$ 以及 $V_0 = V(z_1, z_2, \dots, z_n, t_0)$ 。

显然，当 $V_U = +\infty$ 且 $H(V_0) > 0$ 时，该系统是不稳定的； $V_L = 0$ 且 $H(V_0) < 0$ 时，该系统是渐近稳定的。

对于下述模型方程：

$$-\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{R} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u - Ru \int_0^1 u^2 dx - \frac{\partial(u^2)}{\partial x} \quad (1.8)$$

$$u(0) = u(1) = 0$$

规定

$$\rho_0 = \rho = \int_0^1 u^2 dx = V \quad (1.9)$$

在线性化后，用 Rayleigh 不等式可得

$$\frac{dV}{dt} \leq -2 \left(\frac{\pi^2}{R} - 1 \right) \int_0^1 u^2 dx \quad (1.10)$$

所以，由定理 1 可知，当 $R < \pi^2$ 时是渐近稳定的。考虑非线性效应后，可得

$$\frac{dV}{dt} \leq 2RV \left[\frac{1}{R} \left(1 - \frac{\pi^2}{R} \right) - V \right] \quad (1.11)$$

所以，当 $R \leq \pi^2$ 时，系统是渐近稳定的。对于 $R > \pi^2$ 的情况，由定理 2 知道：当 $0 \leq V^0 < \frac{1}{R} \left(1 - \frac{\pi^2}{R} \right)$ 时， $\rho \leq \left[\frac{1}{R} \left(1 - \frac{\pi^2}{R} \right) \right]^{\frac{1}{2}}$ ；当 $V \geq \frac{1}{R} \left(1 - \frac{\pi^2}{R} \right)$ 时， $\rho \leq V^0 \frac{1}{2}$ ，且在 $t \rightarrow \infty$ 时， $\rho \rightarrow \left[\frac{1}{R} \left(1 - \frac{\pi^2}{R} \right) \right]^{\frac{1}{2}}$ 或 $\rho < \left[\frac{1}{R} \left(1 - \frac{\pi^2}{R} \right) \right]^{\frac{1}{2}}$ 。由此可见，Liapunov 直接法成功的关键在于选择正定、有界、非增的 Liapunov 函数。

Davey, Diprima, Stuart^[35] 用这一方法研究了 Taylor 涡的稳定性。

二、弱非线性理论和分歧解

弱非线性理论研究小的有限振幅扰动的演化。它虽然是在线性理论基础上建立起来的，但非线性效应使它具有完全不同于线性系统的新的特征。

Landau-Hopf 猜想 Landau 是非线性流动稳定性理论的奠基人。本世纪 40 年代^[36]，他凭着敏锐的物理直觉揣想了从层流到湍流的过渡过程：流动超过临界雷诺数后，按照线性理论，扰动幅度将以指数增长，但非线性效应使它稳定在一种新的层流状态，这时，定常流就转变成频率为 ω_1 的周期运动；雷诺数继续增加，上述周期运动失稳使它转变成有 ω_1, ω_2 两个频率成分的新的周期运动，……，当流动中频率成分越来越多时，它就发展成真正的湍流了。从 Landau 的观点来看，湍流是含有各种频率的准周期运动：

$$u(x, t) = \sum_i \sum_p a^{pi} \exp \{ ip(\omega_i t + \beta_i) \} \quad (2.1)$$

与此同时，Hopf^[37, 38] 则从数学上进行考虑，他认为湍流是 Navier-Stokes 方程的解不断发生 Hopf 分歧的结果。他同 Landau 的思想是不谋而合、殊途同归的。

Landau 振幅方程 下面，我们进一步从数学上来阐明 Landau 的思想^[39]。计及非线性效应后，振幅方程必须在线性理论基础上考虑高阶项，其形式应为

$$\frac{d|A|^2}{dt} = 2\sigma|A|^2 - l|A|^4 \quad (2.2)$$

由于对时间的平均，三阶项不出现了。式中

$$\sigma = k(R - R_1) + O\{(R - R_1)^2\} \quad (2.3)$$

k 为由线性理论确定的某一正常数, l 称为 Landau 常数。该方程的显式解为

$$|A|^2 = A_0^2 / \left\{ \frac{l}{2\sigma} A_0^2 + \left(1 - \frac{l}{2\sigma} A_0^2 \right) e^{-2\sigma t} \right\} \quad (2.4)$$

问题的性质就完全取决于 Landau 常数 l 的符号。

(1) 当 $l > 0$ 时, 若 $R < R_L$, 则 $|A| \rightarrow 0$ ($t \rightarrow \infty$);

$$\text{若 } R > R_L, \text{ 则 } |A| \rightarrow \left(\frac{2\sigma}{l} \right)^{\frac{1}{2}} \sim \left[\frac{2k(R - R_L)}{l} \right]^{\frac{1}{2}} (t \rightarrow \infty) \quad (2.5)$$

这是超临界稳定的情况。不管初始扰动为何, 都要趋于平衡振幅 A_e 。当 $\omega_1 \neq 0$ 时可得平衡周期解; 当 $\omega_1 = 0$ 时, 是平衡的定常解, 这时稳定性交换原则成立 (图 2.1a)。

(2) 当 $l < 0$ 时, 若 $R > R_L$, 则 $|A| \rightarrow \infty$;

$$\left. \begin{array}{l} \text{若 } R < R_L, A_0 < A_T = \left(\frac{2\sigma}{l} \right)^{\frac{1}{2}}, \text{ 则 } |A| \rightarrow 0 (t \rightarrow \infty) \\ A_0 > A_T = \left(\frac{2\sigma}{l} \right)^{\frac{1}{2}}, \text{ 则 } |A| \rightarrow \infty (t \rightarrow \frac{1}{2\sigma} \ln \left(1 - \frac{2\sigma}{l A_0^2} \right)) \end{array} \right\} (2.6)$$

(图 2.1b) 这就是说, 当雷诺数小于临界值时, 仅当初始振幅大于某一阈值时, 才出现失稳现象。我们称这种情况为亚临界失稳, 物理学上称它为亚稳态 (metastability)。这时, 还会存在着另一种临界雷诺数 $R_G < R_L$, 仅当 $R < R_G$ 时, 才由这种条件稳定状态变成全局稳定状态。

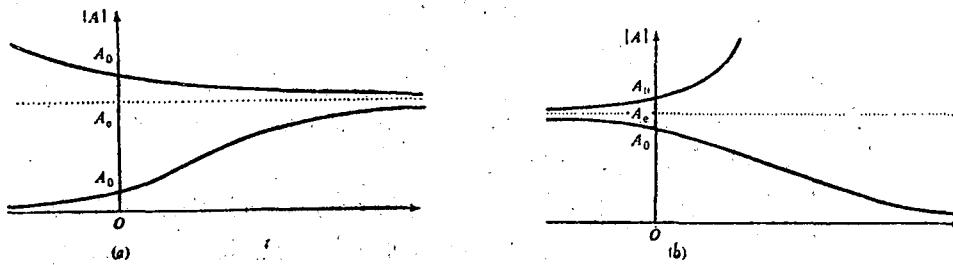


图 2.1

(a) 超临界情况

(b) 亚临界情况

实际上, 令 Landau 方程右端为零即可得平衡解, 由此可以看到解在 $R = R_L$ 处的分歧

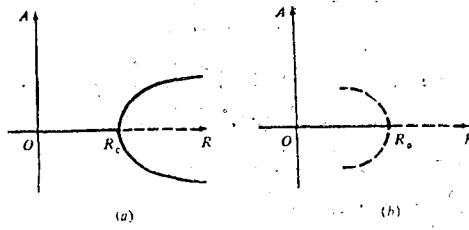


图 2.2 分歧解及其稳定性

(a) 超临界情况 (b) 亚临界情况

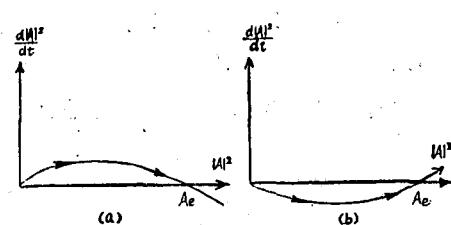


图 2.3 分歧解的稳定性

(a) 超临界情况 (b) 亚临界情况

现象(图2.2)。我们可用通常的线性化方法或由 $|A|^2 - \left(\frac{d|A|^2}{dt}\right)$ 图(图2.3)讨论分歧解的稳定性,其结论是:超临界分歧解是稳定的,亚临界分歧解是不稳定的。

摄动法 它在弱非线性理论中具有重要地位。上面并没有告诉我们如何来求 Landau 方程的方法,运用奇异摄动理论的各种技巧,可以帮助我们确定 Landau 常数,然后才能分析非线性问题的性质。对于模型方程^[40]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sin u = \frac{1}{R} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (2.7.1)$$

$$u = 0 \quad (z = 0, \pi) \quad (2.7.2)$$

显然,线性问题的解为

$$u^L = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp s_n t \sin nz \quad (2.8)$$

式中 $s_n = 1 - (n^2/R)$ 。当 $R \geq R_c = \min n^2 = 1$ 时,线性解是不稳定的。我们假定

$$u_N = A(t) \sin z \quad (\text{当 } R \rightarrow 1 \text{ 时}, A \rightarrow 0) \quad (2.9)$$

并令振幅方程为

$$\frac{dA}{dt} = a_1 A + a_2 A^2 + a_3 A^3 + \dots \quad (2.10)$$

用消除长期项的条件可确定 Landau 方程为

$$\frac{dA}{dt} = (R - 1)A - \frac{1}{8}A^3 \quad (2.11)$$

所以,这是属于超临界的情况。

除了可展开成振幅的幂级数外,也可展开成物理问题中无量纲参数(如雷诺数)的级数,这种方法叫 Liapunov-Schmidt 方法^[41, 42]。

分歧理论 它是研究参数改变时,非线性系统平衡解的性质的理论。这些性质包括:解的个数,分歧点,分歧方向,分歧解的稳定性以及它们同线性问题的关系等,它属于微分方程定性理论的范畴。近 10 年来,运用非线性泛函分析和拓扑学的工具,分歧理论取得了一定进展。除了 Landau 分歧外,还有从定常解到周期解的 Hopf 分歧,分歧曲线图也各不相同,反映了非线性现象是异常复杂的。读者可参看文献 [1—3, 43—46]。

在典型问题中的应用 上述弱非线性理论使人们在研究流动稳定性问题中得到了一些极有意义的结果,我们便在线性理论基础上向前迈进了一大步。

1960 年,Stuart^[47], Watson^[48]提出了确定平面 Poiseuille 流的 Landau 方程的方法,随后, Reynolds & Potter^[49]进行了数值计算。他们发现:在临界模式时($\alpha_c = 1.02$, $R_c = 5772$), Landau 常数是负的,因而是属于亚临界的状况。但在中性曲线的某些部分, Landau 常数也可能是正的。周恒、赵耕夫^[50]用 K-B 方法得到了类似的结论。

对于连续谱的情况, Stewartson & Stuart^[51]进一步考虑了振幅同时也随空间变化的情况,这时,最不稳定模式的振幅方程为

$$\frac{\partial A_1}{\partial t} - \sigma_2 \frac{\partial^2 A_1}{\partial \xi^2} = k A_1 - \frac{1}{2} l A_1 |A_1|^2 \quad (2.12)$$

它同 Landau 方程有某些类似之处。

Davies & White^[52] 用在矩形管中的实验来模拟平面 Poiseuille 流的稳定性，其结论为：当 $R < 100$ 时，涡不能存在；当 $100 < R < 1000$ 时，涡可能存在，但不能长久维持下去；当 $R > 1000$ 时才会形成湍流。所以，这里的 100, 1000 相应于临界值 R_c, R_G ，这在定性上同理论值 $R_G = 2900$ 是一致的。最近，在实验中确实还发现了亚临界失稳的阈值，当 $R = 5000$ 时， u' 约为对称轴上主流值的 1.2%。

文献[54]和[55] 分别研究了关于小扰动绝对稳定的平面 Couette 流，轴对称 Poiseuille 流的非线性稳定性。长期以来，对这两种流动失稳的原因也众说纷纭，亚临界失稳可以解释为什么它们在 $R > 750$ 或 $R > 2300$ 后分别会转变成湍流的疑难。

最近，Grszeg & Kells 用数值方法对各种有限振幅扰动的演化进行了研究^[56]，从而弥补了实验方法不能控制三维扰动的出现和无法消除边壁效应的弊病，所以，可以对二维扰动，三维扰动分别进行讨论。计算结果指出：对于平面 Poiseuille 流，二维扰动的 $R_G = 2800$ ，三维扰动的 $R_G = 1000$ ，这就解决了理论和实验在数值上不一致的矛盾，湍流的提早出现原来是由三维扰动引起的。平面 Couette 流对三维扰动的 R_G 为 1000 左右也是符合实际的；但它对于有限振幅的二维扰动是稳定的，这一问题仍是悬而未决的。

Malkuo & Veronis^[57]，Davey^[58] 研究了 Bénard 对流和同心圆柱间的 Couette 流，它们与平面 Couette 流不同，这些流动都是超临界情况的，所以会形成对流泡、Taylor 涡等现象。除了流场显示外，还可用测量力矩的方法来标志 Taylor 涡的出现。

三、非线性动力系统与湍流的奇吸引子理论

近 10 年来，由于直接讨论 Navier-Stokes 方程的困难，人们往往从研究非线性动力系统来了解湍流的机理。这就是说，这些不含随机因素的确定性微分方程在一定条件下会显示出随机行为来。按照 Ruelle 的观点，所谓“随机行为”，指的是敏感地依赖初始状态^[60, 61]的意思。因而，在数值计算时，它表现为初始条件的微小误差会给解带来明显的差异；在实验时，由于不可避免的外界噪声，实验结果无重复性。

当然，我们应该把会有多种频率成分的有序运动和处于完全混沌（Chaos）状态的无序运动区别开来。凭直觉往往是困难的，我们可以用动力学变量的功率谱来定性地衡量：

$$\tilde{X}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X}) e^{i\omega i} \quad (3.1)$$

$\tilde{X}(\omega)$ 是动力学变量的离散 Fourier 变换， X_i 是等时间间隔的测量值， \bar{X} 为其平均值， $\omega = \frac{2\pi k}{N}$ 。如果 $|\tilde{X}(\omega)|^2$ 只有连续的谱带，没有离散的谱线，我们就认为它处于混沌状态，这样看来，Landau-Hopf 分歧所得到的至多只是含多频率成分的有序运动。

研究的方法是二维相平面方法的推广。为此，对于高维或连续介质系统要引进状态空间（state space）的概念。如果把微分方程的解看作为状态空间的曲线，我们便可称它为轨道（orbit），而状态空间中的点沿着轨道的运动叫解流（solution flow）。如果状态空间中某一轨道邻近出发的所有轨道都收敛于它，那么该轨道就叫吸引子。稳定的奇点、极限环（limit cycle）都是经典的吸引子。下面我们还会具体地看到除此以外的奇吸引子。

从数学上来看，我们认为湍流就是状态空间中的一个或数个奇吸引子。由于奇吸引子上的解流敏感地依赖着初始状态，因而在实际观察时就会显现出随机行为来。

Lorenz 系统^[6.2] 它可以使我们对奇吸引子有一个具体、直观的认识，它是高于二维最简单的非线性系统：

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\sigma x + \sigma y \\ \frac{dy}{dt} &= \gamma x - y - xz \\ \frac{dz}{dt} &= -bz + xy \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

上述方程组可以由很多具体问题（如 Bénard 对流）导得。它具有三个不稳定的平衡解： $z = r - 1$, $x = y = \pm \sqrt{b(r-1)}$ 。数值模拟的结果表明：由原点或中心出发的轨道分别单调地或以振荡方式离开出发点转向一中心，然后再回到另一中心，如此往返不已（图 3.1，上述结果并非数值模拟中的不稳定性产生的，而是系统本身固有的特性）。从空间角度看，它是状态空间中的超曲面，结构十分复杂，这就是奇吸引子的一种，叫 Lorenz 吸引子（图 3.2）。

到目前为止，对奇吸引子的分类、结构和性质了解得很不够，有待于进一步研究。除了 Lorenz 吸引子外，还有 Hénon 吸引子等。

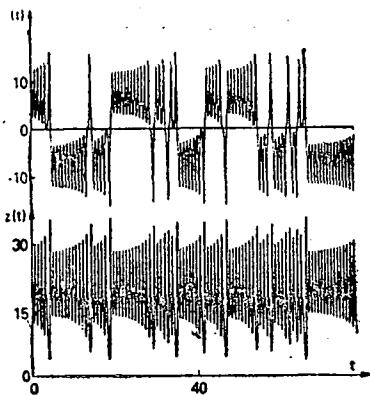


图 3.1 Lorenz 方程的解

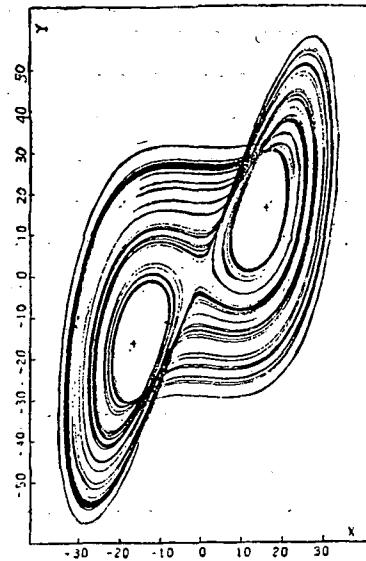


图 3.2 Lorenz 吸引子
(在 XY 平面上的投影)

过渡过程 它是指当物理问题中参数变化时，状态空间中轨道定性性质的变化过程 (scenario)。譬如：Hopf 分歧，Feigenbaum 过渡^[6.4]等。

如果微分方程及其解依赖于某一参数 μ ，且在 $\mu = \mu_c$ 处发生线性不稳定现象。Hopf 分

歧定理告诉我们：解的定性性质应由微分方程在 $\mu = \mu_c$ 处关于状态变量导数的非线函数 d 来确定。当 $d > 0$ 时，在 $\mu > \mu_c$ 处有一吸引的周期轨道，即稳定的非线性振荡；当 $d < 0$ 时，在 $\mu = \mu_c$ 处有一非吸引的周期轨道；而且，当 $\mu \rightarrow \mu_c$ 时，它们的振幅与 $\sqrt{|\mu - \mu_c|}$ 成比例。

Feigenbaum 过渡指的是一系列的分歧过程^[6,4]。当物理参数通过一系列临界值 $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \dots$ 失稳时，相继地发生一系列倍周期分歧(Period doubling bifurcation)，即运动周期由 T_0 变为 $2T_0, 4T_0, \dots, 2^n T_0$ 。而且，发生分歧的参数间的间隔越来越小，直至 $\mu > \mu_\infty$ 时，达到了完全混沌状态。Feigenbaum 过渡不仅描述 Lorenz 系统演变过程，而且也可描述生态、化学系统。令人惊异的是，这些临界值的间距 $\mu_n - \mu_{n-1}$ 以公比 δ 的几何级数规律趋于零， $\delta^{-1} = 4.6692\dots$ 对于所有耗散系统竟是一个普适常数。

耗散系统的统计理论 为了求得某一随机系统的动力学变量，必须采用统计平均的方法。我们知道，对于 Hamilton 系统可用一般的统计力学方法。由于 Birkhoff 的各态经历(ergodic)定理，系统平均值就等于系统的长时间平均值：

$$\overline{D}(x_0) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau dt D(T^t x_0) \quad (3.3)$$

这里， x_0 为初条件， $T^t x_0$ 为从 x_0 出发的解流， D 为相应的动力学变量。显然，上述极限不仅存在，而且与 x_0 无关。

对于耗散系统，由于不满足 Liouville 定理，所以解流在状态空间中是体积收缩的，其概率分布函数也是未知的，主要集中在吸引子附近。这时，动力学变量的长时间平均值是否存在并等于系统的平均值的问题，还有待于进一步研究。如果除了一些特殊轨道外，上述条件能得到满足，那么也称它为各态经历的。在上述意义下，Lorenz 吸引子，满足 Smale 的 Axiom A 的吸引子是各态经历的。

目前，关于奇吸引子理论的研究方兴未艾，引起了人们的普遍关注，但还有待于进一步深入。如：在数学上尚待概括出普遍的规律；在物理上，它仅描述了湍流的时间演化过程，没有描述其空间结构；在实用上还未直接研究 Navier-Stokes 方程本身，更不必说给出临界参数和唯象系数（如：湍流粘性系数）。

综上所述，近 20 年来，非线性流动稳定性理论取得了许多可喜的成果，并正在发展之中，它是应用数学和流体力学工作者广阔的工作园地。除了进一步运用新的数学方法深入研究上述基本问题外，考虑可压缩性、旋转、分层效应和在各种不同介质中的流动稳定性现象，必然会在航空、气象、海洋、化工、受控等方面得到实际应用。

对于谈镐生教授的鼓励和指导，作者谨在此致谢。

参 考 文 献

- 1 Drazin, P., Reid, W., *Hydrodynamic Stability* (1981).
- 2 Swinney, H. L., et al., *Hydrodynamic instability and transition to turbulence*, Topics in Appl. Phys., V. 45 (1981).
- 3 Joseph, D. D., *Stability of Fluid Motion* (1976).
- 4 崔友正, 橫幅擴散, 流動的稳定性理論, 產業圖書株式會社 (1976).
- 5 Lin, C. C., *The Theory of Hydrodynamic Stability* (1955).
- 6 Chandrasekhar, S., *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*, Oxford, Clarendon Press (1961).
- 7 Reynolds, O., *Phil. Trans. Roy. Soc.*, V. 274 (1983).
- 8 曹家春, 力學名著選, V. 3, 4 (1981).
- 9 Lakin, W. D., et al., *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond.*, A289 (1978).
- 10 Grosch, C., Salwen, H., *J. Fluid Mech.*, V. 87 (1978).
- 11 Murdock, J. N., Stewartson, K., *Phys. Fluids*, V. 20 (1977).
- 12 Diprima, R. C., et al., *Arch. Rat. Mech. Anal.*, V. 34 (1969).
- 13 Thomas, L. H., *Phys. Rev.*, V. 91 (1953).
- 14 Grosch, C. E., Salwen, H., *J. Fluid Mech.*, V. 34 (1968).
- 15 Orszag, S. A., *Ibid.*, V. 50 (1971).
- 16 Lee, L. H., Reynolds, W. C., *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, V. 20 (1967).
- 17 曹家春, *应用數學和力学*, V. 3, 5 (1982).
- 18 Gary, J., Helgason, R., *J. Comp. Phys.*, V. 5 (1970).
- 19 Reynolds, O., *Phil. Trans. Roy. Soc.*, V. A186 (1985).
- 20 Orr, W. M'F., *Proc. Roy. Irish Acad.*, V. A27 (1907).
- 21 Serrin, J., *Arch. Rat. Mech. Anal.*, V. 3 (1959).
- 22 Joseph, D. D., *Ibid.*, V. 22 (1966).
- 23 Davis, S. H., von Kerczek, D. A., *Ibid.*, V. 52 (1973).
- 24 Joseph, D. D., Carmi, S., *Quart. Appl. Math.*, V. 26 (1968).
- 25 Busse, F. H., Z. Angew. Math. Phys., V. 20 (1969).
- 26 Ляпунов, А. М., *Общая задача об устойчивости* (1892).
- 27 春元勲, *微分方程所定义的积分曲线*, 科学出版社 (1959).
- 28 Subov, V. I., *Methods of Liapunov and Their Application*, Groningen (1960).
- 29 Movchan, A. A., *Prikl. Mat. Mech.*, V. 23 (1959).
- 30 ——, *Ibid.*, V. 24 (1960).
- 31 Hopf, R., Wilkes, E., *Int. J. Eng. Sci.*, V. 4 (1966).
- 32 Pritchard, A. J., C. Appl. Maths., V. 27 (1976).
- 33 徐硕昌, *科学通报*, V. 26, 1 (1981).
- 34 Burgers, J. M., *Adv. Appl. Mech.*, V. 1 (1948).
- 35 Davey, A., Diprima, R. C., Stuart, J. T., *JFM*, V. 31 (1968).
- 36 Landau, L. D., *O. R. Acad. Sci. USSR*, V. 44 (1944).
- 37 Hopf, E., *Ber. Math.-Phys. Klasse der Sachs. Akad. der Wissenschaften zu Leipzig*, V. 94 (1942).
- 38 ——, *Can. Appl. Math.*, V. 1 (1948).
- 39 Landau, L. D., Lifshitz, E. M., *Fluid Mechanics* (1959).
- 40 Matkowsky, E. J., *Bull. Amer. Math. Soc.*, V. 76 (1970).
- 41 Kirchgassner, K., Sorger, P., Q. J. Mech. Appl. Math., V. 22 (1969).
- 42 Schwinderski, E. W., *Phys. Fluid*, V. 15 (1972).
- 43 Arnold, V. I., *Lectures on bifurcation and versal families*, Uspekhi Mat. Nauk, V. 27 (1972).
- 44 Sattinger, D. H., *Topics in Stability and Bifurcation Theory*, Lecture Note in Math., V. 39 (1973).
- 45 Marden, J. E., *Bull. Amer. Math. Soc.*, V. 84 (1978).
- 46 Stakgold, I., *SIAM Review*, V. 13 (1971).
- 47 Stuart, J. T., *J. Fluid Mech.*, V. 9 (1960).
- 48 Watson, T., *Ibid.*, V. 9 (1960).
- 49 Reynolds, W. C., Potter, M. C., *Ibid.*, V. 27 (1967).
- 50 周恒, 赵耕夫, *力学学报*, 3 (1982).
- 51 Stewartson, K., Stuart, J. T., *JFM*, V. 48 (1971).
- 52 Davids, S. J., White, C. M., *Proc. Roy. Soc.*, V. A119 (1928).
- 53 Nishikawa, N., Iida, S., Ichikawa, Y., *JFM*, V. 72 (1975).
- 54 Ellingsen, T., Gjerrik, B., Palm, E., *Ibid.*, V. 40 (1970).
- 55 Davey, A., Nguyen, H. P. F., *Ibid.*, V. 45 (1970).
- 56 Orszag, A., Kells, E. C., *Ibid.*, V. 96 (1980).
- 57 Malko, W. V. R., et al., *Ibid.*, V. 4 (1956).
- 58 Davey, A., *Ibid.*, V. 14 (1962).
- 59 Lanford, O. E., *Ann. Rev. Fluid Mech.*, V. 14 (1982).
- 60 Ruelle, D., Taken, F., *Com. Math. Phys.*, V. 20 (1971).
- 61 ——, *Ann. N.Y. Acad. Sci.*, V. 316 (1979).
- 62 Lorenz, E. N., *J. Atmos. Sci.*, V. 20 (1963).
- 63 Smale, S., *Bull. Amer. Math. Soc.*, V. 73 (1967).
- 64 Feigenbaum, M. T., *Com. Math. Phys.*, V. 77 (1980).
- 65 McLaughlin, J. B., Martin, P. O., *Phys. Rev.*, V. A12 (1975).
- 66 Eckmann, J. P., *Rev. Mod. Phys.* (1981).

NONLINEAR THEORY OF HYDRODYNAMIC STABILITY

Li Jia-chun

(Institute of Mechanics, Academia Sinica)