

一个推广 Virial 定理的数学方法和应用¹⁾

潘 良 儒

(中国科学院力学研究所)

摘要 本文在提出广义 Gauss 定理的思路下,提出了广义 Stokes 定理和一个推广 Virial 定理的新方法,后者应用于天体磁流体力学和引力平衡问题时得到的结果有:(1)气体具有运动时的平衡系统的判据,(2)磁场对气团形态的影响.应用于实验室等离子体平衡问题时,其结果有:(1)包围在气体中孤立磁场的特性,(2)发现内包无力场必须外包一有力场,(3)无力场的形态,应用于 Tokamak 等离子体环时的结果有:(1)环的胖瘦对环表面磁压的影响,(2)两个外加磁场分量分别和气压、环的胖瘦,截面形态、环电流分布和逆磁或顺磁的平衡关系,搞清楚了外加磁场约束等离子体总体平衡的物理机制.

一、前 言

经典 Virial 定理说明一个在位势场中运动的质点,当其运动达到定常时,其时间平均动能和平均势能具有一定比例关系. Chandrasekhar^[1] 首先采用这个定理处理了一团理想导电气体在引力和电磁场作用下的平衡和稳定性问题; Yoshikawa^[2] 在文献[1]的基础上,提出把磁场 \vec{B} 分解为等离子体内部电流所产生的磁场 $\vec{B}^{(i)}$ 和外加磁场 $\vec{B}^{(e)}$ 来处理了轴对称等离子体环的平衡和稳定性问题,为设计 Tokamak 的外加磁场 $B^{(e)}$ 提供了部分依据.

由于以上问题的物理复杂性和分析计算的艰巨性,目前对这些问题的认识还是局部的,全面地深入地探索这些问题除了物理手段外,新的数学手段应是有力的助手. 本文作者在 40 年代末期提出了广义 Gauss 定理和广义 Stokes 定理,据作者了解,除前者外,后者尚未见诸文献,根据提出以上定理的同一思路,本文提出一个推广 Virial 定理的数学简便形式,大为简化了类似以上作者的计算,并为探索新的物理规律提供了有力的工具;同时本文应用这个计算于天体物理、受控热核反应和一般电磁流体力学领域中若干问题,分别得到了新结果.

二、广义 Gauss 定理和广义 Stokes 定理

由于本文推广 Virial 定理的数学形式和推广经典 Gauss 定理与 Stokes 定理有其基本相似之处,而且该两定理在应用数学上有广泛的应用价值,故在提出推广 Virial 定理前,分别介绍该两定理:

1. 广义 Gauss 定理

Gauss 定理是面积分和体积分相互变换的一种形式. 设 V 、 Σ 、 $d\sigma$ 、 dr 和 \vec{n} 分别指积

本文于 1980 年 12 月 15 日收到,1983 年 6 月 8 日收到修改稿.

1) 谨以此文纪念导师郭永怀教授逝世十五周年.

分空间区域,该空间的分界面,界面上的面积微元,该空间的体积微元和面微元上的外向单位法向量. \mathbf{A} 为任意向量函数,并设它是连续和可微的,则经典 Gauss 定理的数学形式为

$$\int_{\Sigma} \hat{n} \cdot \mathbf{A} d\sigma = \int_V \nabla \cdot \mathbf{A} d\tau \quad (2.1)$$

上式变换的实质是将右边体积积分中的 ∇ 变换成左边面积积分中的 \hat{n} 而已,其被积函数和乘积的形式维持不变,因此本文将(2.1)式推广为

$$\int_{\Sigma} \hat{n} \otimes [] d\sigma = \int_V \nabla \otimes [] d\tau \quad (2.2)$$

式中 \otimes 代替了(2.1)式中的“ \cdot ”乘,它可以是一般乘、标量乘、向量乘或无乘积关系; $[]$ 代替了(2.1)式中的 \mathbf{A} ,它可以是一般函数、向量函数、张量或任何有意义的表达式,以上具有数学和物理意义的排列组合形式很多,有的甚至没有什么意义,但是它揭示了变换的本质,也不妨碍其广泛的应用.

本文的主要贡献之一是将(2.2)式作了进一步推广,大为简化了探索新物理规律的计算;令 Θ 为另一 $[]$,并设坐标系为 (x_1, x_2, x_3) , \hat{x}_i 为单位向量, i 为 1、2 或 3,则

$$\int_V \{ \nabla \otimes [] \} \otimes \Theta d\tau = \int_{\Sigma} \{ \hat{n} \otimes [] \} \otimes \Theta d\sigma - \int_V \{ \hat{x}_i \otimes [] \} \otimes \frac{\partial \Theta}{\partial x_i} d\tau \quad (2.3)$$

此变换仍然和(2.2)式的一样,把体积积分中的 ∇ 变换成面积积分中的 \hat{n} ,不同的是右边出现了体积项,这是由左边积分项中 ∇ 对其 Θ 不具有微分作用,而右边面积积分的 \hat{n} 是代表体积积分中的 ∇ 对所有被积函数都有微分作用,因此,右边第二项就是扣除 ∇ 对 Θ 的微分作用项. 如果把面积项再变回成体积项就看得更清楚了. 有关(2.2)和(2.3)的证明和(2.1)式的证明基本原则一样,故从略.

2. 广义 Stokes 定理

根据同样思路,可以对 Stokes 定理作类似推广;传统 Stokes 定理是沿闭合线路的积分变换成该线路包围的任意面上的积分,其表达式为

$$\int_{\Gamma} d\mathbf{l} \cdot \mathbf{A} = \int_{\Sigma} \hat{n} \cdot \nabla \times \mathbf{A} d\sigma = \int_{\Sigma} (\hat{n} \times \nabla) \cdot \mathbf{A} d\sigma \quad (2.4)$$

如图(1)所示,(2.4)式中的 $d\mathbf{l}$ 指闭合线路 Γ 上的向量微元, Σ 指以 Γ 为界线的任意面, $d\sigma$ 为该面上的面积微元,其法向单位向量 \hat{n} 的指向和线积分的走向为右螺旋关系.

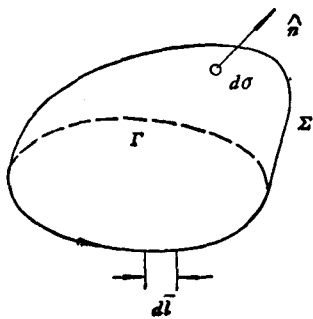


图1 Stokes 定理中的符号示意图

从(2.4)式知变换的实质是将左边线积分的 $d\mathbf{l}$ 变换成右边面积积分中的 $\hat{n} \times \nabla$ 而已,它同被积函数的形式和乘积方式无关,因此将(2.4)式作如下推广:

$$\int_{\Gamma} d\mathbf{l} \otimes [] = \int_{\Sigma} (\hat{n} \times \nabla) \otimes [] d\sigma \quad (2.5)$$

式中包含的函数假定是连续和可微的. 和证明(2.4)式的思路一样,将 Σ 面分割成无限小面微元,可以找到围绕面微元的线积分和面微元上的面积分就是(2.5)式所示的关系,为节约篇幅,证明从略. 当然对(2.5)式还可以作类似(2.3)式那样进一步的推广.

三、一个推广 Virial 定理的新方法

设控制一个物理问题的基本方程为

$$\nabla \otimes [\] = \Phi \quad (3.1)$$

Φ 的定义和 [] 符号类似, 代表一般函数、向量或张量等, 将(2.3)式的变换应用于(3.1)式, 得

$$\int_V \Phi \otimes \Theta d\tau = \int_\Sigma (\hat{n} \otimes [\]) \otimes \Theta d\sigma - \int_V (\hat{x}_i \otimes [\]) \otimes \frac{\partial \Theta}{\partial x_i} d\tau \quad (3.2)$$

从数学上和物理上来讲, 在给定的边界条件下, 任意选择 Θ 和乘积方式 \otimes 所算出的结果, 都将成为这个系统不得违背的规律, 而其中某些规律不是单凭物理经验或思路所能取得的. 下面将应用(3.2)式来处理天体和受控聚变反应中的平衡和稳定问题来说明它是计算简便、应用广泛和有威力的变换式. 此外 Θ 的选择和乘积方式决定其成果的价值大小.

四、天体中的电磁流体力学和引力平衡问题

考虑天体中一团理想导电气体, 在磁场 \mathbf{B} 和自身物质分布所产生的引力势 ϕ 下, 其运动方程为

$$\rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \nabla \cdot \mathbf{T} + \rho \nabla \phi \quad (4.1)$$

其中 \mathbf{T} 和 ϕ 定义为

$$\mathbf{T} = \mathbf{B}\mathbf{B}/4\pi - I(P + B^2/8\pi) \quad (4.2)$$

$$\phi = G \int_V \rho / |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| d\tau \quad (4.3)$$

式中 ρ 、 P 、 \mathbf{v} 、 \mathbf{r} 、 I 和 G 分别指气体的密度、压强、流速、空间位置、单位张量和引力常数. 本文采用高斯制.

将(3.2)式应用于(4.1)式, 并令

$$\otimes[\] = \cdot \mathbf{T} \quad (4.4)$$

$$\Phi = \rho \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} - \nabla \phi \right) \quad (4.5)$$

则得

$$\begin{aligned} \int_V \rho \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} - \nabla \phi \right) \otimes \Theta d\tau &= \int_\Sigma \left[\frac{B_n \mathbf{B}}{4\pi} - \hat{n} \left(\frac{B^2}{8\pi} + P \right) \right] \otimes \Theta d\sigma \\ &+ \int_V \left[\left(\frac{B^2}{8\pi} + P \right) \nabla \otimes \Theta - \mathbf{B} \otimes (\mathbf{B} \cdot \nabla) \Theta \right] d\tau \end{aligned} \quad (4.6)$$

上式还可化为下列有用的形式. 在无限远处 \mathbf{B} 的量级是 $O\left(\frac{1}{r^3}\right)$, 如果 $\Theta \leq O(r^3)$, 则上式中的面积分在无限远处为零, 因此(4.6)式可写为

$$\int_V \rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} \otimes \Theta d\tau = - \int_\infty \left(\frac{\mathbf{B}\mathbf{B}}{4\pi} - \frac{I\mathbf{B}^2}{8\pi} \right) \otimes \nabla \Theta d\tau$$

$$+ \int_V P I \otimes \nabla \Theta d\tau + \int_V \rho \nabla \phi \otimes \Theta d\tau \quad (4.7)$$

式中有两个并矢双重乘,其定义为

$$AB \otimes CD = B \cdot CA \otimes D \quad (4.8)$$

下面将看到选择不同的 $\otimes \Theta$ 可分别得到有物理意义的结果.

(4.1)取 $\otimes \Theta$ 为 $\times \mathbf{r}$, 并利用连续方程

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (4.9)$$

从(4.7)式不难得出

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{v} \times \mathbf{r} = 0 \quad (4.10)$$

上式中的 \mathbf{r} 是质点位置

(4.10)的结论是: 一团在磁场和自身引力作用下的运动等离子体,其角动量守恒.

(4.2)取 $\otimes \Theta$ 为 $\cdot \mathbf{r}$

令(4.7)式中的 $\otimes \Theta$ 为 $\cdot \mathbf{r}$, 并定义

$$I = \int_V \rho r^2 / 2 d\tau \quad (4.11)$$

和体积平均量

$$\langle f \rangle = \frac{1}{V} \int_V f d\tau \quad (4.12)$$

注意: 对磁场来说,上式积分区域是包括等离子体外的全空间,经过计算得出惯性矩变化率

$$\left\langle \frac{d^2 I}{dt^2} \right\rangle = \langle \rho v^2 \rangle + \langle B^2 / 8\pi \rangle + 3 \langle P \rangle - \frac{1}{2} \langle \rho \phi \rangle \quad (4.13)$$

(4.12)式中 V 为等离子体的体积. (4.13)式说明若没有引力场,或引力场不够大,则等离子体不断向外膨胀^[1]

(4.3)取 $\otimes \Theta$ 为 $\cdot \mathbf{v}$

令(4.6)式的 $\otimes \Theta$ 为 $\cdot \mathbf{v}$, 假设等离子体表面速度为零或表面是磁面和垂直于磁面上的流速 \mathbf{v}_\perp 为零,利用连续方程(4.1)和下列有关理想等离子体的方程

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (4.14)$$

$$\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B} = 0 \quad (4.15)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (4.16)$$

$$\frac{d}{dt} (P / \rho^{\gamma}) = 0 \quad (4.17)$$

经过一些计算得

$$\frac{d}{dt} \int_V (\rho v^2 / 2 + B^2 / 8\pi + P / (\gamma - 1) - \rho \phi) d\tau = 0 \quad (4.18)$$

或写为

$$\langle \rho v^2 / 2 \rangle + \langle B^2 / 8\pi \rangle + \langle P / (\gamma - 1) \rangle - \langle \rho \phi / 2 \rangle = \langle E_T \rangle \quad (4.19)$$

式中 $\langle E_T \rangle$ 为系统的体积平均总能. γ 为气体的比热比. (4.18—4.19) 式说明能量守恒关系, 上式左边各项分别代表体积平均动能、磁能、热焓和引力势能.

(4.4) 取 \mathcal{O} 为 $\cdot \mathbf{R}$

本文采用柱坐标 (R, ϕ, z) 或球坐标 (r, ϕ, θ) , 令 (4.6) 式的 \mathcal{O} 为 $\cdot \mathbf{R}$, 定义

$$I_R = \int_V \frac{1}{2} \rho R^2 d\tau \quad (4.20)$$

经过类似 (4.3) 式计算, 得

$$\left\langle \frac{d^2 I_R}{dt^2} \right\rangle = \langle \rho(v_\phi^2 + v_R^2) \rangle + \langle B_z^2 \rangle / 4\pi + 2\langle P \rangle + \langle \rho \mathbf{R} \cdot \nabla \phi \rangle \quad (4.21)$$

此处

$$\langle \rho \mathbf{R} \cdot \nabla \phi \rangle = -\frac{G}{2V} \int_{V'} \int_V [\rho(\mathbf{r})\rho(\mathbf{r}') / |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3] (\mathbf{R} - \mathbf{R}')^2 d\tau d\tau' \quad (4.22)$$

此式说明: 若没有引力场, 等离子体不断沿 \hat{R} 向膨胀.

(4.5) 取 \mathcal{O} 为 $\cdot \mathbf{z}$, 并定义

$$I_z = \int_V \frac{1}{2} \rho z^2 d\tau \quad (4.23)$$

得:

$$\left\langle \frac{d^2 I_z}{dt^2} \right\rangle = \langle \rho v_z^2 \rangle + \langle B^2 / 8\pi \rangle - \langle B_z^2 \rangle / 4\pi + \langle P \rangle + \langle \rho \mathbf{z} \cdot \nabla \phi \rangle \quad (4.24)$$

此处

$$\langle \rho \mathbf{z} \cdot \nabla \phi \rangle = -\frac{G}{2V} \int_{V'} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r})\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} (\mathbf{z} - \mathbf{z}')^2 d\tau d\tau' \quad (4.25)$$

(4.6) 讨论: 在定常情况下, 从 (4.13)、(4.19)、(4.21) 和 (4.24) 式得

$$\langle P \rangle + \frac{\gamma - 1}{2(3\gamma - 4)} \langle \rho v^2 \rangle = -\frac{\gamma - 1}{3\gamma - 4} \langle E_T \rangle \quad (4.26)$$

$$\left\langle \frac{1}{2} \rho \phi \right\rangle = \langle B^2 / 8\pi \rangle + \langle \rho v^2 \rangle + 3\langle P \rangle \quad (4.27)$$

$$-\langle \rho \mathbf{R} \cdot \nabla \phi \rangle = \langle \rho(v_\phi^2 + v_R^2) \rangle + \langle B_z^2 / 4\pi \rangle + 2\langle P \rangle \quad (4.28)$$

$$-\langle \rho \mathbf{z} \cdot \nabla \phi \rangle = \langle \rho v_z^2 \rangle + \langle B^2 / 8\pi \rangle - \langle B_z^2 / 4\pi \rangle + \langle P \rangle \quad (4.29)$$

式中下标是坐标符号的量为向量分量. (4.26—4.27) 式已见诸文献^[1], (4.28—4.29) 式是本文提出讨论的. (4.26) 式的 $\langle E_T \rangle$ 是负值, $\langle P \rangle$ 是正值, 因此该式要求

$$\gamma > 4/3 \quad (4.30)$$

这是气体必须具备的比热比性质. 本文着重讨论 (4.29) 式带来的新结果, 而 (4.28) 式可由 (4.29) 推导出来, 不给出更多结果.

(1) 若磁场为零, 等离子体静止, 则 (4.29) 简化为

$$-\langle \rho \mathbf{z} \cdot \nabla \phi \rangle = \langle P \rangle \quad (4.31)$$

右边 $\langle P \rangle$ 是一常数, 左边项内的 \mathbf{z} 是任意选择的坐标系中的 \mathbf{z} , 回顾它的定义 (4.25), 知等离子体的质量分布是球对称的.

(2) 若等离子体静止并约束在磁面内时, 则 (4.29) 式为

$$-\langle \rho \mathbf{z} \cdot \nabla \phi \rangle + \langle B_z^2 / 4\pi \rangle = \langle B^2 / 8\pi \rangle + \langle P \rangle \quad (4.32)$$

根据以上类似分析, 上式左边两项之和具有球对称性, 由于 $\langle B_z^2 / 4\pi \rangle$ 一般不是球对称性, 所以等离子体的质量分布偏离球对称, 在某一特定方向 z 的偏离量决定于 $\langle B_z^2 / 4\pi \rangle$ 的量.

(3) (4.29) 式还说明 $\langle \rho v_z^2 \rangle$ 有和 $\langle B_z^2 / 4\pi \rangle$ 相反的影响, 它使等离子体团在 z 向尺度增大.

五、实验室等离子体平衡问题

实验室等离子体平衡不考虑引力场, 兹分别讨论如下:

1. 考虑等离子体内存在一孤立磁场, 其边界 Σ 条件为

$$\mathbf{B}_\Sigma = 0 \quad (5.1)$$

或考虑等离子体约束于闭合磁面内, 其边界磁场条件为

$$\hat{n} \cdot \mathbf{B}_\Sigma \quad (5.2)$$

对以上两种边界条件来说, (4.6) 式简化为

$$\int_\Sigma (\hat{n} \cdot \mathbf{T}) \otimes \Theta d\sigma = \int_V \mathbf{T} \otimes \nabla \Theta d\tau \quad (5.3)$$

选取 $\otimes \Theta$ 为 $\cdot \mathbf{r}$, $\cdot \mathbf{R}$ 和 $\cdot \mathbf{z}$ 分别得

$$\int_\Sigma \left(P + \frac{B^2}{8\pi} \right) \hat{n} \cdot \mathbf{r} d\sigma = \int_V \left(\frac{B^2}{8\pi} + 3P \right) d\tau \quad (5.4)$$

$$\int_\Sigma \left(P + \frac{B^2}{8\pi} \right) \hat{n} \cdot \mathbf{R} d\sigma = \int_V \left(\frac{B_z^2}{4\pi} + 2P \right) d\tau \quad (5.5)$$

$$\int_\Sigma \left(P + \frac{B^2}{8\pi} \right) \hat{n} \cdot \mathbf{z} d\sigma = \int_V \left(P + \frac{B^2}{8\pi} - \frac{B_z^2}{4\pi} \right) d\tau \quad (5.6)$$

如果采用边界条件 (5.1), 并设外界气压是 P_Σ , 则 (5.4—5.6) 简化为下列关系

$$P_\Sigma - \langle P \rangle = \frac{1}{3} \langle B^2 / 8\pi \rangle = \langle B_z^2 \rangle / 8\pi \quad (5.7)$$

结论: (1) 界面气压 P_Σ 大于磁场内部的体积平均压强, 两个压强差是体积平均磁能的 $\frac{1}{3}$.

(2) 藏在压强为 P_Σ 的等离子体内的孤立磁场, 其形态必须具有取任意方向为 z , 而 $\langle B_z^2 / 8\pi \rangle$ 恒等于定值 $P_\Sigma - \langle P \rangle$ 或 $\frac{1}{3} \langle \frac{B^2}{8\pi} \rangle$ 的性质, 也就是说磁能分布是球对称性质.

2. 无力场的存在问题

研究无力场对太阳黑子、受控聚变和无作用力超导线圈等问题有参考意义. 假定在等离子体内部存在一孤立无力场, 则 $\langle P \rangle$ 为零, 简化为

$$P_\Sigma = \langle B_z^2 \rangle / 8\pi = \frac{1}{3} \langle B^2 / 8\pi \rangle \quad (5.8)$$

这说明在等离子体和无力场的分界面上的压强出现间断, 根据界面两侧压强必须平衡的条件, 则磁场在界面出现间断, 有面电流, 因而是有磁作用力的.

结论: 无作用力场不可能孤立地存在于等离子体中, 从无力场到外围等离子体必须

有一个非无力场的过渡.

3. 无力场形态

若 (5.3) 式中的 $\alpha\theta$ 为 $\cdot A$, 令无力场区域的 $P = 0$, 则得

$$P_{\Sigma} = \langle B_z^2 / 4\pi r \rangle \quad (5.9)$$

此式说明内包无力场不可能构成全是球形磁面的形态, 因为当 $E_r = 0$, 从 (5.8—5.9) 得

$$P_{\Sigma} = B = 0 \quad (5.10)$$

它说明这样的磁场不存在. 其它特点见 (5.1) 节.

4. 轴对称等离子体环的平衡

如图 2 所示, 设有一托卡马克等离子体环, 其矩形截面的高和宽分别为 h 和 b , 环的外径和内径分别为 R_2 和 R_1 , 等离子体外是真空.

但有磁场. 应用 (5.5) 式, 则得

$$\begin{aligned} \frac{1}{V} \int_{\Sigma} \frac{B^2}{8\pi} \hat{n} \cdot \mathbf{R} d\sigma &= \frac{B_{z,BC}^2}{4\pi} (1 + \epsilon) - \epsilon \frac{B_{z,AD}^2}{4\pi} \\ &= \left\langle \frac{B_z^2}{4\pi} \right\rangle + 2\langle P \rangle \end{aligned} \quad (5.11)$$

下标 BC 和 AD 分别指界面 BC 和 AD 圆柱面上的平均磁压 $B_z^2/8\pi$, 注意, 计算界面上的磁压时, 引进了 $B_{\phi,z} R_{\Sigma} = \text{常数 } C$ 和 $B_{r,z}$ 的对称性, 故包含 $B_{\phi,z}^2$ 和 $B_{r,z}^2$ 的积分为零. 此外 ϵ 的定义为

$$\epsilon = R_2^2 / (R_2^2 - R_1^2) \quad (5.12)$$

结论:

(1) 在胖环 ($\epsilon \approx 0$) 的情况下, 等离子体环的

$\left\langle \frac{B_z^2}{8\pi} \right\rangle + z\langle P \rangle$ 主要是由环外圆柱面上垂直磁场磁压 $B_{z,BC}^2/8\pi$ 所平衡.

(2) 在瘦环 ($\epsilon \rightarrow \infty$) 情况下, 环内圆柱面上的磁压 $B_{z,AD}^2/8\pi$ 和环外圆柱面上的 $B_{z,BC}^2/8\pi$ 相等.

(3) 当环从瘦环逐渐变成胖环时, 则环的内侧表面平均磁压 $B_{z,AD}^2/8\pi$ 也逐渐失去其影响.

和以上类似, (5.6) 式可给出关系

$$B_{r,CD}^2/8\pi = \frac{\langle B_r^2 \rangle}{8\pi} - \frac{\langle B_z^2 \rangle}{8\pi} + \langle P \rangle + \frac{\langle B_{\phi}^2 \rangle}{8\pi} - \frac{C^2 \ln R_2/R_1}{8\pi R_2^2 - R_1^2} \quad (5.13)$$

(4) 当等离子体环内既无逆磁又无顺磁时, 上式右边最后两项抵销, 应为

$$B_{r,CD}^2/8\pi = \frac{\langle B_r^2 \rangle}{8\pi} - \frac{\langle B_z^2 \rangle}{8\pi} + \langle P \rangle \quad (5.14)$$

因此在顺磁情况下 $B_{r,CD}^2/8\pi$ 较大, 逆磁情况下较小.

(5) 当环截面沿正负 \hat{z} 向拉长时, $\frac{\langle B_r^2 \rangle}{8\pi}$ 比 $\frac{\langle B_z^2 \rangle}{8\pi}$ 小, 因此 $B_{r,CD}^2$ 较小, 反之沿 \hat{r} 向拉长时, 它就增加.

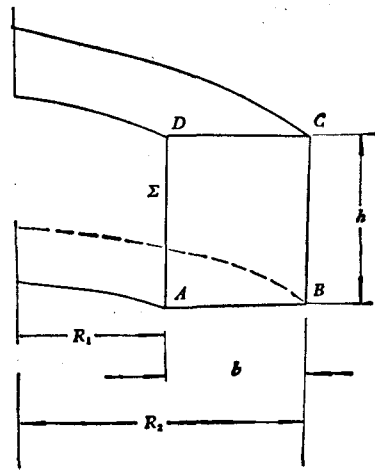


图 2 矩形截面等离子体环示意图

六、外加磁场 $B^{(e)}$ 约束等离子体的机制

为进一步探索外加磁场对等离子体的影响,下面仿 Yoshikana^[2] 的方法,将磁场分解为外加磁场 $B^{(e)}$ 和等离子体中电流 J 所产生的磁场 $B^{(i)}$

$$B = B^{(i)} + B^{(e)} \quad (6.1)$$

将上式代入静平衡方程得

$$J \times B - \nabla P = J \times B^{(i)} - \nabla P + J \times B^{(e)} = 0 \quad (6.2)$$

上式可化为如下形式

$$\nabla \cdot T^{(i)} = -J \times B^{(e)} \quad (6.3)$$

此处定义 $T^{(i)}$ 为

$$T^{(i)} = \frac{B^{(i)} B^{(i)}}{4\pi} - I \left(\frac{B^{(i)2}}{8\pi} + P \right) \quad (6.4)$$

将 (6.3) 代入 (3.2) 式得

$$\int_{\Sigma} (\hat{n} \cdot T)^{(i)} \otimes \Theta d\sigma - \int_V T^{(i)} \otimes \nabla \Theta d\tau = - \int_V (J \times B^{(e)}) \otimes \Theta d\tau \quad (6.5)$$

如果在无限远处

$$\Theta \leq O(r^3); \quad B^{(i)} = O\left(\frac{1}{r^3}\right) \quad (6.6)$$

则 (6.5) 式的面积分在无限远处为零, 故得

$$\int_V (J \times B^{(e)}) \otimes \Theta d\tau = \int_V T^{(i)} \otimes \nabla \Theta d\tau \quad (6.7)$$

取 $\otimes \Theta$ 为 $\cdot \hat{r}$ 、 $\cdot \hat{R}$ 、 $\cdot \mathbf{z}$ 、 \mathbf{R} 和 \mathbf{r} 分别得

$$\int_V J \times B^{(e)} \cdot \hat{r} d\tau = - \int_V \left(2P + \frac{B^{(i)2}}{4\pi} \right) \frac{d\tau}{r} \quad (6.8)$$

$$\int_V J \times B^{(e)} \cdot \hat{R} d\tau = \int_V \frac{1}{R} (B_{\phi}^{(i)2}/4\pi - B^{(i)2}/8\pi - P) d\tau \quad (6.9)$$

$$\int_V J \times B^{(e)} \cdot \mathbf{z} d\tau = \int_V (B_z^{(i)2}/4\pi - B^{(i)2}/8\pi - P) d\tau \quad (6.10)$$

$$\int_V J \times B^{(e)} \cdot \mathbf{R} d\tau = - \int_V (B_z^{(i)2}/4\pi + 2P) d\tau \quad (6.11)$$

$$\int_V J \times B^{(e)} \cdot \mathbf{r} d\tau = - \int_V \left(\frac{B^{(i)2}}{8\pi} + 3P \right) d\tau \quad (6.12)$$

此处 V 为等离子体区域。

结论: (1) (6.8)、(6.11) 和 (6.12) 都说明: 在外界为真空的条件下, 没有外加磁场 $B^{(e)}$, 不可能维持平衡。

(2) 在无力场情况下 (6.8)、(6.11) 和 (6.12) 式简化为

$$\left. \begin{aligned} \int_V J \times B^{(e)} \cdot \hat{r} d\tau &= - \int_V \frac{B_r^{(i)2}}{4\pi} \frac{d\tau}{r} \\ \int_V J \times B^{(e)} \cdot \mathbf{R} d\tau &= - \int_V (B_z^{(i)2}/4\pi) d\tau \\ \int_V J \times B^{(e)} \cdot \mathbf{r} d\tau &= - \int_V \frac{B^{(i)}}{8\pi} d\tau \end{aligned} \right\} \quad (6.13)$$

此结果说明没有外加磁场也不可能构成无力场。

(6.2) 轴对称等离子体环的平衡问题

兹引进等离子体轴对称性质对 (6.9—6.12) 式作进一步计算。先作如下计算, 以便引用其结果。根据

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (6.14)$$

令 f 为任意连续函数并具有微商, 则

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{J} f d\tau = \int_S \hat{n} \cdot \mathbf{J} f d\sigma - \int_V \nabla f \cdot \mathbf{J} d\tau = 0 \quad (6.15)$$

因等离子体环表面是电流面, 故上式中的面积分为零, 因此得

$$\int_V \nabla f \cdot \mathbf{J} d\tau = 0 \quad (6.16)$$

在等离子体内的外加 $\mathbf{B}^{(e)}$ 应服从下列关系

$$R B_\phi^{(e)} = \Gamma (\text{常数}) \quad (6.17)$$

在等离子体内的任意磁面上的 B_ϕ 服从下列关系

$$R B_\phi = \Gamma' (\text{常数}) \quad (6.18)$$

利用 (6.16—6.17) 则 (6.11) 式化为

$$\langle J_\phi B_z^{(e)} R \rangle = -\frac{1}{V} \int_\infty \frac{B_z^{(i)2}}{4\pi} d\tau - 2\langle P \rangle \quad (6.19)$$

Yoshikawa^[3] 获得同样结果, 本文将进一步揭示上式积分项的物理机制。回顾 (6.2) 式, 不难得

$$\int_V \mathbf{J} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{R} d\tau = \int_V J_\phi B_z R d\tau - \int_V B_\phi J_\phi R d\tau = -2\langle P \rangle V \quad (6.20)$$

根据 (6.16) 和 (6.18) 式, 上式中的

$$\int_V B_\phi J_\phi R d\tau = 0 \quad (6.21)$$

因此得

$$\langle J_\phi B_z R \rangle = -2\langle P \rangle \quad (6.22)$$

$$\langle J_\phi B_z^{(i)} R \rangle = \frac{1}{V} \int_\infty \frac{B_z^{(i)2}}{4\pi} d\tau \quad (6.23)$$

(6.19)、(6.22) 和 (6.23) 式给出的结论有:

1) (6.22) 式说明具有 $\langle P \rangle$ 的轴对称等离子体环有沿 \hat{R} 向的膨胀力, 它是由 $J_\phi B_z$ 这部分磁场力所平衡, 其大小和 R 成反比, 当等离子体环远离轴中心而成为直柱体时, 则 $\langle P \rangle$ 引起的膨胀力消失, 因而也不用 $J_\phi B_z$ 来平衡。注意磁场力的另一部分 $J_r B_\phi$ 和 \hat{R} 向平衡无关, 以上结论对任意环截面都成立。

2) (6.19) 式说明必须有外加垂直场 $\mathbf{B}_z^{(e)}$ 和 J_ϕ 组成的磁场力来平衡轴对称等离子体团或环由于 $\langle P \rangle$ 和自生垂直场压 $\frac{1}{V} \int_\infty \frac{B_z^{(i)2}}{4\pi} d\tau$ 所引起的 \hat{R} 向膨胀力, 其大小和 R 成反比, 当等离子体环向轴心收缩时, 其外加磁场 $\mathbf{B}_z^{(e)}$ 必须加强, (设 J_ϕ 不变)。

3) (6.23) 式说明 (6.19) 式中的 $\frac{1}{V} \int_\infty \frac{B_z^{(i)2}}{4\pi} d\tau$ 项就是 $\langle J_\phi B_z^{(i)} R \rangle$ 。表面看来, 它和 R 成正比, 其实不然, 因为 $B_z^{(i)}$ 是决定于等离子体的位置、截面的几何形状和 J_ϕ 的分布; 当

等离子体向轴中心收缩时, $B_z^{(i)}$ 随之增强, 因此 (6.19) 式中的外加磁场 $B_z^{(e)}$ 也必须相应加强.

和以上分析 $B_z^{(e)}$ 一样来分析 $B_R^{(e)}$. (6.10) 式可写为

$$\int_V J_\phi B_R^{(e)} z d\tau = 2\pi\Gamma \int_V \frac{zJ_R}{R} d\tau + \int_\infty \frac{B_\phi^{(i)2}}{8\pi} d\tau + \int_\infty \frac{B_R^{(i)2} - B_z^{(i)2}}{8\pi} d\tau + \int_V P d\tau \quad (6.24)$$

上式右边第一项可进一步计算如下:

$$\int_V \frac{zJ_R}{R} d\tau = -2\pi \int_V z \frac{\partial B_\phi^{(i)}}{\partial z} dz dR \quad (6.25)$$

设等离子体表面上的 $B_\phi^{(i)}$ 为零, 则上式积分为

$$\int_V \frac{zJ_R}{R} d\tau = 2\pi\Phi^{(i)} \quad (6.26)$$

此处 $\Phi^{(i)}$ 为通过环截面的 $B_\phi^{(i)}$ 通量.

可以证明

$$\left. \begin{aligned} \langle J_R B_\phi^{(i)} z \rangle &= \left\langle \frac{B_\phi^{(i)2}}{8\pi} \right\rangle \\ \langle J_\phi B_R^{(i)} z \rangle &= \frac{1}{V} \int_\infty \frac{-B_R^{(i)2} + B_z^{(i)2}}{8\pi} d\tau \end{aligned} \right\} \quad (6.27)$$

将以上结果代入 (6.24) 式得

$$\langle J_\phi B_R^{(e)} z \rangle = \frac{4\pi^2\Gamma\Phi^{(i)}}{V} + \langle P \rangle + \langle B_\phi^{(i)2}/8\pi \rangle - \langle J_\phi B_R^{(i)} z \rangle \quad (6.28)$$

结论:

1) (6.28) 式说明轴对称等离子体团在 z 向的平衡机制. 右边第一项是磁力 $B_\phi J_R$ 的效应, 顺磁时, 该项为正, 它使等离子体沿垂直方向膨胀; 反之, 在逆磁情况下, 则压缩等离子体. 第二项 $\langle P \rangle$ 是气压膨胀力效应. 第三项 $\langle B_\phi^{(i)2}/8\pi \rangle$ 是自生磁场 $B_\phi^{(i)}$ 所引起的膨胀力效应, 第四项是等离子体自收缩磁力 $J_\phi B_R^{(i)}$ 的效应, 是抑制膨胀的. 如果右边总值为正, J_ϕ 为正, 则在环的赤道面以上的外加磁场 $B_R^{(e)}$ 指向 \hat{R} , 赤道面以下的 $B_R^{(e)}$ 指向负 \hat{R} . 它的效应是平衡上式右边所代表的膨胀效应. 反之, 若右边总值为负, 则 $B_R^{(e)}$ 指向和前面情况相反, 它的效应是平衡上式右边所代表的垂直方向的压缩效应.

2) 将上式右边第四项和左边项合并成 $\langle J_\phi B_R z \rangle$ 项后可看出轴对称等离子体环在垂直方向所受自生磁场和气压的膨胀力是由磁场力 $J_\phi B_R$ 维持平衡的, 它压缩等离子体.

3) 若 (6.28) 式右边的值固定, 则 $B_R^{(e)}$ 的值和截面高的尺度成反比. 除 $\langle P \rangle$ 外, 其它三项决定于等离子体的位置、几何形态、纵向和角向电流分布.

参 考 文 献

- [1] Chandrasekhar, S., Hydrodynamic and Hydromagnetic stability, pp. 577—589.
- [2] Yoshikawa, S., Physics of Fluids, Feb. (1964), pp. 278—291.
- [3] Shafranov, V. D., Reviews of plasma physics Vol. 2, pp. 106—107.
- [4] 潘良儒, Virial 定理的再推广及其应用(一), 1977 年黄山天文会议论文集.

A METHOD FOR GENERALIZING VIRIAL THEOREM AND APPLICATIONS

Pan Liangru

(*Institute of Mechanics, Academia Sinica*)

Abstract

Both Gauss's theorem and Stokes's theorem were generalized and in a similar way a method for generalizing virial theorem was formed. Its applications to the MHD equilibrium problems of plasma in space or in closed magnetic configurations resulted in a few new physical conclusions.