中 国 科 学
1983 年 12 月　　A 辑　　第 12 期

短熔体柱的定常轴对称热毛细运动

徐 建 军
(中国科学院力学研究所，北京)

摘　　要

本文处理了短熔体柱的定常轴对称热毛细运动．假定 Marangoni 数 $M \ll 1$，Reynolds 数 $Re \ll 1$ 以及毛细作用数 $\bar{C} \ll 1$．本文求得了级数形式的零级近似分析解，并对两种典型的外加温度分布的情况作出了数值计算．结果表明了端部效应对热毛细运动的重要影响．

一、引　　言

早在 1900 年 Bénard 仔细观察了由于温差引起的对流迴流[1]．设想一个从底部加热的流体层．流体温度的不均匀引起流体密度分布的不均匀，从而在流体内产生一种浮力梯度．当外加温差不大时，这种浮力被压力梯度所平衡，整个系统将保持稳定的平衡状态．但是当外加温度增大，并使 Reyleigh 数超过一定临界值时，这种平衡状态便会变得不稳定，流体将发生定常的迴流．整个流体层将出现一种十分美妙的格子图案．Bénard 曾拍摄记录了这些图案，这就是著名的 Bénard 对流图案．十六年之后，Rayleigh (1916) 对 Bénard 的实验进行了理论分析[2]，证明这种 Bénard 图案的出现是由于浮力引起的一种不稳定性机制造成的．到了 1958 年，在英国帝国化学国际有限公司研究部油化组工作的 Cousens 博士发现：一层干燥中的油漆薄层上也常常会出现类似 Bénard 对流图案的现象．观察并表明，这种图案的出现与重力方向没有多大关系．因为不管这个油漆层是在天花板上，还是在地板上，自由表面是在层的顶部或是在层的底部，情况都是一样．

显见，这种对流图案不是由前述的那种浮力引起的不稳定性机制造成的，它必然涉及了另一种截然不同的新机制．Cousens 认为这种新机制是由于表面张力引起的．Pearson 在 Cousens 想法的基础上，对问题进行了理论分析[3]．果然证明：当存在自由表面的情况下，由于温度变化引起的表面张力梯度，可以驱动流体表面物质运动，然后通过粘性作用造成整个流体内部的涡旋运动．人们把这种由于温差引起的、由表面张力驱动的流体运动称为热毛细运动或 Marangoni 对流迴流，以区别于 Bénard 对流迴流．在实验情况中所遇到的流体层，往往都存在有自由表面．因此 Pearson 所研究的这种由表面张力决定的运动机制，实际上要比 Bénard，Rayleigh 等人首先研究的由浮力决定的运动机制更为重要．更为有趣的是：Pearson 曾用自己的理论重新检验 Bénard 最初所观察的对流图案实验，居然发现那些实验中出现的对流格子图

本文 1982 年 10 月 23 日收到．

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

案，大都也是由于表面张力引起的!

在 Pearson 之后，有不少应用数学家及流体力学家相继大力开展了这方面的课题研究[4-8].

众所周知，在半导体晶体材料制作过程中，广泛采用"区熔法"(见图 1). 在这种工艺中，晶体焙体表面具有显著的温度分布不均匀性. 在这种问题中，温度梯度与自由表面切向方向一致. 所以这种外加的温度梯度将直接引起表面张力梯度，后者将驱动熔体表面物质运动，并通过粘性作用造成整个熔体内部的定常迴旋运动. 研究这种定常的热毛细运动及其稳定性问题，对理解晶体生长提纯过程中所出现的、诸如杂质层状分布等现象关系极大.

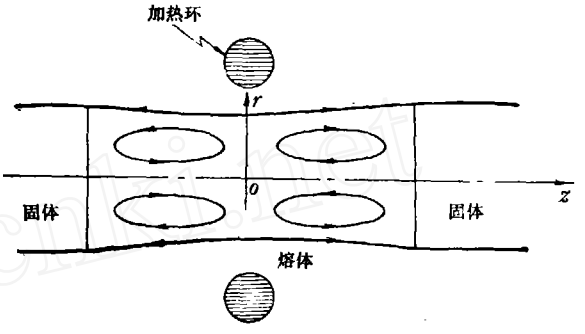


图 1 "区熔法"过程示意图

本文在处理了 Marangoni 数情况下的定常轴对称热毛细运动. 对于两种典型的环境空气温度分布，我们给出了级数形式的分析解.

二、问题的数学提法

选取轴坐标 (r, θ, z)，如图 1 所示，设固体圆柱半径为 a，熔区长度为 $(2b)$，熔区的环境空气温度分布为 $Ta(z)$，熔体表面的表面张力系数 σ 与熔体表面温度 T 的关系式是:

$$\sigma = \sigma_0 - r(T - T_*). \tag{2.1}$$

引入如下无量纲量

$$\begin{cases} \bar{r} = \dfrac{r}{a},\ \bar{z} = \dfrac{z}{a},\ \sigma = \dfrac{\sigma}{\sigma_0}, \\ \bar{u} = \dfrac{u}{w_*},\ \bar{w} = \dfrac{w}{w_*},\ \bar{T} = \dfrac{T - T_*}{\Delta T}, \\ \bar{p} = \dfrac{p}{\sigma_0/a} \end{cases} \tag{2.2}$$

其中 $\Delta T = (T_{\max} - T_{\min})$ 为特征温度差，从(2.1)，(2.2)式我们可得

$$\bar{\sigma} = 1 - \bar{C}\bar{T}, \tag{2.3}$$

$$\bar{C} = \frac{r\Delta T}{\sigma_0}. \tag{2.4}$$

作为特征速度 w_*，考虑到流体运动是由于表面张力梯度驱动的. 表面张力梯度应与表面粘性切向应力相平衡，因此有

$$\frac{\mu w_*}{a} \sim \frac{\Delta\sigma}{a} = \frac{r\Delta T}{a}. \tag{2.5}$$

这样，我们推出(参看文献[9])

$$w_* = \frac{r\Delta T}{\mu} = \frac{\sigma_0\bar{C}}{\mu}, \tag{2.6}$$

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

流动雷诺数是

$$R_e = \frac{\rho w_* a}{\mu} = \frac{\rho \sigma_0 a}{\mu^2} \bar{C} \tag{2.7}$$

以及 Marangoni 数是

$$M = R_e P_r = \frac{\rho w_* a}{K}, \tag{2.8}$$

其中 P_r 为 Prandtl 数，K 是热扩散系数.

我们再假定熔体为不可压，粘性牛顿流体没有任何体积力作用，利用上述各无量纲量可导出如下无量纲基本方程(如方便起见，略去所有变量的上标"—")

$$\begin{cases} \dfrac{\partial(ru)}{\partial r} + \dfrac{\partial(rw)}{\partial z} = 0, & (2.9) \\ \bar{R}_e \bar{C}\left[u\dfrac{\partial u}{\partial r} + w\dfrac{\partial u}{\partial z}\right] = -\dfrac{1}{\bar{C}}\dfrac{\partial p}{\partial r} + \nabla^2 u - \dfrac{u}{r^2}, & (2.10) \\ \bar{R}_e \bar{C}\left[u\dfrac{\partial w}{\partial r} + w\dfrac{\partial w}{\partial z}\right] = -\dfrac{1}{\bar{C}}\dfrac{\partial p}{\partial z} + \nabla^2 w, & (2.11) \\ \bar{M}\bar{C}\left[u\dfrac{\partial T}{\partial r} + w\dfrac{\partial T}{\partial z}\right] = \nabla^2 T, & (2.12) \end{cases}$$

其中设

$$\begin{cases} R_e = \bar{R}_e \bar{C}, \ M = \bar{M}\bar{C}, \\ \nabla^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial z^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}. \end{cases} \tag{2.13}$$

相应的无量纲边条件是:

1.表面条件　设无量纲表面形状函数 $R(z)$. 这样当

$$r = R(z), \quad |z| \leqslant b_0 = \frac{b}{a} \text{ 时},$$

(1) 运动学条件:

$$u = \left(\frac{dR}{dz}\right) w. \tag{2.14}$$

(2) 法向应力平衡条件:

$$-p + \frac{\partial}{N_n^2}\bar{C}\left[\frac{\partial u}{\partial r} + \left(\frac{dR}{dz}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) + \left(\frac{dR}{dz}\right)^2 \frac{dw}{dz}\right] = K(1 - \bar{C}T). \tag{2.15}$$

(3) 切向应力平衡条件:

$$\frac{1}{N_n}\left\{\left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)\left[1 - \left(\frac{dR}{dz}\right)^2\right] + 2\left(\frac{dR}{dz}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial w}{\partial z}\right)\right\}$$
$$= -\left(\frac{\partial T}{\partial z} + \frac{dR}{dz}\frac{\partial T}{\partial r}\right). \tag{2.16}$$

(4) 表面热流平衡条件:

$$\frac{1}{N_n}\left(\frac{\partial T}{\partial r} - \frac{dR}{dz}\frac{\partial T}{\partial z}\right) + L(T - T_a(z)) = 0, \tag{2.17}$$

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

其中

$$N_n = \left[1 + \left(\frac{dR}{dz}\right)^2\right]^{1/2}, \tag{2.18}$$

$$K = \frac{R''}{(1 + R'^2)^{3/2}} - \frac{1}{R(1 + R'^2)^{1/2}}, \tag{2.19}$$

$$L = k_g a / k_l. \tag{2.20}$$

K 为无量纲表面曲率，k_l, k_g 分别为流体与空气的热传导系数，L 为 Biot 数.

2. 端部条件　当 $z = \pm b_0$, $0 \leqslant r < R_b$,

$$\begin{cases} R = R_b(\pm b_0), & (2.21) \\ T = T_a(\pm b_0) & (2.22) \\ u = 0, & (2.23) \\ w = 0. & (2.24) \end{cases}$$

3. 物质守恒条件:

$$Q = 2\pi \int_0^R r w dr = 0; \quad V = \pi \int_{-b_0}^{b_0} R^2 dz. \tag{2.25}$$

三、小 Marangoni 数条件下的零级近似方程与边界条件

我们假设，参数 $\bar{C} \ll 1$. 这符合大多数实际情况，这表明熔体的平均表面张力 σ_0 十分大. 此外进一步假定，流动 Marangoni 数 $M = O(\bar{C})$ 很小. 对于液体，由于 Prandtl 数 $P_r > 1$，所以这时总有 $R_e = O(\bar{C}) \ll 1$. 这样，再引入假设:

$$\bar{C} \ll 1, \quad \bar{M} = O(1), \quad \bar{R}_e = O(1). \tag{3.1}$$

注意到，当 $\bar{C} = 0$ 时，存在一个恒温的平衡态:

$$R = R_0(z), \quad p = p_E = -K_0. \tag{3.2}$$

我们作如下级数展开

$$T = T_0 + \bar{C}T_1 + \bar{C}^2 T_2 + \cdots\cdots, \tag{3.3}$$

$$R = R_0 + \bar{C}R_1 + \bar{C}^2 R_2 + \cdots\cdots, \tag{3.4}$$

$$p = p_E + \bar{C}p_0 + \bar{C}^2 p_1 + \cdots\cdots, \tag{3.5}$$

$$u = u_0 + \bar{C}u_1 + \bar{C}^2 u_2 + \cdots\cdots, \tag{3.6}$$

$$w = w_0 + \bar{C}w_1 + \cdots\cdots, \tag{3.7}$$

$$K = K_0 + \bar{C}K_1 + \cdots\cdots, \tag{3.8}$$

$$N_n = N_{n_0} + \bar{C}N_{n_1} + \cdots\cdots. \tag{3.9}$$

把上述展开式代入方程(2.9)—(2.12)，以及各边界条件(2.14)—(2.25)，可得到各级近似方程与边界条件. 作为首项的零级近似解，应满足如下基本方程

$$\begin{cases} div\vec{u}_0 = 0, \quad \vec{u}_0 = (u_0, w_0), & (3.10) \\ \nabla p_0 = \nabla^2 \vec{u}_0, & (3.11) \\ \nabla^2 T_0 = 0. & (3.12) \end{cases}$$

至于边界条件，我们假定平衡态的表面形状是圆柱形，因此

$$R_0(z) \equiv 1, \quad K_0 = -1. \tag{3.13}$$

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

在这种情况下

1. 表面边界条件为：当 $r=1$，$|z|\leqslant b_0$ 时，

(1)
$$u_0=0, \tag{3.14}$$

(2)
$$-p_0+2\left(\frac{\partial u_0}{\partial r}\right)=T_0(1,z)+R_1''+R_1, \tag{3.15}$$

(3)
$$\frac{\partial w_0}{\partial r}+\frac{\partial u_0}{\partial z}=-\frac{\partial T_0}{\partial z}, \tag{3.16}$$

(4)
$$\frac{\partial T_0}{\partial r}+L(T_0-T_a(z))=0. \tag{3.17}$$

2. 端部条件：当 $z=\pm b_0$ 时，

(1)
$$R_1=0, \tag{3.18}$$

(2)
$$T_0=T_a(\pm b_0), \tag{3.19}$$

(3)
$$u_0=0, \tag{3.20}$$

(4)
$$w_0=0. \tag{3.21}$$

3. 守恒条件

$$\int_0^1 rw_0dr=\frac{Q}{2\pi}=0, \tag{3.22}$$

$$\int_{-b_0}^{b_0} R_1dz=0. \tag{3.23}$$

四、零级近似方程的基本解

现在，我们来求解方程(3.10)—(3.12)。为方便起见，以后略去下标“0”。把流函数 $\psi(r,z)$ 表为：

$$\psi=r\frac{\partial f}{\partial r}. \tag{4.1}$$

因此

$$\begin{cases} u=\dfrac{\partial^2 f}{\partial r\partial z}, & (4.2)\\ w=-\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial f}{\partial r}\right). & (4.3)\end{cases}$$

注意到 LapLace 算子 ∇^2 有如下性质

$$\begin{cases} \nabla^2\left(\dfrac{\partial}{\partial r}\right)=\dfrac{\partial}{\partial r}(\nabla^2)+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}, & (4.4)\\ \nabla^2\left(\dfrac{\partial}{\partial z}\right)=\dfrac{\partial}{\partial z}(\nabla^2). & (4.5)\end{cases}$$

可把方程(3.11)化为：

$$\frac{\partial p}{\partial r}=\frac{\partial}{\partial r}\left\{\nabla^2\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\right\}, \tag{4.6}$$

$$\frac{\partial p}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}\left\{\nabla^2\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\right\}-\nabla^4 f \tag{4.7}$$

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

或者写为

$$\nabla p = \nabla\left\{\nabla^2\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\right\} - (\nabla^4 f)\hat{e}_z, \tag{4.8}$$

其中 $\hat{e}_z$ 为 z 轴的方向向量. 由上式,即得到

$$\begin{cases} \nabla^2\left(\dfrac{\partial f}{\partial z}\right) - p = F, & (4.9) \\ \dfrac{\partial F}{\partial r} = \dfrac{\partial F}{\partial \theta} = 0, & (4.10) \\ \dfrac{\partial F}{\partial z} = \nabla^4 f. & (4.11) \end{cases}$$

从(4.1)式看出,函数 f 可以增加任意常函数项 $F_*(z)$,而不影响流函数 $\psi(r, z)$,因此,从(4.9)—(4.11)式,可设

$$\nabla^4 f = 0 \tag{4.12}$$

和

$$p = \nabla^2\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial z^3} - \frac{\partial w}{\partial z}. \tag{4.13}$$

双调和函数(4.12)式可以有如下形式的基本解:

$$\begin{cases} f_s^{(1)} = J_0(\lambda r)\{E\,\mathrm{ch}\,(\lambda z) + Dz\,\mathrm{sh}\,(\lambda z)\}, \\ f_a^{(1)} = J_0(\lambda r)\{Ez\,\mathrm{ch}\,(\lambda z) + D\,\mathrm{sh}\,(\lambda z)\}, \\ f_s^{(2)} = \cos(\beta z)\{AI_0(\beta r) + BrI_1(\beta r)\}, \\ f_a^{(2)} = \sin(\beta z)\{AI_0(\beta r) + BrI_1(\beta r)\}, \end{cases} \tag{4.14}$$

$$f_B(r, z) = \frac{g_0}{24}\left(z^4 - \frac{3}{8}r^4\right) + \frac{1}{2}\left(g_2 z^2 + \frac{h_0}{2}r^2\right) + \frac{g_1}{6}z^3 + g_3 z + g_4. \tag{4.15}$$

这里下标"a"表示该解相对 $z=0$ 平面反对称,下标"s"表示解对 $z=0$ 平面对称.

有了解 $f(r, z)$ 之后,利用(4.1),(4.2),(4.13)式很容易推出

$$\begin{cases} u_s^{(1)} = -\lambda J_1(\lambda r)[(E\lambda + D)\,\mathrm{sh}\,(\lambda z) + D\lambda z\,\mathrm{ch}\,(\lambda z)], \\ u_a^{(1)} = -\lambda J_1(\lambda r)[(E\lambda + D)\,\mathrm{ch}\,(\lambda z) + E\lambda z\,\mathrm{sh}\,(\lambda z)], \\ u_s^{(2)} = -\beta^2\sin(\beta z)[AI_1(\beta r) + BrI_0(\beta r)], \\ u_a^{(2)} = \beta^2\cos(\beta z)[AI_1(\beta r) + BrI_0(\beta r)], \\ w_s^{(1)} = \lambda^2 J_0(\lambda r)[E\,\mathrm{ch}\,(\lambda z) + Dz\,\mathrm{sh}\,(\lambda z)], \\ w_a^{(1)} = \lambda^2 J_0(\lambda r)[Ez\,\mathrm{ch}\,(\lambda z) + D\,\mathrm{sh}\,(\lambda z)], \\ w_s^{(2)} = -\beta\cos(\beta z)[(2B + \beta A)I_0(\beta r) + B\beta rI_1(\beta r)], \\ w_a^{(2)} = -\beta\sin(\beta z)[(A\beta + 2B)I_0(\beta r) + B\beta rI_1(\beta r)], \\ p_s^{(1)} = 2D\lambda^2\,\mathrm{sh}\,(\lambda z)J_0(\lambda r),\ p_a^{(1)} = 2E\lambda^2\,\mathrm{ch}\,(\lambda z)J_0(\lambda r), \\ p_s^{(2)} = -2B\beta^2\sin(\beta z)I_0(\beta r),\ p_a^{(2)} = 2B\beta^2\cos(\beta z)I_0(\beta r) \end{cases} \tag{4.16}$$

以及

$$u_B = 0, \quad w_B = \frac{1}{4}g_0 r^2 - h_0, \quad p_B = g_0 z + g_1. \tag{4.17}$$

此外,从方程(3.12),可解出解

$$T(r, z) = T_s + T_a + T_B, \tag{4.18}$$

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\begin{cases} T_s = M\,\mathrm{ch}\,(\hat{\lambda}z)J_0(\hat{\lambda}r) + N\cos(\hat{\beta}z)I_0(\hat{\beta}r), \\ T_a = M\,\mathrm{sh}\,(\hat{\lambda}z)J_0(\hat{\lambda}r) + N\sin(\hat{\beta}z)I_0(\hat{\beta}r), \\ T_B = \hat{g}_1 z + \hat{g}_2 + \dfrac{1}{2}\hat{g}_0\left(z^2 - \dfrac{r^2}{2}\right). \end{cases} \tag{4.19}$$

在上述各种解中，$\{A, B, D, E, \lambda, \beta, M, N, \hat{\lambda}, \hat{\beta}, g_0, g_1, h_0, \hat{g}_0, \hat{g}_1, \hat{g}_2\}$ 是任意常数，这些常数将根据具体情况下的边界条件来确定。

五、特例 I: $T_a(z) = -Az$

下面将讨论几种典型情形。首先假定环境温度是 z 的反对称函数，亦即

$$T_a(z) = -Az. \tag{5.1}$$

这种情形可视为"半熔区"的一个简化模型。

从边界条件(3.17)，可推出：

$$T = -Az. \tag{5.2}$$

另一方面，取

$$\begin{cases} f = f_s^{(1)} + f_B, \quad u = u_s^{(1)} + u_B, \\ w = w_s^{(1)} + w_B, \quad p = p_s^{(1)} + p_B. \end{cases} \tag{5.3}$$

利用边界条件(3.14)式，可推出：

$$J_1(\lambda) = 0, \quad \lambda = \lambda_n \quad (n = 1, 2, \cdots\cdots) \tag{5.4}$$

以及

$$(E_n\lambda_n + D_n)\,\mathrm{sh}\,(\lambda_n b_0) + D_n\lambda_n b_0\,\mathrm{ch}\,(\lambda_n b_0) = 0, \tag{5.5}$$

或

$$E_n = -\frac{D_n}{\lambda_n}[1 + b_0\lambda_n\,\mathrm{cth}\,(\lambda_n b_0)]. \tag{5.6}$$

这样，可把解 u, w, 表为如下级数形式

$$u(r, z) = -\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n J_1(\lambda_n r)\{(E_n\lambda_n + D_n)\,\mathrm{sh}\,(\lambda_n z) + D_n\lambda_n z\,\mathrm{ch}\,(\lambda_n z)\}. \tag{5.7}$$

$$w(r, z) = \frac{g_0}{4}r^2 - h_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^2 J_0(\lambda_n r)\{E_n\,\mathrm{ch}\,(\lambda_n z) + D_n z\,\mathrm{sh}\,(\lambda_n z)\}. \tag{5.8}$$

再利用边界条件(3.16)式，有

$$\left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)_{r=1} = \left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)_{r=1} = -\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)_{r=1} = A. \tag{5.9}$$

从而推得

$$g_0 = 2A. \tag{5.10}$$

另外，利用条件 $w_0 = 0$, 还得到

$$-\frac{A}{2}r^2 + h_0 = \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^2 J_0(\lambda_n r)\{E_n\,\mathrm{ch}\,(\lambda_n b_0) + D_n b_0\,\mathrm{sh}\,(\lambda_n b_0)\}. \tag{5.11}$$

由于 $\{J_0(\lambda_n r)\}$ 函数族的如下正交特性

$$\int_0^1 rJ_0(\lambda_n r)J_0(\lambda_n r)dr = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \dfrac{1}{2}J_0^2(\lambda_n), & m = n. \end{cases} \tag{5.12}$$

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$$\int_0^1 rJ_0(\lambda_n r)dr = 0. \tag{5.13}$$

从(5.11)及(5.6)式,导出:

$$D_n = \frac{A\Omega_n}{\lambda_n J_0^2(\lambda_n)}\{\lambda_n b_0 \operatorname{sh}(\lambda_n b_0) - [1 + \lambda_n b_0 \operatorname{cth}(\lambda_n b_0)]\operatorname{ch}(\lambda_n b_0)\}^{-1}, \tag{5.14}$$

$$\Omega_n = \int_0^1 r^3 J_0(\lambda_n r)dr = -\frac{2J_2(\lambda_n)}{\lambda_n^2} = \frac{2J_0(\lambda_n)}{\lambda_n^2}. \tag{5.15}$$

再根据物质流守恒条件(3.22)式,由(5.11)式还可得出

$$\int_0^1 \left(\frac{A}{2}r^3 - h_0 r\right)dr = 0, \quad h_0 = \frac{A}{4}. \tag{5.16}$$

这样我们解出

$$w = \left(\frac{r^2}{2} - \frac{1}{4}\right)A + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 J_0(\lambda_n r)[E_n \operatorname{ch}(\lambda_n z) + D_n z \operatorname{sh}(\lambda_n z)], \tag{5.17}$$

$$p = p_s^{(1)} + p_B = 2Az + g_1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 D_n \operatorname{sh}(\lambda_n z)J_0(\lambda_n z) \tag{5.18}$$

以及流函数

$$\psi = -\int_0^r r_1 w(r_1, z)dr_1 = \frac{Ar^2}{8}(1 - r^2) - \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n r J_1(\lambda_n r)[E_n \operatorname{ch}(\lambda_n z) + D_n z \operatorname{sh}(\lambda_n z)]. \tag{5.19}$$

最后,我们考察对表面形状的修正. 为此利用表面条件(3.15)式

$$R_1'' + R_1 = \left\{-p + 2\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right) + Az\right\}_{r=1}. \tag{5.20}$$

将(5.7),(5.18)式代入上式,推得:

$$L_2\{R_1\} = R_1'' + R_1 = H(z) - g_1 - Az, \tag{5.21}$$

其中

$$H(z) = -2\sum_{n=1}^{\infty} D_n \lambda_n^2 J_0(\lambda_n)\{\lambda_n z \operatorname{ch}(\lambda_n z) + [1 - \lambda_n b_0 \operatorname{cth}(\lambda_n z_0)]\operatorname{sh}(\lambda_n z)\}. \tag{5.22}$$

由(5.21)式,可解出:

$$R_1(z) = -Az - g_1 + \Theta_1 \cos z + \Theta_2 \sin z + R_*(z), \tag{5.23}$$

其中

$$R_*(z) = 2\sum_{n=1}^{\infty} D_n J_0(\lambda_n)\frac{\lambda_n^2}{1 + \lambda_n^2}\left\{\left[\frac{\lambda_n^2 - 1}{\lambda_n^2 + 1} + \lambda_n b_0 \operatorname{cth}(\lambda_n b_0)\right]\operatorname{sh}(\lambda_n b_0) - \lambda_n z \operatorname{ch}(\lambda_n z)\right\}. \tag{5.24}$$

假定 $b_0 < \pi$(注意: $b_0 = n\pi$ 是圆柱形液体柱的解的分歧点),由边界条件(3.8),(3.13)式推出:

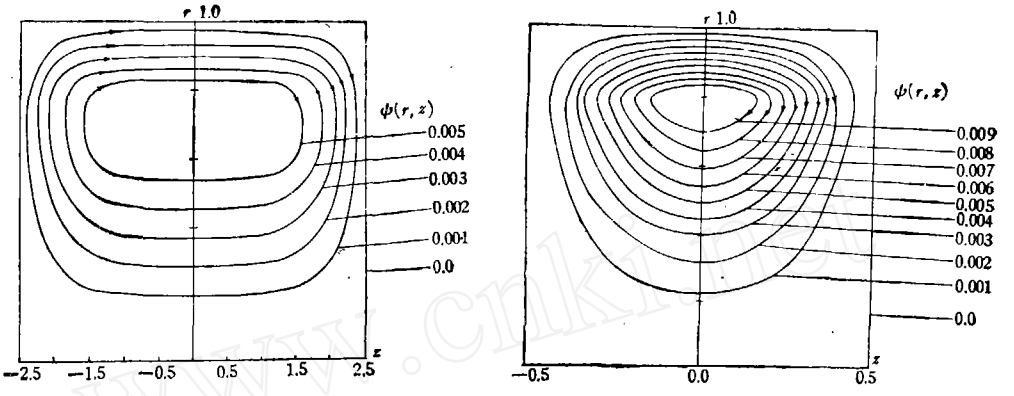
$$\Theta_1 = g_1 = 0, \quad \Theta_2 = \frac{1}{\sin b_0}[Ab_0 - R_*(b_0)]. \tag{5.25}$$

因此

$$R_1(z) = -Az + Ab_0\frac{\sin z}{\sin b_0} - \frac{\sin z}{\sin b_0}R_*(b_0) + R_*(z). \tag{5.26}$$

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

在图 2(a)，(b) 中分别给出了 $A = b_0^{-1}$，$b_0 = 0.5$，2.5 的流线分布图.



(a) $b_0 = 0.5$　　(b) $b_0 = 2.5$

图 2　特例 I 的流线图

六、特例 II，$T_a = 1/2 - 4A^2z^2$

现转而处理另一种更为实际的特例，设

$$T_a(z) = \frac{1}{2} - 4A^2z^2, \tag{6.1}$$

取

$$\begin{cases} T = T_s^{(1)} + T_B, \\ T_s^{(1)} = \sum_{n=1}^{\infty} M_n \operatorname{ch}(\hat{\lambda}_n z) J_0(\hat{\lambda}_n r), \\ T_B = \frac{1}{2}\hat{g}_0\left(z^2 - \frac{r^2}{2}\right) + \hat{g}_2. \end{cases} \tag{6.2}$$

从边界条件(3.17)式，令：

$$\left(\frac{\partial T_B}{\partial r}\right)_{r=1} + L\left[T_B - \left(\frac{1}{2} - 4A^2z^2\right)\right]_{r=1} = 0, \tag{6.3}$$

$$\left(\frac{\partial T_s^{(1)}}{\partial r}\right)_{r=1} + L(T_s^{(1)})_{r=1} = 0. \tag{6.4}$$

由此推得

$$\begin{cases} \hat{g}_0 = -8A^2, \\ \hat{g}_2 = \frac{1}{2} - 4A^2\left(\frac{1}{L} + \frac{1}{2}\right) \end{cases} \tag{6.5}$$

以及

$$LJ_0(\hat{\lambda}_n) - \hat{\lambda}_n J_1(\hat{\lambda}_n) = 0. \tag{6.6}$$

对于给定的 Biot 数，由方程(6.6)可解出 $\{\hat{\lambda}_n\}$. 在表1中我们列出了前五个值.

另一方面，为了满足端部条件(3.19)式，我们需选取合适的系数 $\{M_n\}$. 因为，

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$$(T)_{z=\pm b_0}=\frac{1}{2}-4A^2b_0^2=\frac{1}{2}-4A^2b_0^2+4A^2\left(\frac{1}{2}^2-\frac{1}{2}-\frac{1}{L}\right)$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}M_n\mathrm{ch}(\hat{\lambda}_nb_0)J_0(\hat{\lambda}_nr),\tag{6.7}$$

以及

$$\int_0^1 rJ_0(\hat{\lambda}_nr)J_0(\hat{\lambda}_mr)dr=\begin{cases}0 & (m\neq n),\\ \dfrac{J_0^2(\hat{\lambda}_n)}{2\hat{\lambda}_n}(L^2+\hat{\lambda}_n^2)_{(m=n)}\end{cases}\tag{6.8}$$

$$\int_0^1 r^{N+1}(1-r^2)^{\mu}J_N(\hat{\lambda}_nr)dr=2^{\mu}\Gamma(\mu+1)\hat{\lambda}_n^{-(1+\mu)}J_{N+\mu+1}(\hat{\lambda}_n).\tag{6.9}$$

我们推得:

$$M_n=\frac{8A^2}{J_0^2(\hat{\lambda}_n)\,\mathrm{ch}\,(\hat{\lambda}_nb_0)(L^2+\hat{\lambda}_n^2)}[J_0(\hat{\lambda}_n)+J_2(\hat{\lambda}_n)]_{(L\neq 0)},\tag{6.10}$$

这样,温度分布解就完全确定了.

$$T(r,z)=\frac{1}{2}-4A^2z^2+4A^2\left(\frac{r^2}{2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{L}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}M_n\,\mathrm{ch}\,(\hat{\lambda}_nz)J_0(\hat{\lambda}_nr).\tag{6.11}$$

下面,我们还需确定速度分布解与压力分布解,设

$$\begin{cases}f=f_B+f_a^{(1)}+f_a^{(2)},\ u=u_B+u_a^{(1)}+u_a^{(2)},\\ w=w_B+w_a^{(1)}+w_a^{(2)},\ p=p_B+p_a^{(1)}+p_a^{(2)},\end{cases}\tag{6.12}$$

其中

$$\begin{cases}u_a^{(1)}=-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lambda_nJ_1(\lambda_nr)[(E_n+\lambda_nD_n)\,\mathrm{ch}\,(\lambda_nz)+E_n\lambda_nz\,\mathrm{sh}\,(\lambda_nz)],\\ u_a^{(2)}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\beta_n^2\cos(\beta_nz)[A_nI_1(\beta_nr)+B_nrI_0(\beta_nr)],\\ w_a^{(1)}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lambda_nJ_0(\lambda_nr)[E_nz\,\mathrm{ch}\,(\lambda_nz)+D_n\,\mathrm{sh}\,(\lambda_nz)],\\ w_a^{(2)}=-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\beta_n^2\sin(\beta_nz)\left[\left(A_n+\dfrac{2B_n}{\beta_n}\right)I_0(\beta_nr)+B_nrI_1(\beta_nr)\right],\\ p_a^{(1)}+p_a^{(2)}=2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\{\lambda_n^2E_n\mathrm{ch}(\lambda_nz)J_0(\lambda_nr)+\beta_n^2B_n\cos(\beta_nz)I_0(\beta_nr)\}.\end{cases}\tag{6.13}$$

由于边界条件(3.14),(3.20)式,我们令:

$$(u_a^{(1)})_{r=1}=(u_a^{(2)})_{r=1}=(u_a^{(1)})_{z=\pm b_0}=(u_a^{(2)})_{z=\pm b_0}=0.\tag{6.14}$$

因而,推得:

$$\begin{cases}J_1(\lambda_n)=0,\\ \cos(\beta_nb_0)=0,\quad \beta_n=\left(n-\dfrac{1}{2}\right)\dfrac{\pi}{b_0}\quad(n=1,2,\cdots\cdots),\\ E_n=-\lambda_nD_n\dfrac{1}{1+\lambda_nb_0\,\mathrm{th}\,(\lambda_nb_0)},\\ A_n=-B_n\dfrac{I_0(\beta_n)}{I_1(\beta_n)}.\end{cases}\tag{6.15}$$

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

由于表面条件

$$\left(\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{r=1}=-\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)_{r=1}, \tag{6.16}$$

得到：

$$-\frac{g_0}{2}-2\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n^2B_nI_1(\beta_n)\sin(\beta_nz)=8A^2z-\sum_{m=1}^{\infty}M_m\hat{\lambda}_mJ_0(\hat{\lambda}_m)\mathrm{sh}(\hat{\lambda}_mz). \tag{6.17}$$

从而推出：

$$\begin{cases} g_0=0, \\ B_n=\dfrac{-8A^2\ln+\sum\limits_{m=1}^{\infty}k_{mn}M_m\hat{\lambda}_mJ_0(\hat{\lambda}_m)}{2\beta_n^2I_1(\beta_n)}, \end{cases} \tag{6.18}$$

其中

$$\begin{cases} \ln=\dfrac{2}{b_0\beta_n^2}(-1)^{n+1}, \\ k_{mn}=\dfrac{2(-1)^{n+1}}{b_0}\dfrac{\hat{\lambda}_m}{\hat{\lambda}_m^2+\beta_n^2}\mathrm{ch}(\hat{\lambda}_mb_0). \end{cases} \tag{6.20}$$

最后由于端部条件 $w_0=0$，我们得到：

$$\sum_{n=1}^{\infty}D_n\lambda_n^2J_0(\lambda_nr)\left\{\mathrm{sh}(\lambda_nb_0)-\frac{\lambda_nb_0\,\mathrm{ch}(\lambda_nb_0)}{1+\lambda_nb_0\,\mathrm{th}(\lambda_nb_0)}\right\}$$
$$=h_0+\sum_{m=1}^{\infty}\beta_m^2(-1)^{m+1}\left\{\left(A_m+\frac{2B_m}{\beta_m}\right)I_0(\beta_mr)+B_mrI_1(\beta_mr)\right\}. \tag{6.21}$$

由此，可解出：

$$h_0=0,$$
$$D_n=\frac{2}{\lambda_n^2J_0^2(\lambda_n)}\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\beta_m\{(A_m\beta_m+2B_m)I_0(\beta_m)S_1(mn)+B_m\beta_mI_1(\beta_m)S_2(mn)\}$$
$$\cdot\left\{\mathrm{sh}(\lambda_nb_0)-\frac{\lambda_nb_0\,\mathrm{ch}(\lambda_nb_0)}{1+\lambda_nb_0\,\mathrm{th}(\lambda_nb_0)}\right\}^{-1}, \tag{6.22}$$

其中

$$\begin{cases} S_1(m,n)=\displaystyle\int_0^1rJ_0(\lambda_nr)\left(\frac{I_0(\beta_mr)}{I_0(\beta_m)}\right)dr, \\ S_2(m,n)=\displaystyle\int_0^1r^2J_1(\lambda_nr)\left(\frac{I_1(\beta_mr)}{I_1(\beta_m)}\right)dr. \end{cases} \tag{6.23}$$

至此，所有任意常数均已确定．流函数 $\phi(r,z)$ 有如下表达式：

$$\phi(r,z)=\sum_{m=1}^{\infty}\beta_m\sin(\beta_mz)[A_mrI_1(\beta_mr)+B_mr^2I_0(\beta_mr)]$$
$$-\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_nrJ_1(\lambda_nr)[E_nz\,\mathrm{ch}(\lambda_nz)+D_n\,\mathrm{sh}(\lambda_nz)]. \tag{6.24}$$

在图3 (a)，(b) 中，我们分别给出了 $L=1.0$，$A=b_0^{-1}$，$b_0=0.5$，2.5 的流线分布图．

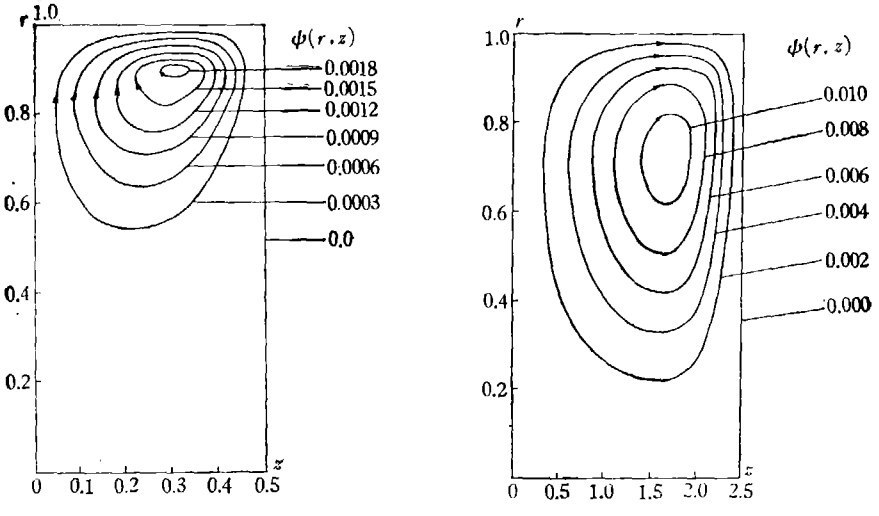
利用表面条件(3.15)式，同样可得出表面形状修正．设 $b_0<\pi$，我们解出：

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$$R_1(z) = -4A^2(z^2 - b_0^2) + R_s(z) - R_s(b_0) + \frac{\cos z - \cos b_0}{b_0 \cos b_0 - \sin b_0}$$
$$\cdot \left[\frac{8A^2}{3} b_0^3 - b_0 R_s(b_0) + \int_0^{b_0} R_s dz\right], \tag{6.25}$$

其中

$$R_s(z) = -\sum_{m=1}^{\infty} M_m J_0(\hat{\lambda}_m) \frac{\mathrm{ch}(\hat{\lambda}_m z)}{1 + \hat{\lambda}_m^2} - 2\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 J_0(\lambda_n)$$
$$\cdot \left[(2E_n + \lambda_n D_n) \frac{\mathrm{ch}(\lambda_n z)}{1 + \lambda_n^2} + \lambda_n E\left(\frac{z\,\mathrm{sh}(\lambda_n z)}{1 + \lambda_n^2} - \frac{2\lambda_n^2}{(1 + \lambda_n^2)^2} \mathrm{ch}(\lambda_n z)\right)\right]$$
$$- 2\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\beta_m^2}{1 - \beta_m^2} \cos(\beta_m z) \cdot [A_m \beta_m I_0(\beta_m) + (B_m \beta_m - A_m) I_1(\beta_m)]. \tag{6.26}$$



(a) $b_0 = 0.5$ (b) $b_0 = 2.5$

图 3 特例 II 的流线图

七、结 果 讨 论

从前面计算结果可以看出:

1. 由于表面张力梯度的驱动,自由表面上的熔体质点,总是从高温区流向低温区,到达端部后,由于受到固壁阻挡,将向下,向回运动,从而在熔体内部形成一个迴流.

2. 该迴流的特征与熔体参数 b_0 关系颇大,具体说来,熔体柱越短,迴流中心越接近自由表面,强度亦相应减小,这时只是紧靠自由表面的一层流体,有着明显运动,深处的流体运动则很缓慢.

3. 显然,熔体内部的这种由于热毛细运动形成的迴流起着一种搅拌器的作用,它总是有助于熔体内部所含物质的均化,使得原先在自由表面上的物质成份有可能进入熔体的深处.

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

本文是作者在美国宇航中心（NASA）空间材料加工计划的资助下完成的研究工作的一部分．作者对 S. H. Davis 教授的热忱支持与十分宝贵的讨论和建议表示衷心的感谢；对曾在一个研究组的 W. W. Schulty, M. K. Smith 以及 S. Cowling 博士的有益讨论与帮助表示真挚的感谢．

作者还对美国西北大学工程科学与应用数学系 Raymcnd. A. Kliphart 教授和该系 Judy piehl, Imogene Anderson 和 Edld D'Herckens 等人表示感谢．

参　考　文　献

[1] Bénard, H., Revue Générale des Sciences Pures *et Appliquées*, **1900**, **11**: **1261**—1271; 1309—1328.
[2] Lord Rayleigh, *Phil. Mag.*, **32**(1916), 529—546.
[3] Pearson, J. R. A., *J. Fluid Mech.*, **4**(1958), 489.
[4] Adler, J. & Sowerby, L., *ibid.*, **42**(1970), 549.
[5] Davis, S. H., et al., *ibid.*, **62**(1974), 737.
[6] Yih, C. S., *Phys. Fluids*, **11**(1968), 477.
[7] ——————, *ibid.*, **12**(1969), 1982.
[8] Sen, A. K. & Davis, S. H., *J. Fluid Mech.*, **121**(1982), 163
[9] Xu Jian-Jun & Davis, S. H., *Phys. Fluids*, **26**(1983),

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net