中国科学
1982 年 3 月　A 辑　第 3 期

旋转充液腔体的非线性稳定理论及其对 Columbus 问题的应用

徐硕昌
（中国科学院力学研究所，北京）

摘　要

对于任意形状、充满粘性液体的腔体绕惯性主轴整体旋转的一般情形，本文首先导出大扰动运动方程组，然后按照 Ляпунов 直接方法建立了弱非线性稳定理论，并应用于 Columbus 问题，得到和实验完全一致的结论.

对于充满液体的腔体旋转运动稳定问题，作者已分别用一次近似变分直接方法[1]和 Ляпунов 直接方法[2]建立了线性稳定理论. 同时应用这一理论处理了 Columbus 问题，得到了和实验相一致的结论[3]. 线性理论的稳定结论在考虑非线性效应后是否仍然成立，对有限自由度情况 Ляпунов 已解决了[4]. 最近，Parks 处理了 Kelvin 实验的非线性稳定问题，由于未考虑液体的粘性，所得结论仍然和实验结果不一致[5].

在陀螺仪理论及应用的专著[6—8]中，总结的都是线性稳定理论. Sethna 总结了非线性陀螺理论，有成效的结果仍局限于弱非线性情形. Eckhaus 和 Stuart 总结的粘性流体运动稳定的非线性理论，亦仅限于弱非线性方面的结果[10,11]. 无论哪一种情形，考虑普遍的非线性稳定理论都是极其困难的. 本文目的在于研究任意形状，充满粘性液体的腔体旋转运动的非线性稳定问题. 至于大扰动稳定问题则有待进一步研究.

一、非线性稳定问题的普遍数学提法

假设充液腔体在平衡状态绕通过定点 o 的一个惯性主轴以 $\boldsymbol{\Omega}_0$ 作整体旋转. 我们来建立控制偏离平衡状态的大扰动运动方程组.

首先，引入以下三个基本坐标系：

(1) 固定坐标系 $\{0, \xi_1, \xi_2, \xi_3\}$：定点 o 为原点，旋转轴 ξ_3 沿铅垂方向，坐标基矢 $\boldsymbol{i}_1^0, \boldsymbol{i}_2^0, \boldsymbol{i}_3^0$. 假设壳体和腔内液体质量分别为 M_1 和 M_2，重心距定点 o 的距离分别为 h_1 和 h_2.

(2) 平衡运动坐标系 $\{0, x_1, x_2, x_3\}$：x_3 轴和 ξ_3 轴重合，此系相对固定坐标系以 $\boldsymbol{\Omega}_0=(0, 0, \Omega_0)$ 旋转，坐标基矢为 $\boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_2, \boldsymbol{i}_3$. 设 p^0 为液体压力，平衡时满足：

$$p^0 = p_0 + \frac{\rho}{2}\Omega_0^2(x_1^2 + x_2^2) - \rho g x_3, \tag{1}$$

本文 1981 年 1 月 31 日收到，1981 年 10 月 9 日收到修改稿.

其中ρ为液体密度，g为重力加速度.

(3) 扰动运动坐标系 $\{o, x_1', x_2', x_3'\}$：假设充液腔体偏离平衡的扰动绕o作定点运动，相对 $\{o, x_1, x_2, x_3\}$ 系以 $\boldsymbol{\omega}=(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ 旋转. 在扰动过程中，$\{o, x_1', x_2', x_3'\}$ 系和充液腔体相固连，坐标基矢 $\boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_2, \boldsymbol{i}_3$ 沿充液腔体的惯性主方向.

坐标系 $\{o, x_1, x_2', x_3'\}$ 和 $\{o, x_1, x_2, x_3\}$ 之间变换关系满足:

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{i}_1' &= \gamma_{11}\boldsymbol{i}_1 + \gamma_{12}\boldsymbol{i}_2 + \gamma_{13}\boldsymbol{i}_3, \\ \boldsymbol{i}_2' &= \gamma_{21}\boldsymbol{i}_1 + \gamma_{22}\boldsymbol{i}_2 + \gamma_{23}\boldsymbol{i}_3, \\ \boldsymbol{i}_3' &= \gamma_{31}\boldsymbol{i}_1 + \gamma_{32}\boldsymbol{i}_2 + \gamma_{33}\boldsymbol{i}_3, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

其中
$$\gamma_{lm} = \cos \widehat{\boldsymbol{i}_l' \boldsymbol{i}_m} (l, m = 1, 2, 3) \tag{3}$$

由 $\boldsymbol{i}_l'(l=1, 2, 3)$ 的法正交性导得:

$$\left.\begin{aligned} \gamma_{11}^2 + \gamma_{12}^2 + \gamma_{13}^2 = 1, \\ \gamma_{21}^2 + \gamma_{22}^2 + \gamma_{23}^2 = 1, \\ \gamma_{31}^2 + \gamma_{32}^2 + \gamma_{33}^2 = 1, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

$$\left.\begin{aligned} \gamma_{11}\gamma_{21} + \gamma_{12}\gamma_{22} + \gamma_{13}\gamma_{23} = 0, \\ \gamma_{11}\gamma_{31} + \gamma_{12}\gamma_{32} + \gamma_{13}\gamma_{33} = 0, \\ \gamma_{21}\gamma_{31} + \gamma_{22}\gamma_{32} + \gamma_{23}\gamma_{33} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

下面我们相对平衡坐标系 $\{o, x_1, x_2, x_3\}$ 列出基本方程和边界条件:

1. 壳体的运动方程

设壳体和腔内液体关于o的主转动惯量分量分别为 A_1, B_1, C_1 及 A_2, B_2, C_2. 壳体的总动量矩为:

$$\boldsymbol{G} = (o, o, C_1\Omega_0) + \boldsymbol{h} + \boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{J}. \tag{6}$$

其中$\boldsymbol{\omega}$为扰动角速度，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{h} = -\frac{\Omega_0}{2}[&\gamma_{11}\gamma_{13}(B_1+C_1-A_1) + \gamma_{21}\gamma_{23}(A_1+C_1-B_1) \\ &+ \gamma_{31}\gamma_{33}(A_1+B_1-C_1), \gamma_{12}\gamma_{13}(B_1+C_1-A_1) \\ &+ \gamma_{22}\gamma_{23}(A_1+C_1-B_1) + \gamma_{32}\gamma_{33}(A_1+B_1-C_1), \\ &-\gamma_{13}^2(B_1+C_1-A_1) - \gamma_{23}^2(A_1+C_1-B_1) \\ &+ (\gamma_{31}^2+\gamma_{32}^2)(A_1+B_1-C_1)], \end{aligned} \tag{7}$$

$\mathbf{J}$为惯量张量，

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{12} & J_{22} & J_{23} \\ J_{13} & J_{23} & J_{33} \end{pmatrix}, \tag{8}$$

其中

$$J_{11} = A_1 + \frac{\gamma_{12}^2+\gamma_{13}^2}{2}(B_1+C_1-A_1) - \frac{\gamma_{21}^2}{2}(A_1+C_1-B_1) - \frac{\gamma_{31}^2}{2}(A_1+B_1-C_1),$$

$$J_{12} = -\frac{\gamma_{11}\gamma_{12}}{2}(B_1+C_1-A_1) - \frac{\gamma_{21}\gamma_{22}}{2}(A_1+C_1-B_1) - \frac{\gamma_{31}\gamma_{32}}{2}(A_1+B_1-C_1),$$

$$J_{13} = -\frac{\gamma_{11}\gamma_{13}}{2}(B_1+C_1-A_1) - \frac{\gamma_{21}\gamma_{23}}{2}(A_1+C_1-B_1) - \frac{\gamma_{31}\gamma_{33}}{2}(A_1+B_1-C_1),$$

$$J_{22}=B_1-\frac{\gamma_{12}^2}{2}(B_1+C_1-A_1)+\frac{\gamma_{21}^2+\gamma_{23}^2}{2}(A_1+C_1-B_1)-\frac{\gamma_{32}^2}{2}(A_1+B_1-C_1),$$

$$J_{23}=-\frac{\gamma_{12}\gamma_{13}}{2}(B_1+C_1-A_1)-\frac{\gamma_{22}\gamma_{23}}{2}(A_1+C_1-B_1)-\frac{\gamma_{32}\gamma_{33}}{2}(A_1+B_1-C_1),$$

$$J_{33}=C_1-\frac{\gamma_{13}^2}{2}(B_1+C_1-A_1)-\frac{\gamma_{23}^2}{2}(A_1+C_1-B_1)+\frac{\gamma_{31}^2+\gamma_{32}^2}{2}(A_1+B_1-C_1).$$

壳体的动量矩方程为:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}[\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{J}]+\left\{\boldsymbol{\Omega}_0\times[\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{J}]+\frac{d\boldsymbol{h}}{dt}\right\}=&-\iint_s \boldsymbol{r}\times(-p_1\mathbf{I}+\boldsymbol{\tau})\cdot\boldsymbol{n}ds\\ &-(M_1gh_1+M_2gh_2)(\gamma_{32},-\gamma_{31},0)\\ &-\frac{\Omega_0^2}{2}[\gamma_{12}\gamma_{13}(B_1+B_2+C_1+C_2-A_1-A_2)\\ &+\gamma_{23}\gamma_{22}(A_1+A_2+C_1+C_2-B_1-B_2)\\ &+\gamma_{32}\gamma_{33}(A_1+A_2+B_1+B_2-C_1-C_2);\\ &-\gamma_{11}\gamma_{13}(B_1+B_2+C_1+C_2-A_1-A_2)\\ &-\gamma_{21}\gamma_{23}(A_1+A_2+C_1+C_2-B_1-B_2)\\ &-\gamma_{31}\gamma_{33}(A_1+A_2+B_1+B_2-C_1-C_2);0],\end{aligned}\tag{9}$$

其中 $p_1=p-p^0=p+\rho gx_3-\frac{\rho}{2}\Omega_0^2(x_1^2+x_2^2)-p_0$; $\mathbf{I}$ 为单位张量. $\boldsymbol{\tau}$ 为粘滞应力张量、$\tau_{ij}=\mu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$.

2. 腔内液体运动方程为

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}+2\boldsymbol{\Omega}_0\times\boldsymbol{v}=\frac{1}{\rho}\nabla(-p_1\mathbf{I}+\boldsymbol{\tau}),\tag{10}$$

连续方程

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0.\tag{11}$$

3. 活动轴微分方程——Poisson 方程

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\gamma_{11}&\gamma_{12}&\gamma_{13}\\ \gamma_{21}&\gamma_{22}&\gamma_{23}\\ \gamma_{31}&\gamma_{32}&\gamma_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\omega_2\gamma_{13}-\omega_3\gamma_{12}&\omega_3\gamma_{11}-\omega_1\gamma_{13}&\omega_1\gamma_{12}-\omega_2\gamma_{11}\\ \omega_2\gamma_{23}-\omega_3\gamma_{22}&\omega_3\gamma_{21}-\omega_1\gamma_{23}&\omega_1\gamma_{22}-\omega_2\gamma_{21}\\ \omega_2\gamma_{33}-\omega_3\gamma_{32}&\omega_3\gamma_{31}-\omega_1\gamma_{33}&\omega_1\gamma_{32}-\omega_2\gamma_{31}\end{pmatrix}.\tag{12}$$

4. 边界条件

$$\boldsymbol{v}|_s=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r},\tag{13}$$

其中 s 为腔体界面. $\boldsymbol{n}$ 为其外法向单位矢量.

整个数学问题就是按非线性微分-积分方程组 (9)—(12) 和边界条件 (13) 以及初始条件求解 $\omega_i, v_i, p, \gamma_{ij}$ $(i,j=1,2,3)$. 直接求解是极其困难的,有效方法是用 Ляпунов 直接方法进行定性分析.

二、弱非线性稳定理论

弱非线性理论仅考虑非线性项是小量的情形,即假设偏离平衡状态扰动小,但有限. 在

前一节扰动方程组中仅保留一阶和二阶小量．然后按连续系统稳定理论的 Ляпунов 直接方法处理这一方程组．

假设

$$\widehat{\boldsymbol{i}'_l \boldsymbol{i}_m} = \begin{cases} \alpha_{ll}, & \text{当 } l = m \\ \dfrac{\pi}{2} - \alpha_{lm}, & \text{当 } l \neq m, \end{cases} \tag{14}$$

则在小扰动假设下，α_{lm} 均为小量，另外 ω_i，v_i，p_1 也是小量．

坐标变换关系 (2)—(5) 式变为：

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{i}'_1 &= \left(1 - \frac{\alpha_{11}^2}{2}\right)\boldsymbol{i}_1 + \alpha_{12}\boldsymbol{i}_2 + \alpha_{13}\boldsymbol{i}_3, \\ \boldsymbol{i}'_2 &= \alpha_{21}\boldsymbol{i}_1 + \left(1 - \frac{\alpha_{22}^2}{2}\right)\boldsymbol{i}_2 + \alpha_{23}\boldsymbol{i}_3, \\ \boldsymbol{i}'_3 &= \alpha_{31}\boldsymbol{i}_1 + \alpha_{32}\boldsymbol{i}_2 + \left(1 - \frac{\alpha_{33}^2}{2}\right)\boldsymbol{i}_3 \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

和

$$\left.\begin{aligned} &\left(1 - \frac{\alpha_{11}^2}{2}\right)^2 + \alpha_{12}^2 + \alpha_{13}^2 = 1, \\ &\alpha_{21}^2 + \left(1 - \frac{\alpha_{22}^2}{2}\right)^2 + \alpha_{23}^2 = 1, \\ &\alpha_{31}^2 + \alpha_{32}^2 + \left(1 - \frac{\alpha_{33}^2}{2}\right)^2 = 1, \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_{21} + \alpha_{12} + \alpha_{13}\alpha_{23} = 0, \\ &\alpha_{31} + \alpha_{13} + \alpha_{12}\alpha_{32} = 0, \\ &\alpha_{23} + \alpha_{32} + \alpha_{21}\alpha_{31} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

扰动运动方程和边界条件 (6)—(13) 式变为：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{h} = -\frac{\Omega_0}{2}[&\alpha_{21}\alpha_{23}(A_1 + C_1 - B_1) + \alpha_{13}(B_1 + C_1 - A_1) + \alpha_{31}(A_1 + B_1 - C_1), \\ &\alpha_{12}\alpha_{13}(B_1 + C_1 - A_1) + \alpha_{23}(A_1 + C_1 - B_1) + \alpha_{32}(A_1 + B_1 - C_1), \\ &\alpha_{13}^2(B_1 + C_1 - A_1) + \alpha_{23}^2(A_1 + C_1 - B_1) - (\alpha_{31}^2 + \alpha_{32}^2)(A_1 + B_1 - C_1)]. \end{aligned} \tag{18}$$

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} A_1 & -\frac{\alpha_{12}}{2}(B_1 + C_1 - A_1) - \frac{\alpha_{21}}{2}(A_1 + C_1 - B_1), & -\frac{\alpha_{13}}{2}(B_1 + C_1 - A_1) - \frac{\alpha_{31}}{2}(A_1 + B_1 - C_1) \\ -\frac{\alpha_{12}}{2}(B_1 + C_1 - A_1) - \frac{\alpha_{21}}{2}(A_1 + C_1 - B_1), & B_1, & -\frac{\alpha_{23}}{2}(A_1 + C_1 - B_1) - \frac{\alpha_{32}}{2}(A_1 + B_1 - C_1) \\ -\frac{\alpha_{13}}{2}(B_1 + C_1 - A_1) - \frac{\alpha_{31}}{2}(A_1 + B_1 - C_1), & -\frac{\alpha_{23}}{2}(A_1 + C_1 - B_1) - \frac{\alpha_{32}}{2}(A_1 + B_1 - C_1), & C_1 \end{pmatrix} \tag{19}$$

$$\frac{d}{dt}\{\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{J}\}+\left\{\boldsymbol{\Omega}_0\times[\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{J}]+\frac{d\boldsymbol{h}}{dt}\right\}$$

$$=-\iint_s \boldsymbol{r}\times(-p_1\mathbf{I}+\boldsymbol{\tau})\cdot\boldsymbol{n}ds-(M_1gh_1+M_2gh_2)(\alpha_{32},-\alpha_{31},0)$$

$$-\frac{\Omega_0^2}{2}\{\alpha_{23}(A_1+A_2+C_1+C_2-B_1-B_2)+\alpha_{12}\alpha_{13}(B_1+B_2+C_1$$

$$+C_2-A_1-A_2)+\alpha_{32}(B_1+B_2+A_1+A_2-C_1-C_2);$$

$$-\alpha_{21}\alpha_{23}(A_1+A_2+C_1+C_2-B_1-B_2)-\alpha_{13}(B_1+B_2$$

$$+C_1+C_2-A_1-A_2)-\alpha_{31}(A_1+A_2+B_1+B_2-C_1-C_2);0\}. \tag{20}$$

活动轴微分方程——Poisson 方程

$$\left.\begin{aligned}
&-\alpha_{11}\frac{d\alpha_{11}}{dt}=\omega_2\alpha_{13}-\omega_3\alpha_{12},\quad -\alpha_{22}\frac{d\alpha_{22}}{dt}=\omega_3\alpha_{21}-\omega_1\alpha_{23},\\
&-\alpha_{33}\frac{d\alpha_{33}}{dt}=\omega_1\alpha_{32}-\omega_2\alpha_{31},\quad \frac{d\alpha_{12}}{dt}=\omega_3-\omega_1\alpha_{31},\\
&\frac{d\alpha_{13}}{dt}=\omega_1\alpha_{12}-\omega_2,\quad \frac{d\alpha_{21}}{dt}=\omega_2\alpha_{23}-\omega_3,\\
&\frac{d\alpha_{23}}{dt}=\omega_1-\omega_2\alpha_{21},\quad \frac{d\alpha_{31}}{dt}=\omega_2-\omega_3\alpha_{32},\\
&\frac{d\alpha_{32}}{dt}=\omega_3\alpha_{31}-\omega_1.
\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

液体运动方程(10)和连续方程(11)以及边界条件(13)保持原形式不变. 这些方程中非线性项忽略后,就导得文献[1],[2]中所研究的线性问题.

首先,我们证明几个引理和能量积分,然后导出运动稳定判据.

引理 1. 在方程(20)中满足

$$\boldsymbol{\omega}\cdot\left\{\boldsymbol{\Omega}_0\times[\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{J}]+\frac{d\boldsymbol{h}}{dt}\right\}=0, \tag{22}$$

证. 根据(18),(19)和(21)式,可以得到:

$$\boldsymbol{\Omega}_0\times[\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{J}]+\frac{d\boldsymbol{h}}{dt}=\Omega_0\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\sigma}, \tag{23}$$

其中 $\boldsymbol{\sigma}=(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)$,

$$\sigma_1=\alpha_{13}(B_1+C_1-A_1)+\alpha_{31}(A_1+B_1-C_1),$$
$$\sigma_2=\alpha_{23}(A_1+C_1-B_1)+\alpha_{32}(A_1+B_1-C_1),$$
$$\sigma_3=A_1+B_1-C_1.$$

这就直接导得(22)式. 利用引理 1 可以导得能量积分如下.

以 $\boldsymbol{v}$ 标乘(10)式两边再对液体所占区域 τ 积分得到:

$$\frac{d}{dt}\left\{\iiint_\tau \frac{\rho}{2}\boldsymbol{v}^2d\tau\right\}+\frac{1}{2}\iiint_\tau \mu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)^2d\tau=\iint_s(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})\cdot(-p_1\mathbf{I}+\boldsymbol{\tau})\cdot\boldsymbol{n}ds. \tag{24}$$

再以 $\boldsymbol{\omega}$ 标乘(20)式两端,利用引理 1 和(21)式得到:

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{J}\cdot\boldsymbol{\omega}-\left[\frac{\Omega_0^2}{2}(A_1+A_2+B_1+B_2-C_1-C_2)+(M_1gh_1+M_2gh_2)\right]\frac{\alpha_{33}^2}{2}\right.$$
$$+\left[\frac{\Omega_0^2}{2}(A_1+A_2+C_1+C_2-B_1-B_2)\right]\frac{\alpha_{23}^2}{2}$$
$$\left.+\left[\frac{\Omega_0^2}{2}(B_1+B_2+C_1+C_2-A_1-A_2)\right]\frac{\alpha_{13}^2}{2}\right\}$$
$$=-\iint_s(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})\cdot(-p_1\mathbf{I}+\boldsymbol{\tau})\cdot\boldsymbol{n}ds. \tag{25}$$

将 (24), (25) 两式相加, 并利用 (16), (17) 式就可得到能量积分如下:

$$\frac{d}{dt}\{E(\alpha_{ij},\omega_i,v_i)+L(\alpha_{ij})\}=-\Phi(v_i), \tag{26}$$

其中

$$E(\alpha_{ij},\omega_i,v_i)=\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{J}\cdot\boldsymbol{\omega}+\frac{1}{2}\iiint_\tau\rho\boldsymbol{v}^2d\tau, \tag{27}$$

$$\begin{aligned}L(\alpha_{ij})=&[\Omega_0^2(C_1+C_2-A_1-A_2)-(M_1gh_1+M_2gh_2)]\alpha_{13}^2\\&+[\Omega_0^2(C_1+C_2-B_1-B_2)-(M_1gh_1+M_2gh_2)]\alpha_{23}^2\\&+\left[\frac{\Omega_0^2}{2}(C_1+C_2-A_1-A_2-B_1-B_2)-(M_1gh_1+M_2gh_2)\right]\\&\times(\alpha_{12}\alpha_{13}\alpha_{32}+\alpha_{21}\alpha_{23}\alpha_{31})\end{aligned} \tag{28}$$

$$\Phi(v_i)=\frac{1}{2}\iiint_\tau\mu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)^2d\tau. \tag{29}$$

在 (26) 式中各项具有明确的物理意义: E 为扰动动能, L 为势能变化, Φ 为粘滞耗散功率, 称为耗散函数.

在势能表达式 (28) 中, 将二阶量记为 $L_2(\alpha_{ij})$ 三阶量记为 $L_3(\alpha_{ij})$. 由于 $|\alpha_{ij}|(i,j=1,2,3)$ 均为小量, 故存在足够小正数 A 使

$$|L_3(\alpha_{ij})|<A\{\alpha_{13}^2+\alpha_{23}^2\}<A\left\{\sum_{i,j=1}^3\alpha_{ij}^2\right\}. \tag{30}$$

事实上, $A=\left|\frac{\Omega_0^2}{2}(C_1+C_2-A_1-A_2-B_1-B_2)-(M_1gh_1+M_2gh_2)\right|\max(|\alpha_{12}|,|\alpha_{21}|)$ 为一阶小量. 利用 (17) 式的第二、三式可得:

$$\begin{aligned}|L_3(\alpha_{ij})|&\leqslant A(|\alpha_{13}\alpha_{32}|+|\alpha_{23}\alpha_{31}|)\leqslant A\left(\frac{|\alpha_{13}|^2+|\alpha_{32}|^2}{2}+\frac{|\alpha_{23}|^2+|\alpha_{31}|^2}{2}\right)\\&=A\left(\frac{|\alpha_{13}|^2+|\alpha_{23}+\alpha_{21}\alpha_{31}|^2}{2}+\frac{|\alpha_{23}|^2+|\alpha_{13}+\alpha_{12}\alpha_{32}|^2}{2}\right)\\&\leqslant A\left(|\alpha_{13}|^2+|\alpha_{23}|^2+\frac{|2\alpha_{23}\alpha_{21}\alpha_{31}+\alpha_{21}^2\alpha_{31}^2|+|2\alpha_{13}\alpha_{12}\alpha_{32}+\alpha_{12}^2\alpha_{32}^2|}{2}\right).\end{aligned}$$

忽略四阶以上量上式即是 (30) 式. 因此, $L(\alpha_{ij})$ 的正定性取决于二阶量, 由此直接得到如下引理:

引理 2. 如果充液腔体整体旋转的平衡状态, 势能取极小极, 即 $L(\alpha_{ij})$ 恒正, 则

$$\Omega_0^2(C_1+C_2-A_1-A_2)>(M_1gh_1+M_2gh_2) \tag{31}$$

以及

$$\Omega_0^2(C_1+C_2-B_1-B_2)>(M_1gh_1+M_2gh_2) \tag{32}$$

同时成立.

引理 3. 如果

$$\Omega_0^2(C_1+C_2-A_1-A_2)\leqslant M_1gh_1+M_2gh_2 \tag{33}$$

或者

$$\Omega_0^2(C_1+C_2-B_1-B_2)\leqslant M_1gh_1+M_2gh_2 \tag{34}$$

成立,则充液腔体整体旋转的平衡状态的势能不取极小值.

引理 4. 除了退化情形 $\boldsymbol{\omega}=(0,0,C)$ (C——常数), $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$ 外,小扰动运动方程组(10),(11),(20),(21)和边界条件(13)式不存在作刚体运动形式的解.

证明完全类似文献[2]的第二节.

引理 5. 液体粘滞耗散函数 $\Phi=0$ 的充要条件是液体作刚体运动. 耗散函数 $\Phi\geqslant 0$, 沿任意非退化轨道(定义见文献[12]),$\Phi[v_i(t)]$ 在 $(0,\infty)$ 区间上连续,至多在可数个点上为零.

按照文献[12]中叙述的连续系统的稳定理论来处理上述弱非线性稳定问题. 设所有可能解 $\mathscr{U}=\{\alpha_{ij},\ \omega_i,\ v_i\}$ $(i,\ j=1,\ 2,\ 3)$ 构成函数空间 $\Phi=\mathscr{R}^9\times\mathscr{R}^3\times C^2(\tau)$ 其中 $\mathscr{R}^n$ $(n=3,9)$ 为 n 维欧氏空间,α_{ij} 满足条件(16),(17)式; $C^2(\tau)$ 为在区域 τ 上有定义,且满足 $\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0$ 和 $\boldsymbol{v}|_s=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$ 的二次连续可微矢函数 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ 的全体. 定义函数空间 Φ 的距离为:

$$\rho(\mathscr{U},0)=\left[\sum_{i,j=1}^{3}\alpha_{ij}^2+\omega_i^2+\iiint_\tau v_i^2d\tau\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{35}$$

稳定性就按距离 $\rho(\mathscr{U},0)$ 来定义.

容易证明在条件(16)的限制下,距离 $\rho(\mathscr{U},0)$ 和距离

$$\bar{\rho}(\mathscr{U},0)=\left[\sum_{i\neq j}^{3}\alpha_{ij}^2+\omega_i^2+\iiint_\tau v_i^2d\tau\right]^{\frac{1}{2}} \tag{36}$$

是等价的. 如果忽略非线性项,距离 $\rho(\mathscr{U},0)$ 和文献[2]中定义的距离重合.

对于任意形状充满不可压、粘滞液体绕惯性主轴整体旋转的一般情形,考虑非线性效应后可得到如下的稳定判据:

定理 1. 如果充液腔体绕惯性主轴整体旋转运动的平衡状态势能具有极小值,即 $L(\alpha_{ij})$ 恒正,则充液腔体旋转运动是渐近稳定的.

证. 利用文献[12]中的稳定性定理(Zubov)来证明定理1. 由于系统取极小值、$L(\alpha_{ij})$ 恒正,故可以选取 Ляпунов 泛函数为:

$$\begin{aligned}V(\mathscr{U})=&E(\alpha_{ij},\omega_j,v_j)+L(\alpha_{ij})+(\alpha_{21}+\alpha_{12}+\alpha_{13}\alpha_{23})^2\\&+(\alpha_{31}+\alpha_{13}+\alpha_{12}\alpha_{32})^2+(\alpha_{23}+\alpha_{32}+\alpha_{21}\alpha_{31})^2>0.\end{aligned} \tag{37}$$

容易验证 $V(\mathscr{U})$ 满足:

1. $V(\mathscr{U})$ 关于 ρ 是正定的且有无穷小上界.

由于 $\mathbf{J}$ 是惯量张量,故 $\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{J}\cdot\boldsymbol{\omega}$ 正定,另外 $L(\alpha_{ij})$ 是正定的,故 $V(\mathscr{U})$ 是正定的. 为

证明 $V(\mathscr{U})$ 关于 ρ 具有无穷小上界，我们将 $\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{J}\cdot\boldsymbol{\omega}$ 和 $L(\alpha_{ij})$ 一样也分为二阶项和三阶项两部分，则有：

$$E(\alpha_{ij},\omega_i,v_i)=A_1\omega_1^2+B_1\omega_2^2+C_1\omega_2^2+\iiint_\tau\frac{1}{2}v_i^2d\tau\ +E_3(\alpha_{ij},\omega_i)$$
$$=E_2(\omega_i,v_i)+E_3(\alpha_{ij},\omega_i),\tag{38}$$

同理，

$$(\alpha_{21}+\alpha_{12}+\alpha_{13}\alpha_{23})^2+(\alpha_{31}+\alpha_{13}+\alpha_{12}\alpha_{32})^2+(\alpha_{23}+\alpha_{32}+\alpha_{21}\alpha_{31})^2$$
$$=\alpha_{21}^2+\alpha_{12}^2+\alpha_{31}^2+\alpha_{13}^2+\alpha_{23}^2+\alpha_{32}^2+C_3(\alpha_{ij}).\tag{39}$$

类似 (30) 式可知，存在足够小正数 B 和 C 分别使

$$|E_3(\alpha_{ij},\omega_i)|\leqslant B\left[\sum_{i,j=1}^{3}\alpha_{ij}^2+\omega_i^2+\iiint_\tau\frac{1}{2}v_i^2d\tau\right]^{\frac{3}{2}}\tag{40}$$

和

$$|C_3(\alpha_{ij})|\leqslant C\left[\sum_{i,j=1}^{3}\alpha_{ij}^2+\omega_i^2+\iiint_\tau\frac{1}{2}v_i^2d\tau\right]^{\frac{3}{2}}.\tag{41}$$

根据 (30)，(40) 和 (41) 式得到

$$|V(\mathscr{U})|\leqslant(\beta+A+B+C)\rho(\mathscr{U},0),\tag{42}$$

其中

$$\beta=\max\{A_1,B_1,C_1,\rho,C_1-B_1-C_2-B_2-M_1gh_1-M_2gh_2;$$
$$C_1-A_1+C_2-A_2-M_1gh_1-M_2gh_2\}.\tag{43}$$

2. 根据能量积分和 (17) 式可以得到：

$$\frac{dV(\mathscr{U})}{dt}=-\Phi(v_i)\leqslant 0,\tag{44}$$

对所有 $t>0$ 成立.

根据 $V(\mathscr{U})$ 上述性质可证明充液腔体运动是稳定的.

3. 渐近稳定的证明. 由 (44) 式对 t 积分得：

$$V(\mathscr{U})-V(\mathscr{U}_0)=-\int_0^t\Phi(v_i)dt.$$

当 $t\to\infty$，上式右端积分必须收敛(否则不稳定)，其收敛必要条件是 $\Phi(v_i)\to 0$，即 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r},t)\to 0$. 由 (13) 得 $\boldsymbol{\omega}\to 0$，运动是稳定的，自然有 $\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\to 0$，$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\to 0$.

下面依据 $t\to\infty$，$\boldsymbol{v}\to 0$，$\boldsymbol{\omega}\to 0$，$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\to 0$，$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\to 0$，通过方程组 (16)—(21) 来求解 α_{ij}. 由 (21) 式得 $t\to\infty$ 时有 $\frac{d\alpha_{ij}}{dt}=0$ $(i,j=1,2,3)$. (20)式当 $t\to\infty$ 时，可简化为：

$$\left[\frac{\Omega_0^2}{2}(B_1+B_2+A_1+A_2-C_1-C_2)+M_1gh_1+M_2gh_2\right]\alpha_{32}^2$$
$$+\frac{\Omega_0^2}{2}(A_1+A_2+C_1+C_2-B_1-B_2)\alpha_{23}\alpha_{32}=0,$$
$$\left[\frac{\Omega_0^2}{2}(A_1+A_2+B_1+B_2-C_1-C_2)+M_1gh_1+M_2gh_2\right]\alpha_{31}^2$$

$$+\frac{\Omega_0^2}{2}(B_1+B_2+C_1+C_2-A_1-A_2)\alpha_{13}\alpha_{31}=0.$$

另外用 α_{31} 乘 (17) 第二式和用 α_{32} 乘 (17) 第三式分别得到

$$\alpha_{31}^2+\alpha_{13}\alpha_{31}=0,\quad \alpha_{32}^2+\alpha_{23}\alpha_{32}=0.$$

同时满足上述四个方程的 α_{31} 和 α_{32} 无非零解，即 $\alpha_{31}=0$，$\alpha_{32}=0$. 然后由 (16),(17) 式决定得所有 α_{ij} 均为零. 至此证明了当 $t\to\infty$，$\boldsymbol{v}\to 0$，$\boldsymbol{\omega}\to 0$，$\alpha_{ij}\to 0$，即证得运动是渐近稳定的. 定理 1 证毕.

这里渐近稳定结论具有明确物理意义: 扰动后的系统经过充分长时间后，扰动的动能全部耗散为热能，除了温度稍微增加外，系统将恢复到扰动前的整体旋转平衡状态.

定理 2. 如果充液腔体绕惯性主轴整体旋转运动平衡状态的势能不是取极小，则充液腔体旋转运动一定不稳定.

证. 直接按不稳定的定义来证明. 由于势能不取极小，故存在某 α_{ij}^0 使

$$L(\alpha_{ij}^0)=L_2(\alpha_{ij}^0)+L_3(\alpha_{ij}^0)<0.$$

对任意给定的 $\varepsilon>0$ 和不管怎样小的 $\delta>0$，只要初始扰动选取为:

$$\left.\begin{aligned}&\{\alpha_{ij}(0)\}=\alpha\{\alpha_{ij}^0\}\Big(\alpha>0,\delta^2-\alpha^2\Big[\sum_{i,j=1}^{3}(\alpha_{ij}^0)^2\Big]>0\Big),\\&\boldsymbol{\omega}(0),\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r},0)\in\Big\{\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{v}:\ |\boldsymbol{\omega}|^2+\iiint_{\tau}\frac{1}{2}\boldsymbol{v}^2d\tau\\&\qquad<\min\Big(\delta^2-\alpha^2\Big[\sum_{i,j=1}^{3}(\alpha_{ij}^0)^2\Big],\ \frac{-\alpha^2L_2(\alpha_{ij}^0)}{\max(A_1,B_1,C_1,\rho)}\Big)\Big\},\end{aligned}\right\}\tag{45}$$

就能证明这个小扰动运动关于 $\rho(\mathscr{U},0)$ 是不稳定的.

事实上，按 (45) 式所取初始条件满足

$$\left.\begin{aligned}&\rho(\mathscr{U},0)=\Big\{\alpha^2\Big[\sum_{i,j=1}^{3}(\alpha_{ij}^0)^2\Big]+\boldsymbol{\omega}^2(0)+\iiint_{\tau}\boldsymbol{v}^2d\tau\Big\}^{\frac{1}{2}}<\delta\\&\text{和}\\&\alpha^2L(\alpha_{ij}^0)+E(\omega_i^0,v_i^0)<0.\end{aligned}\right\}\tag{46}$$

由能量积分 (26) 式对 t 积分，得

$$E(\alpha_{ij},\omega_i,v_i)+L(\alpha_{ij})=-\int_0^t\Phi(v_i)dt+\alpha^2L(\alpha_{ij}^0)+E(\omega_i^0,v_i^0)<0.\tag{47}$$

利用证明 (42) 式相同过程可以得到:

$$|E(\alpha_{ij},\omega_i,v_i)+L(\alpha_{ij})|\leqslant(\bar\beta+A+B)\rho(\mathscr{U}(\mathscr{U}^0,t),0),\tag{48}$$

其中

$$\begin{aligned}\bar\beta=\max\{&A_1,B_1,C_1,\rho,|C_1-B_1+C_2-B_2-M_1gh_1-M_2gh_2|,\\&|C_1-A_1+C_2-A_2-M_1gh_1+M_2gh_2|\},\end{aligned}\tag{49}$$

A, B 由 (30), (40) 式给出.

根据 (48), 由 (47) 式推得:

$$\begin{aligned}(\bar\beta+A+B)\rho(\mathscr{U}(\mathscr{U}^0,t),0)&\geqslant|E(\alpha_{ij},\omega_i,v_i)+L(\alpha_{ij})|\\&>\int_0^t\Phi(v_i)dt.\end{aligned}\tag{50}$$

在(50)式中，$\int_0^t \Phi dt$ 是 t 的单调递增函数，取充分大 $T > \frac{(\bar{\beta}+A+B)\varepsilon}{\Phi(t_0)}$ (其中

$$\int_0^T \Phi(v_i)dt = \Phi(t_0)\cdot T,\ 0 < t_0 < T).$$

可以证明，当 $t > T$ 时，

$$\rho[\mathscr{U}(\mathscr{U}^0, t), 0] < \varepsilon \tag{51}$$

成立．这样就证明了充液腔体旋转运动是不稳定的．

综合定理 1 和定理 2 得到：

定理 3. 对于任意形状的、充满不可压粘滞液体的腔体绕惯性主轴整体旋转的情形，其运动稳定的充要条件是系统的势能具有极小值．

根据引理 2 和引理 3 可以得到如下推论：

推论. 充液腔体绕主轴整体旋转运动稳定的充要条件是

$$\Omega_0^2(C_1 + C_2 - A_1 - A_2) > M_1gh_1 + M_2gh_2 \tag{52}$$

以及

$$\Omega_0^2(C_1 + C_2 - B_1 - B_2) > M_1gh_1 + M_2gh_2 \tag{53}$$

同时成立．

对于线性理论[1-3]中势能二次变分为零的临界情形，包括退化情形 $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, C)$($C$——常数)，$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$，根据本文定理可以判定这些临界情形是不稳定的．

三、对 Columbus 问题的应用

在文献[3]中，Columbus 问题被概括为：

1. 为什么煮熟的鸡蛋可以象陀螺一样竖立旋转？
2. 为什么生鸡蛋不能竖立旋转？
3. 怎样解释 Kelvin 所做流体转子陀螺仪的实验结果？

在文献[3]中已论证了问题 2 和问题 3 是等价的，整个问题关键在于解释 Kelvin 实验．文献[3]应用线性理论[1,2]已解释了 Kelvin 实验，阐明了粘性不稳定作用的物理实质以及 Columbus 问题在天体演化学、地球运动和工程技术上的应用．

非线性效应是否会影响原来的结论呢？ Parks 在理想液体假设下考虑非线性效应所得结果仍然和实验结果不一致[5]．弱非线性理论和线性理论不同仅出现在临界情形，所以，目前的非线性理论不改变线性理论[1-3]的稳定判据．

应用本文定理 3 的推论处理 Columbus 问题是直接而一目了然的．生鸡蛋竖立旋转是绕长轴旋转，而重心位置又比定点高，所以是不稳定的．在 Kelvin 实验中，用扁迴转椭球壳充满水构成的流体转子陀螺仪是绕短轴自由回旋(重心是定点)故是稳定的，当用长回转椭球壳时是绕长轴自由回旋，故是不稳定的．应用本文的非线性稳定理论处理 Columbus 问题后，就可以说已按 Ляпунов 稳定理论严格数学提法解答了 Columbus 问题．

四、结　论

1. 本文按距离 $\rho(\mathscr{U}(\mathscr{U}_0, t), 0)$ 所定义的稳定具有明确的物理意义：如果系统是渐近

稳定的，则扰动后的系统经过足够长时间后，除了温度稍有增加外，系统将恢复到未扰前的平衡状态；如果说系统是不稳定的，则系统的角速度 $\boldsymbol{\Omega}_0+\boldsymbol{\omega}$，转轴方位参数 α_{ij} 和腔内液体的扰动速度 $\boldsymbol{v}$ 均随时间而增长.

2. 本文的非线性稳定理论按 Ляпунов 稳定理论的严格数学提法解答了 Columbus 问题.

3. 考虑非线性效应没有改变线性理论[1—3] 的稳定结论，进一步证明了线性理论中势能二次变分为零的临界情形是不稳定的. 本文虽只考虑二级近似，但所得结论是扰动小而有限假设的普遍结论，因为引进更高阶近似所得结论仍旧不变. 至于大扰动稳定问题尚有待进一步研究.

4. 本文方法和结论原则上适用于文献[1]中所列举的问题.

本工作得到谈镐生教授的指导，清华大学钱伟长教授、系统科学研究所关肇直教授和美国纽约大学柯朗数学研究所丁汝教授讲课的教益，特别是谈镐生、钱伟长教授的鼓励，在此均表示衷心的感谢.

参　考　文　献

[1] 徐硕昌，中国科学，1979，9:857—865.
[2] 徐硕昌，科学通报，**26** (1981)，1:14—17.
[3] 徐硕昌，力学学报，1981年 特刊.
[4] Ляпунов, А. М., *Общая задача об устойчивости движения*, Собр. Сон. т. II. Изд. АН СССР, 1956.
[5] Parks, P. C., *ASME Jour. of Appl. Mech.*, **46**(1979), 259—262.
[6] Меркин,. Д. Р., *Гироскопические системы*, М. ГИТТЛ, 1956.
[7] Grammel, R., 迴转仪的理论和应用，上、下册，科学出版社，1959.
[8] Магнус, К., *Гироскоп (Теория и применение)*, Издва «Мир», М., 1974.
[9] Sethna, P. R. & Balachandra, M. B., In *Mechanics Taday* (Ed S. Nemat-Nasser), **Vol. 3**. Pergamon Press. Inc. 1974, 191—242.
[10] Eckhaus, W., *Stadies in Nonlinear Stability Theory*, Springer-Verlay, New York, 1965
[11] Stuart. J. J., *Ann. Rev. Fluid. Mech.*, **3**(1971), 347—370.
[12] Knops. R. J., Wilkes. E. W., *Inter. J. of Engin. Scien.*, **4**(1966), 303—330.