

非平衡、非绝热气体中的波

高 智

卢文强

(中国科学院力学研究所)

(中国科学院工程热物理研究所)

1982年4月9日收到

提 要

本文探讨了非平衡、非绝热气体中扰动传播的特性。包括弛豫波、压力波、密度波以及热模。基于热扰具有反馈机制的看法,导出了非平衡、非绝热气体中扰动传播的基本方程式和色散关系。由此得到了一些新的结论,例如,扰动能够放大或缓慢衰减,后者为大气中次声波吸收的异常现象^[9]提供了一种合理的解释;非绝热能够引起很大的弥散现象;非绝热过程对噪声的传播能够产生显著的阻尼作用等等。此外,压力波、密度波和热模不稳定的结论与气体放电失稳性的实验^[6,7]相符合。

一、引 言

关于绝热、非平衡气体和液体介质中声波吸收以及弥散现象,已作了不少的研究^[1-3]。关于热扰,即非绝热效应对扰动传播影响的分析,已发表的工作皆与气动声学的分析一致,通常把热扰作为声学源来处理^[4,5],因而波算子仍为经典声学波算子。但是,在不少有实际意义的情况下,如气体放电、辐射加热以及湍流热交换等热扰情况下,热扰不仅与气体的状态参量值有关,而且要受到状态参量的扰动量的影响。例如,对于气体放电,热扰与气体的电导率有关^[6,7],因而热扰既是气体的密度,也是密度扰动量的函数。在激光诱导的等离子体加热问题的分析中^[8],热扰与等离子体的电导率有关。等离子体电导率则是等离子体密度、温度以及密度和温度的扰动量的函数。这就是说,状态参量(如压力、密度等)的扰动将引起非绝热的热扰动。这时热扰本身就具有一种正的或负的反馈作用,扰动传播的基本方程、波算子因而就与经典的方程、波算子有所不同。基于这一基本看法,本文导出了非平衡、非绝热气体中扰动传播的基本方程式。由这一新的基本方程式出发,分析了色散关系、阻尼和放大特性,讨论了非平衡非绝热气体中的波:弛豫波、密度波、压力波和热波模,分析了这些波模之间的相互作用现象等。

文中得到一些新结果,它们与热扰为声学源的结果^[4,5]有所不同。引起这一差异的基本原因是:作为声学源的热扰与气体状态变量的扰动量(如压力扰动量 p' 、密度扰动量 ρ' 等)无关,而具有反馈作用的热扰则与状态变量的扰动量有关。因此,对于具有反馈作用的热扰机制进行分析,有可能更好地阐明非绝热过程与不同波模之间的相互作用过程。

二、基本方程式

这里不局限于某一特定的非平衡过程,而像通常的处理^[1-3]那样,我们一般地考虑一个非平衡过程,这可以代表分子的振动激励和弛豫、或大转动惯量分子的转动激励和弛豫、或化学反应等。单个非平衡过程能够使用一个非平衡变量 q 和一个弛豫特征时间 τ 来表征。非平衡、非绝热气体的质量守恒、动量守恒和能量守恒方程,非平衡速率方程以及状态方程分别为

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{Du_i}{Dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} = 0, \quad (2)$$

$$\rho \frac{Dh}{Dt} - \frac{Dp}{Dt} = \rho \bar{q}, \quad (3)$$

$$\frac{Dq}{Dt} = \frac{q^* - q}{\tau}, \quad (4)$$

$$h = h(p, \rho, q), \quad (5)$$

其中 $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, p, ρ 和 h 分别为压力、密度和焓, u_i 为速度分量, q^* 为非平衡量 q 的平衡值, τ 为 q 所表示的非平衡过程的弛豫特征时间, \bar{q} 为非绝热热源项。相对于静止的未扰气体,有

$$p = p_0 + p', \quad \rho = \rho_0 + \rho', \quad u_i = u'_i, \\ h = h_0 + h', \quad q = q_0 + q', \quad q^* = q_0^* + q'^*. \quad (6)$$

这里下标 0 表示未扰参考状态,上撇表示扰动量。如前面所述,非绝热项 \bar{q} 的热扰量 \bar{q}' 应假设为扰动量 p', ρ' 和 q' 的函数。如气体放电情况下,密度的扰动会使电导率发生变化,电导率的改变又将引起气体局部加热量发生变化,即引起非绝热的热扰^[6]。因此,一般来说,非绝热热扰可展开为

$$\bar{q}' = \bar{q} - \bar{q}_0 = \bar{q}_p p' + \bar{q}_\rho \rho' + \bar{q}_q q'. \quad (7)$$

这里 $\bar{q}_p = \left(\frac{\partial \bar{q}}{\partial p} \right)_0$, 其它诸项类似。

把(6)和(7)式代入(1)–(4)式,并利用(5)式,经过适当的运算和化简后,得到

$$\tau_0^+ \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial}{\partial t} \square_l \rho' + Q'_p \frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} + Q'_\rho \frac{\partial^2 \rho'}{\partial x_i^2} \right] \\ + \frac{\partial}{\partial t} \square_c \rho' + \frac{\tau_0^+}{\tau_0} \left(Q'_p \frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} + Q'_\rho \frac{\partial^2 \rho'}{\partial x_i^2} \right) = 0, \quad (8)$$

其中

$$\square_l = \frac{1}{a_l^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}, \quad (9)$$

$$\square_c = \frac{1}{a_c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}, \quad (10)$$

$$a_f^2 = -\rho_0 h_\rho (\rho_0 h_\rho - 1)^{-1}, \quad (11)$$

$$a_e^2 = -\rho_0 (h_\rho + h_q q_\rho^*) (\rho_0 h_\rho - 1 + \rho_0 h_q q_\rho^*)^{-1}, \quad (12)$$

$$Q'_\rho = \frac{1}{h_\rho} (\bar{q}_\rho + \bar{q}_q q_\rho^*), \quad (13)$$

$$Q'_e = \frac{1}{h_\rho} (\bar{q}_\rho + \bar{q}_q q_\rho^*), \quad (14)$$

$$\frac{\tau_0}{\tau_0^+} = \frac{1}{h_\rho} (h_\rho + h_q q_\rho^*). \quad (15)$$

这里 $h_\rho = \left(\frac{\partial h}{\partial \rho}\right)_0$, 其它类似。(8)式即是非平衡非绝热气体中扰动传播的基本方程式。 \square_f 是以 a_f 为表征的经典冻结波算子, \square_e 是以 a_e 为表征的经典平衡波算子, τ_0^+ 具有 τ_0 的量纲, 它表示非平衡过程与波动相互作用过程的特征弛豫时间, $\tau_0^+ \rightarrow 0$ 表示波动在平衡气体中传播的情况或简称平衡气体情况, $\tau_0^+ \rightarrow \infty$ 表示冻结气体情况。容易证明 a_f 和 a_e 正是通常意义下的冻结声速和平衡声速^[2,3]。在(8)式中, 除去经典冻结和平衡波算子以外的其它四项表示非绝热扰动对波算子的修正项。在绝热即 $Q'_\rho = Q'_e = 0$ 的条件下, (8)式简化为通常的非平衡声学方程式^[2,3]。当 $\tau_0^+ \rightarrow \infty$ 和 0, (8)式分别简化为非绝热冻结气体和非绝热平衡气体中扰动传播的基本方程式。

三、色散关系(一维活塞问题)

对于基本方程式(8), 难以求得象经典声学方程的解那样简单的一般解。为了讨论方便, 首先考虑小振幅简谐扰动沿 x 方向传播的情况, 如在 $x = 0$ 位置作小振幅简谐振动的活塞就可以引起这种扰动(见图 1)。

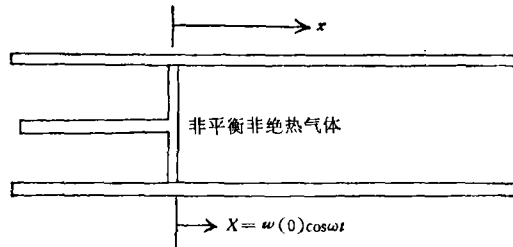


图 1 简谐振动活塞

利用如下的一维流关系式:

$$\rho_0 \frac{\partial u'}{\partial x} = -\frac{\partial o'}{\partial t}.$$

(8)式简化为

$$\begin{aligned} \tau_0^+ \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{a_f^2} \frac{\partial^2 u'}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} \right) + Q'_\rho \frac{\partial^2 u'}{\partial t^2} + Q'_e \frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} \right] \\ + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{a_e^2} \frac{\partial^2 u'}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} \right) + \frac{\tau_0^+}{\tau_0} \left(Q'_\rho \frac{\partial^2 u'}{\partial t^2} + Q'_e \frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} \right) = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

对于小振幅运动, 活塞表面上的流体应以活塞的速度运动, 故在 $x = 0$ 位置, 扰动速

度满足的边界条件为

$$u'(0, t) = W(0) \cos \omega t. \quad (17)$$

定解问题(16)和(17)式,具有形如 $\text{Re}[W(x)e^{i\omega t}]$ 的解,把(17)式代入(16)式得到

$$u'(x, t) = W(0) \exp\left(-\frac{\omega}{a_f} \beta x \sin \varphi\right) \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{a_f} \beta x \cos \varphi\right), \quad (18)$$

其中

$$\varphi = \frac{1}{2} \text{tg}^{-1} \frac{\alpha_1 \alpha_4 - \alpha_2 \alpha_3}{\alpha_1 \alpha_3 + \alpha_2 \alpha_4},$$

$$\beta = \left[\frac{(\alpha_1 \alpha_3 + \alpha_2 \alpha_4)^2 + (\alpha_2 \alpha_3 - \alpha_1 \alpha_4)^2}{(\alpha_3^2 + \alpha_4^2)^2} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (19)$$

$$\alpha_1 = (\omega \tau_0^+)^2 - a_f^2 Q_p' \tau_0^+ \frac{\tau_0^+}{\tau_0},$$

$$\alpha_2 = -(\omega \tau_0^+) \left(\frac{a_f^2}{a_c^2} + a_f^2 Q_p' \tau_0^+ \right),$$

$$\alpha_3 = (\omega \tau_0^+)^2 + Q_p' \tau_0^+ \frac{\tau_0^+}{\tau_0},$$

$$\alpha_4 = -(\omega \tau_0^+) (1 - Q_p' \tau_0^+). \quad (20)$$

可见,波与非平衡、非绝热过程的相互作用,取决于四个相应过程特征时间的比值,即三个 Damkohler 数: $\omega \tau_0^+$ (弛豫过程特征时间与活塞振动特征时间 ω^{-1} 之比), $a_f^2 Q_p' \tau_0^+$ (弛豫特征时间与压力反馈过程特征时间 $(a_f^2 Q_p')^{-1}$ 之比) 和 $Q_p' \tau_0^+$ (弛豫过程特征时间与密度反馈过程特征时间 $(Q_p')^{-1}$ 之比). 图 2 到图 6 以 $a_f^2 Q_p' \tau_0^+$, $Q_p' \tau_0^+$, a_f^2/a_c^2 和 τ_0^+/τ_0 为参数,给出相速度 $a = a_f(\beta \cos \varphi)^{-1}$ 、衰减或放大长度 $L = a_f(\omega \beta \sin \varphi)^{-1}$ 随 $\omega \tau_0^+$ 而变化的关系曲线. 分析得到如下的结论:

1) 相速度 a 与频率 ω 有关,即存在色散. 非绝热反馈条件下, a 随 $\omega \tau_0^+$ 的变化很大,对低频极限或平衡气体,即 $\omega \tau_0^+ \rightarrow 0$ 时, $a \rightarrow [|Q_p'| / |Q_p|]^{1/2}$, 故当 $Q_p' = 0$, $Q_p \neq 0$ 时, $a \rightarrow \infty$; 而当 $Q_p' \neq 0$, $Q_p = 0$ 时, $a \rightarrow 0$; 但对于高频极限或冻结气体,即 $\omega \tau_0^+ \rightarrow \infty$ 的情况, a 恒为 a_f . a 随 $\omega \tau_0^+$ 变化的详细情况见图 2 和图 3.

可见,压力反馈使低频波减速、密度反馈使低频波加速;但高频波的相速度不受非绝热反馈过程的影响. 而在绝热即 $Q_p' = Q_p = 0$ 的条件下, a 从 $\omega \tau_0^+ \rightarrow 0$ 时的平衡声速 a_c 值单调上升到 $\omega \tau_0^+ \rightarrow \infty$ 时的冻结声速 a_f 值;对于大多数气体, a_f 稍大于 $a_c^{[1-3]}$. 此外,非绝热平衡或冻结气体的低频极限,即 $\omega \rightarrow 0$ 的条件下, a 仍为 $[|Q_p'| / |Q_p|]^{1/2}$; 高频极限即 $\omega \rightarrow \infty$ 时, a 为 a_c (平衡情况) 或 a_f (冻结情况).

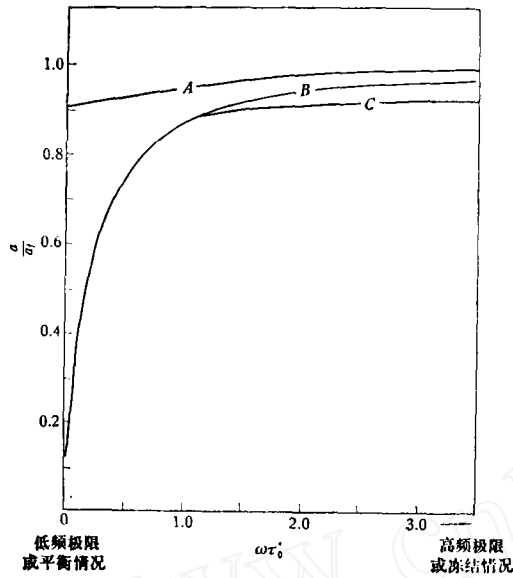
2) 扰动的衰减和放大,由解(18)和(19)式得到扰动稳定性的判别条件为

$$S = (\alpha_1 \alpha_4 - \alpha_2 \alpha_3)(\alpha_1 \alpha_3 + \alpha_2 \alpha_4) > 0 \text{ 稳定,}$$

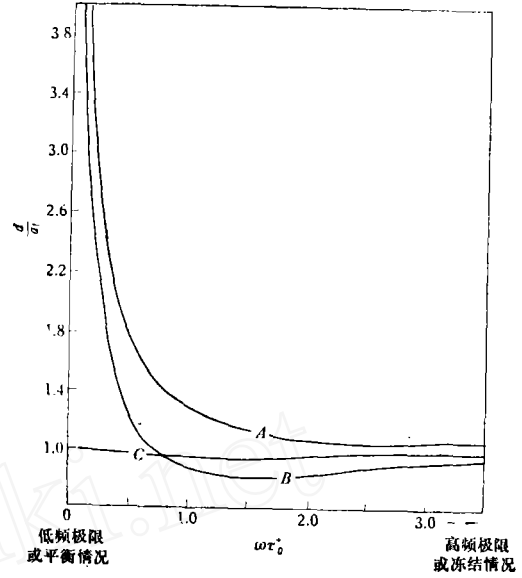
$$< 0 \text{ 不稳定.} \quad (21)$$

绝热条件下 $S = (\omega \tau_0^+)^2 [(a_f^2/a_c^2) - 1][1 + (\omega \tau_0^+)^2]$, 由于 $a_f > a_c$, 故恒稳定. 非绝热条件下,稳定性的判别条件见表 1.

气体放电不稳定的试验结果^[6,7],可以利用表 1 给出的判据作出很好的说明. Nighan 等人关于气体放电热不稳定性的结论^[6,7],相当于表 1 中 $\tau_0^+ \rightarrow 0$ 且 $Q_p' = 0$ 的那部分结

图 2 相速度 a/a_1 随 $\omega\tau_0^+$ 的变化

($a_1/a_e = 1.1$, $\tau_0^+/\tau_0 = 1.1$; A 指绝热情况; B 和 C 指非绝热情况; B: $Q'_p = 0$, $a_1^2 Q'_p \tau_0^+ = 1$; C: $Q'_p = 0$, $a_1^2 Q'_p \tau_0^+ = -1$)

图 3 相速度 a/a_1 随 $\omega\tau_0^+$ 的变化

($a_1/a_e = 1.1$, $\tau_0^+/\tau_0 = 1.1$; A: $Q'_p = 0$, $Q'_p \tau_0^+ = 1$; B: $Q'_p = 0$, $Q'_p \tau_0^+ = -1$; C: $a_1^2 Q'_p \tau_0^+ = 1$, $Q'_p \tau_0^+ = -1$)

表 1

	$\omega\tau_0^+ \rightarrow 0$	$\omega\tau_0^+ \rightarrow \infty$	$\tau_0^+ \rightarrow 0; \infty$
稳定	$Q'_p Q'_p > 0$ Q'_p (或 Q'_p) < 0 $Q'_p Q'_p = 0$ $Q'_p \left[\frac{a_1^2}{a_2^2} + a_1^2 Q'_p \tau_0^+ \left(1 - \frac{\tau_0^+}{\tau_0} \right) \right] > 0$ $Q'_p \left[\frac{a_1^2}{a_2^2} + Q'_p \tau_0^+ \left(\frac{\tau_0^+}{\tau_0} - 1 \right) \right] > 0$ $Q'_p Q'_p < 0$ $a_2^2 Q'_p + Q'_p > 0$	$(Q'_p + a_1^2 Q'_p) \tau_0^+ > \left(1 - \frac{a_1^2}{a_2^2} \right)$	$\tau_0^+ \rightarrow 0$ $(a_2^2 Q'_p + Q'_p) \left[\omega^2 - a_2^2 Q'_p Q'_p \left(\frac{\tau_0^+}{\tau_0} \right)^2 \right] > 0$ $\tau_0^+ \rightarrow \infty$ $(a_1^2 Q'_p + Q'_p) (\omega^2 - a_1^2 Q'_p Q'_p) > 0$
不稳定	$Q'_p Q'_p > 0$ Q'_p (或 Q'_p) > 0 $Q'_p Q'_p = 0$ $Q'_p \left[\frac{a_1^2}{a_2^2} + a_1^2 Q'_p \tau_0^+ \left(1 - \frac{\tau_0^+}{\tau_0} \right) \right] < 0$ $Q'_p \left[\frac{a_1^2}{a_2^2} + Q'_p \tau_0^+ \left(\frac{\tau_0^+}{\tau_0} - 1 \right) \right] < 0$ $Q'_p Q'_p < 0$ $a_2^2 Q'_p + Q'_p < 0$	$(Q'_p + a_1^2 Q'_p) \tau_0^+ < \left(1 - \frac{a_1^2}{a_2^2} \right)$	$\tau_0^+ \rightarrow 0$ $(a_2^2 Q'_p + Q'_p) \left[\omega^2 - a_2^2 Q'_p Q'_p \left(\frac{\tau_0^+}{\tau_0} \right)^2 \right] < 0$ $\tau_0^+ \rightarrow \infty$ $(a_1^2 Q'_p + Q'_p) (\omega^2 - a_1^2 Q'_p Q'_p) < 0$

果. 表 1 的结果和现在的分析进一步表明: 在 Q'_p 和 Q'_p 同时不为零的非绝热条件下, 稳定域就与 ω 有关, 高频扰动被阻尼时, 低频扰动可能被放大; 反之亦然.

3) 振幅的变化方式, 高频波 ($\omega \rightarrow \infty$, 其它参量不变时) 的振幅以指数方式

$$\exp \left[- \frac{(a_1^2/a_2^2 - 1) + (a_1^2 Q'_p + Q'_p) \tau_0^+}{2a_1 \tau_0^+} x \right] \quad (22)$$

$$\begin{aligned} & \exp\left(-\frac{a_j^2 Q'_p + Q'_p \tau_0^+}{2a_j \tau_0^+} x\right), \\ & \exp\left(-\frac{a_j^2 Q'_p + Q'_p}{2a_j} x\right) \end{aligned} \quad (23)$$

衰减或放大. 低频波 ($\omega \rightarrow 0$, 其它参量不变时)的振幅以指数方式

$$\exp\left\{\pm \frac{\omega^{3/2}}{a_c} \left[(a_j^2 Q'_p + Q'_p) \frac{\tau_0}{\tau_0^+} \right]^{1/2} \frac{x}{Q'_p}\right\} \quad (24)$$

衰减或放大. 在 $Q'_p = 0$ 或 $Q'_p = 0$ 的特例下, 低频波的振幅分别以指数方式

$$\begin{aligned} & \exp\left[\pm \frac{\omega^{3/2}}{a_c} \left(\frac{\tau_0}{\tau_0^+ |Q'_p|}\right)^{1/2} x\right] \quad (Q'_p = 0), \\ & \exp\left[\pm \omega^{1/2} \left(|Q'_p| \frac{\tau_0^+}{\tau_0}\right)^{1/2} x\right] \quad (Q'_p = 0) \end{aligned} \quad (25)$$

衰减或放大. 这与绝热即 $Q'_p = Q'_p = 0$ 的条件下, 低频波的振幅以指数方式

$$\exp\left[-\frac{\omega^2}{2a_c} \left(1 - \frac{a_c^2}{a_j^2}\right) \tau_0^+ x\right]$$

衰减^[3]显然很不相同.

4) 衰减、放大以及慢衰现象: 由(18),(19)和(20)式可知, 对于反馈参量 Q'_p 和 Q'_p 的适当匹配, 气体的非平衡非绝热特性将使某些频率的扰动放大, 而使某些频率的扰动衰减, 某些频率的扰动出现慢衰现象. 这种复杂情况的一个算例在图4中给出. 在 $0 < (\omega\tau_0^+)^2 < 1.1$ 的范围内, 扰动被放大; 在 $(\omega\tau_0^+)^2 > 1.1$ 的参数范围内, 扰动被阻尼; 在 $(\omega\tau_0^+)^2 \approx 1.1$ 的邻域, 衰减长度和放大长度均趋向于无穷大, 实际形成了一个扰动慢衰区. 利用非绝热反馈的这一效应, 能够很好地解释大气中声频波和次声波的吸收异常现象^[9], 因此非绝热反馈为大气吸收异常^[9]提供了一个合理的物理机制. 图5给出一个在

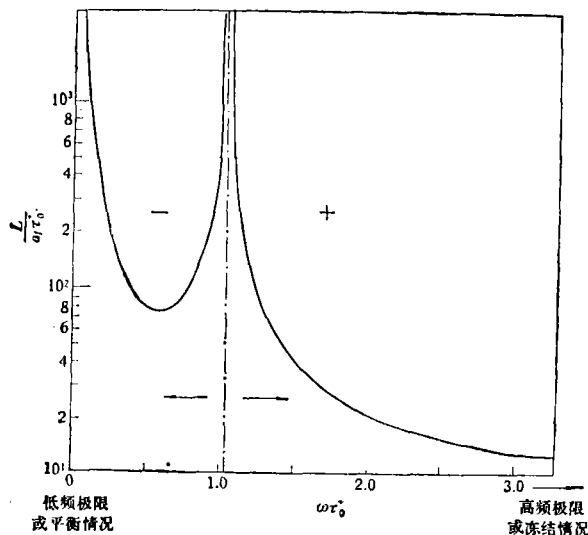


图4 放大-衰减长度 $L/a_j \tau_0^+$ 随 $\omega \tau_0^+$ 的变化 ($a_j/a_c = 1.1$, $\tau_0^+/\tau_0 = 1.1$, $a_j^2 Q'_p \tau_0^+ = 1$, $Q'_p \tau_0^+ = -1$; +为 $L > 0$, 即衰减区; -为 $L < 0$, 即放大区; ---为 $(\omega \tau_0^+)^2 = 1.1$)

衰减或放大；显然，在绝热条件下振幅以指数律衰减。非绝热平衡和冻结情况下，高频波振幅分别以指数方式所有频率范围内扰动被阻尼的算例，非绝热反馈情况与绝热情况相比，衰减长度减小约 $10-10^2$ 倍。图 6 给出一个在所有频率范围内扰动被放大的算例。

5) 非绝热反馈对噪声传播的阻尼作用：非平衡弛豫过程是气体介质的一种非均匀性，它与其它非均匀性一样同样能对气动噪声的传播产生阻尼作用^[5]，这与文献[5]得到的结论一致。这里还进一步得到如下结论：非平衡过程对高频波的阻尼较有效，对低频波的阻尼效果不大；非绝热过程能产生有效的阻尼作用，如对平衡气体，若条件 $Q'_p Q'_p \leq 0$ ， $a_1^2 Q'_p + Q'_p > 0$ 同时得到满足，则所有频率范围内均可得到有效的阻尼作用，参见图 5 中的曲线 C。

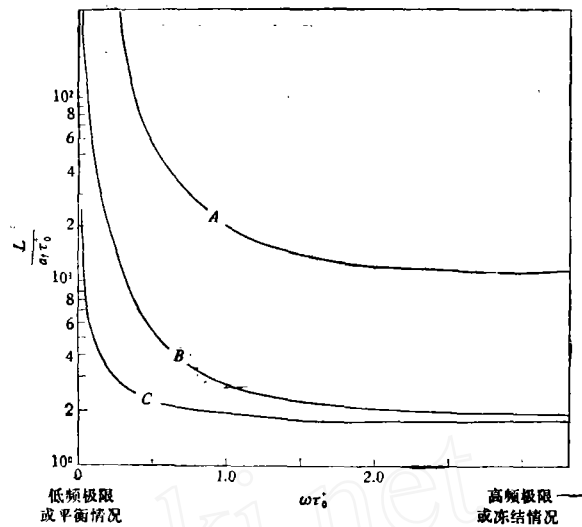


图 5 衰减长度 $L/a_1 \tau_0^+$ 随 $\omega \tau_0^+$ 的变化 ($a_1/a_e=1.1$, $\tau_0^+/\tau_0=1.1$; A:指绝热情况; B和C指非绝热情况; B: $Q'_p=0$, $Q'_p \tau_0^+=1$; C: $Q'_p=0$, $a_1^2 Q'_p \tau_0^+=1$)

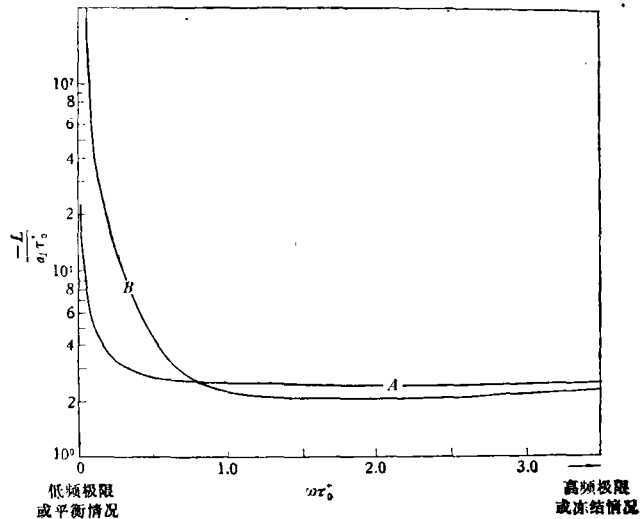


图 6 放大长度 $-L/a_1 \tau_0^+$ 随 $\omega \tau_0^+$ 的变化 ($a_1/a_e=1.1$, $\tau_0^+/\tau_0=1.1$; A: $Q'_p=0$, $a_1^2 Q'_p \tau_0^+=-1$; B: $Q'_p=0$, $Q'_p \tau_0^+=-1$)

四、弛豫波、压力波、密度波和热波模

为了进一步阐明非绝热过程对扰动传播的影响，把基本方程式(8)对空间变量作傅氏变换，得到

$$\tau_0^+ \left[\frac{1}{a_1^2} \frac{d^4 F}{dt^4} + k^2 \frac{d^2 F}{dt^2} + Q'_p \frac{d^3 F}{dt^3} - k^2 Q'_p \frac{dF}{dt} \right]$$

$$+ \frac{1}{a_c^2} \frac{\partial^3 F}{\partial t^3} + k^2 \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\tau_0^+}{\tau_0} \left(Q'_p \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} - k^2 Q'_p \frac{\partial F}{\partial t} \right) = 0, \quad (26)$$

其中 F 为 $\rho'(\mathbf{r}, t)$ 的傅氏变换,

$$F = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \rho'(\mathbf{r}, t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{r}, \quad (27)$$

$$\rho'(\mathbf{r}, t) = \int F(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{k}. \quad (28)$$

(27)式的积分遍及物理空间,(28)式的积分遍及三维波数空间 (k_1, k_2, k_3) , $k = |\mathbf{k}|$. 对于方程式(26), 不难求出它的指数形式解, 但十分复杂. 下面通过某些极限情况的分析, 给出弛豫波、压力波、密度波和热波模, 讨论它们的主要特征、相互关系以及稳定性问题.

1) 平衡、压力热反馈(即 $\tau_0^+ \rightarrow 0$, $Q'_p = 0$) 的情况 由(26)式求得相应于波数 k 的复分波解为

$$\begin{aligned} \rho'_k(\mathbf{r}, t) \sim & A_1 \exp \left\{ i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \frac{t}{2} \left[-Q'_p \frac{\tau_0^+}{\tau_0} + \left(\left(Q'_p \frac{\tau_0^+}{\tau_0} \right)^2 - 4k^2 a_c^2 \right)^{1/2} \right] \right\} \\ & + A_2 \exp \left\{ i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \frac{t}{2} \left[-Q'_p \frac{\tau_0^+}{\tau_0} - \left(\left(Q'_p \frac{\tau_0^+}{\tau_0} \right)^2 - 4k^2 a_c^2 \right)^{1/2} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (29)$$

其中 A_1 和 A_2 为待定常数. 我们定义与 $2ka_c \leq |Q'_p| \tau_0^+ / \tau_0$ (即波数 k 较小) 情况对应的零频率模为热波模或简称热模. 由(29)式可知, 当 $Q'_p < 0$ 时, 热模随时间而指数地增长; 当 $Q'_p > 0$ 时, 热模随时间成指数规律衰减. 对于波数 k 较大, 即满足 $2ka_c > |Q'_p| \tau_0^+ / \tau_0$ 的条件时, 形成随时间指数衰减(若 $Q'_p > 0$) 或指数增长(若 $Q'_p < 0$) 的波, 这种单纯因压力热反馈引起的波, 我们称它们为压力波. 在 $Q'_p = 0$ 即绝热的条件下, (29)式退化为相速度为 a_c , 不衰减的经典平衡声波.

2) 平衡、密度热反馈(即 $\tau_0^+ \rightarrow 0$, $Q'_p = 0$) 的情况 此时(26)式相应于波数 k 的复分波解为

$$\begin{aligned} \rho'_k(\mathbf{r}, t) \sim & \sum_{j=1}^3 A_j \exp \left\{ i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + (ka_c)^{2/3} t \left[Q_i^{j-1} \left(\frac{1}{2} Q'_p \frac{\tau_0^+}{\tau_0} \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + \left(\left(\frac{1}{2} Q'_p \frac{\tau_0^+}{\tau_0} \right)^2 + \frac{1}{27} k^2 a_c^2 \right)^{1/2} \right)^{1/3} \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + Q_i^{j-1} \left(\frac{1}{2} Q'_p \frac{\tau_0^+}{\tau_0} - \left(\left(\frac{1}{2} Q'_p \frac{\tau_0^+}{\tau_0} \right)^2 + \frac{1}{27} k^2 a_c^2 \right)^{1/2} \right)^{1/3} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (30)$$

$$Q_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \quad Q_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}, \quad (31)$$

其中 $A_j (j = 1, 2, 3)$ 为待定常数. (30)式中 $j = 1$ 的零频率模, 我们同样地定义为热模. (30)式中相应于 $j = 2, 3$ 的波为单纯密度反馈条件下的密度波. 若 $Q'_p > 0$, 则热模随时间而增长、密度波随时间而衰减; 当 $Q'_p < 0$ 时, 热模随时间衰减, 而密度波随时间增长. 在 $Q'_p = 0$ 即绝热的条件下, (30)式退化为相速度为 a_c 的不衰减的经典平衡声波. 可见, 对于平衡气体, 密度热反馈将导致热模和密度波同时出现, 当热模稳定 ($Q'_p < 0$) 时, 密度波发散; 当密度波稳定 ($Q'_p > 0$) 时, 热模发散. 这一结论与文献[7]关于气体放电热模不稳定的理论结论完全一致.

3) 非平衡绝热(即 $\tau_0^+ \neq 0$, $Q'_p = Q'_p = 0$) 的情况 此时 (26) 式相应于波数 k 的复分波解为

$$\begin{aligned} \rho'_k(\mathbf{r}, t) &\sim \sum_{j=1}^3 A_j \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \omega_j t), & (32) \\ \omega_j \tau_0^+ &= -\frac{a_j^2}{3a_c^2} + Q_i^{j-1} \left\{ -\frac{q^{**}}{2} + \left[\left(\frac{q^{**}}{2} \right)^2 + \left(\frac{p^*}{3} \right)^3 \right]^{1/2} \right\}^{1/3} \\ &+ Q_i^{j-1} \left\{ -\frac{q^{**}}{2} - \left[\left(\frac{q^{**}}{2} \right)^2 + \left(\frac{p^*}{3} \right)^3 \right]^{1/2} \right\}^{1/3}, & (33) \\ q^{**} &= (ka_j \tau_0^+)^2 \left(1 - \frac{a^2}{3a_c^2} \right) + \frac{2}{27} \left(\frac{a_j}{a_c} \right)^6, \\ p^* &= (ka_j \tau_0^+)^2 - \frac{1}{3} \left(\frac{a_j}{a_c} \right)^4. \end{aligned}$$

在复分波解(32)式中,相应于 $j = 1$ 的零频率模是相速度为无穷大的热模,相应于 $j = 2, 3$ 的波可称为非平衡弛豫波,简称弛豫波. 由于 $q^{**} > 0$, $[(q^{**}/2)^2 + (p^*/3)^3] \geq 0$, 故热模随时间总是衰减的;由于(33)式中第二项和第三项的实部之和总小于第一项,故弛豫波也总是随时间而衰减的,扰动在绝热非平衡气体中总是受到阻尼的结论是为大家所熟知的^[2].

4) 非平衡、压力热反馈(即 $\tau_0^+ \neq 0$, $Q'_p \neq 0$, $Q'_p = 0$) 的情况 此时 (26) 式的复分波解为

$$\begin{aligned} \rho'_k(\mathbf{r}, t) &\sim \sum_{j=1}^3 A_j \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \omega_j t), & (34) \\ \omega_j &= -\frac{1}{3} \left(\frac{a_j^2}{a_c^2 \tau_0^+} + a_j^2 Q'_p \right) + Q_i^{j-1} \left\{ -\frac{q_1}{2} + \left[\left(\frac{q_1}{2} \right)^2 + \left(\frac{p_1}{2} \right)^3 \right]^{1/2} \right\}^{1/3} \\ &+ Q_i^{j-1} \left\{ -\frac{q_1}{2} - \left[\left(\frac{q_1}{2} \right)^2 + \left(\frac{p_1}{2} \right)^3 \right]^{1/2} \right\}^{1/3}. & (35) \\ q_1 \tau_0^{+3} &= (ka_j \tau_0^+)^2 + \frac{2}{27} \left(\frac{a_j^2}{a_c^2} + a_j^2 Q'_p \tau_0^+ \right)^3 \\ &- \frac{1}{3} \left(\frac{a_j^2}{a_c^2} + a_j^2 Q'_p \tau_0^+ \right) \left[(ka_j \tau_0^+)^2 + a_j^2 Q'_p \tau_0^+ \frac{\tau_0^+}{\tau_0} \right], \\ p_1 \tau_0^{+2} &= (ka_j \tau_0^+)^2 + a_j^2 Q'_p \tau_0^+ \frac{\tau_0^+}{\tau_0} - \frac{1}{3} \left[\left(\frac{a_j}{a_c} \right)^2 + a_j^2 Q'_p \tau_0^+ \right]^2. \end{aligned}$$

这里 $A_j (j = 1, 2, 3)$ 为待定常数. 对 $Q'_p \neq 0$ 的情况,在中等波数 $k^2 (a_j Q'_p)^{-2} \geq 1/3$ 的波数范围内,(34)式中 $j = 1$ 的零频率模为热模,热模近似中性稳定. 对于波数很大的范围, $Q'_p > 0$ 时热模稳定, $Q'_p < 0$ 时热模不稳定. 在波数较小 $k^2 \leq \frac{1}{3} (a_j Q'_p)^2$ 的波数范围内,压力波在 $Q'_p > 0$ 时稳定,在 $Q'_p < 0$ 时不稳定. 应该注意到: 在冻结气体即 $\tau_0^+ \rightarrow \infty$ 的极限条件下,(34)式中 $i = 1$ 的波在 $k^2 < \frac{1}{3} (a_j Q'_p)^2$ 时为压力波;而当 $Q'_p \rightarrow 0$ 即绝热条件下,(34)式简化为(32)式, $i = 1$ 的热模成为弛豫波.

五、结 束 语

本文基于热扰反馈机制导出的非绝热、非平衡气体中扰动传播的基本方程式(8)能够正确地描述非平衡、非绝热气体中扰动传播的特性,可以解释放电气体热不稳定性的试验结果,以及大气对次声波吸收的异常现象;而把热扰处理为声学源的常规理论则不能反映上述波传播的非线性特性.

在非平衡、非绝热气体中,能够形成弛豫波、压力波、密度波和热波模. 这些波模相互作用,具有不稳定性. 这些波模失稳的物理机制是非绝热热扰的反馈作用,包括压力热反馈和密度热反馈.

参 考 文 献

- [1] K. F. Herzfeld and T. A. Litovitz, *Absorption and Dispersion of Ultrasonic Waves*, N. Y., Academic Press, (1959).
- [2] W. G. Vincenti and C. H. Kruger, Jr., *Introduction to Physical Gas Dynamics*, John Wiley, (1965).
- [3] J. F. Clarke, *Rep. Prog. Phys.*, **41**(6), (1978), 809.
- [4] J. F. Clarke, *J. Fluid Mech.*, **20**(1964), 209.
- [5] J. T. C. Liu, *J. Fluid Mech.*, **83** part 3(1977), 775.
- [6] G. Bekefi, *Principles of Laser Plasma*, John Wiley, (1976).
- [7] V. H. Jacob and S. A. Mani, *Appl. Phys. Lett.*, **26**(2) (1975), 53.
- [8] P. K. Kaw and J. M. Dawson, *Phys. Fluids*, **12**(1969), 2586.
- [9] E. H. Brown and F. F. Hall, Jr., *Rev. Geophys. & Phys.*, **16**(1) (1978), 47.

ON WAVES IN NONADIABATIC AND NONEQUILIBRIUM GASES

Gao Zhi

(*Institute of Mechanics, Academia Sinica*)

Lu Wen-qiang

(*Institute of Engineering Thermophysics, Academia Sinica*)

ABSTRACT

This paper deals with the propagation of the waves (including relaxation, pressure, and density waves) and thermal mode in nonadiabatic and nonequilibrium gases. Based on the mechanism of thermal disturbance feedback, a new governing equation for the propagation of disturbances and the dispersion relation has been obtained. Some new conclusions are reached. For example, the disturbance is either purely growing or slow-damped which presents a reasonable explanation for abnormal absorptive phenomena of infrasonic sound waves in atmosphere^[9]; nonadiabatic characteristic of gas can cause a remarkable dispersion phenomena; the propagation of noise can be damped, etc. In addition, the conclusion that pressure and density waves and thermal mode may be unstable agrees with the experimental fact about thermal instability in high power laser discharges^[6,7].