

# 弹塑性有限元的一些解法比较\*

吴永礼

(中国科学院力学研究所)

1. 弹塑性有限元分析的基本公式 根据 von Mises 屈服准则和 Prandtl-Reuss 塑性流动律, 可以导出弹塑性阶段的应力增量-全应变增量之间的本构关系:

$$\{d\sigma\} = [D_{e,p}]\{d\epsilon\} \quad (1)$$

其中  $\{d\sigma\}$  为应力增量列阵,  $\{d\epsilon\}$  为应变增量列阵,  $[D_{e,p}]$  为弹塑性系数矩阵, 它的表达式为:

$$[D_{e,p}] = [D_e] - \frac{[D_e] \left\{ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma} \right\} \left\{ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma} \right\}^T [D_e]}{H + \left\{ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma} \right\}^T [D_e] \left\{ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma} \right\}} \quad (2)$$

其中  $\bar{\sigma}$  为有效应力,  $[D_e]$  为弹性系数矩阵,  $H = \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\epsilon}^p}$  为有效应力和有效塑性应变曲线的斜率.

增量形式的平衡方程为:

$$[K]\{\Delta u\} = \{\Delta P\} \quad (3)$$

其中  $[K]$  为总体刚度矩阵,  $\{\Delta u\}$  为位移增量列阵,  $\{\Delta P\}$  为外载荷增量列阵.

2. 几种解法 方程(3)是非线性的. 对于一般问题, 精确求解比较困难. 目前, 一般都用近似法来求解. 下面介绍几种解法.

(1) 切线刚度法<sup>[2]</sup>

切线刚度法的解法是这样的(参看图1): 假使在载荷  $\{P\}_A$  时, 相应的位移为  $\{u\}_A$ , 切线刚度为  $[K]_A$ . 对于下一次载荷增量所产生的位移为:

$$[K]_A \{\Delta u\}_{AB} = \{\Delta P\}_{AB} = \{P\}_B - \{P\}_A \quad (4)$$

$$\{u\}_B = \{u\}_A + \{\Delta u\}_{AB}$$

相应的应变增量为:

$$\{\Delta \epsilon\}_{AB} = [B] \{\Delta u\}_{AB} \quad (5)$$

由公式(1)、(2)可以求出这一次载荷增量所产

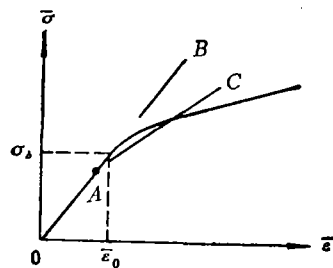


图 1

\* 1980年12月15日收到.

生的应力增量, 在用(2)式计算 $[D_{ep}]$ 时,  $\left\{\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma}\right\}$ 和 $H$ 都是从 $A$ 点的应力状态出发. 最后, 就得到在载荷 $\{P\}_B$ 时的位移 $\{u\}_B$ 、应力 $\{\sigma\}_B$ 等数值. 于是, 可以进行下一次载荷增量的求解. 可以看出, 本方法的特点是, 对于一次载荷增量, 只需求解一次就可以了.

### (2) 平均刚度法<sup>[1]</sup>

平均刚度法基本上与上面的方法相似. 对于第 $i$ 次载荷增量, 如果开始时单元应力状态处于弹性状态、结束时单元应力状态仍处于弹性状态, 或者开始时单元应力状态处于塑性状态, 则在计算单元刚度矩阵时采用第 $i$ 次开始时的应力状态, 即图1中的 $A$ 点. 但是, 如果开始时单元应力状态处于弹性状态, 而结束时单元应力状态变为塑性状态, 这种单元称为过渡区, 若仍采用初始状态的弹性系数矩阵来计算单元刚度矩阵, 如图2所示. 最后计算结果将达到 $B$ 点, 这将引起较大的误差. 因此, 文献[1]中建议, 对于过渡区的单元, 采用平均刚度系数矩阵代替(2):

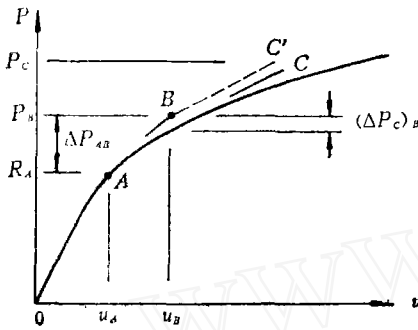


图 2

$$[D_{ep}] = [D_e] - (1-m) \frac{[D_e] \left\{ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma} \right\} \left\{ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma} \right\}^T [D_e]}{H + \left\{ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma} \right\}^T [D_e] \left\{ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma} \right\}} \quad (6)$$

其中  $m = \frac{\bar{\epsilon}_0 - \bar{\epsilon}_{i-1}}{\bar{\epsilon}_i - \bar{\epsilon}_{i-1}}$  称为加权系数.  $\bar{\epsilon}_0$  为屈服应变,  $\bar{\epsilon}_{i-1}$ 、 $\bar{\epsilon}_i$  分别为第 $i$ 次载荷增量所对应的初始时的有效应变(图2中的 $A$ 点)和结束时的有效应变(图2中的 $C$ 点). (6)式中  $\left\{ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma} \right\}$  和  $H$  采用 $C$ 点即本次载荷增量结束时的应力及所对应的 $H$ 值. 由于 $C$ 点所对应的应力,  $H$  和  $\bar{\epsilon}_i$  数值预先是不知道的, 所以要迭代计算. 预先假定一组位移增量, 然后求解, 使所得的位移增量与所假定的位移增量之间的误差达到指定的要求即可停止迭代, 得到所求的位移增量和其他相应的应变增量和应力增量.

### (3) 一阶自校正法

文献[5]提出的一阶自校正法是切线刚度法的一种修正. 从图1可以看出, 在切线刚度法中, 在求解第 $i$ 次载荷增量所产生的位移增量、应变增量和应力增量时, 都是以 $A$ 点为出发点, 而最后所得的结果为图1中的 $B$ 点,  $B$ 点所对应的应力一般并不与外载荷相平衡. 为了减小不平衡所产生的误差, 文献[5]中提出, 在求第 $i+1$ 次载荷增量时, 在(3)式的右端加一不平衡项, 称为校正项:

$$[K]_B \{\Delta u\}_{BC} = \{\Delta P\}_{BC} + \{\Delta P_C\}_B \quad (7)$$

其中校正项

$$\{\Delta P_C\}_B = \{P\}_B - \sum [B]^T \{\sigma\}_B dV \quad (8)$$

式中  $\{P\}_B$  为第 $i$ 次结束时的总载荷,  $\{\sigma\}_B$  为相应的应力,  $\Sigma$  是对所有的单元求和,

积分是在单元上求积。

前面三种方法的相同点是对于每一个载荷增量都要求重新形成整体刚度矩阵,所以,统称为变刚度法。

#### (4) 初应力法

初应力法在文献[3, 4]中有了介绍,其基本思想是把弹塑性刚度矩阵分成两部分

$$[K] = [K^e] + [K^m] \quad (9)$$

其中 $[K^e]$ 是按弹性系数计算的总体刚度矩阵。

$$[K^e] = \sum \int [B]^T [D_e] [B] dV \quad (10)$$

其中 $\sum$ 是对所有的单元求和,从(2)可知,

$$[K^m] = \sum \int [B]^T [D_p] [B] dV \quad (11)$$

式中 $\sum$ 是对所有的塑性单元求和。

$$[D_p] = [D_{ep}] - [D_e] \quad (12)$$

对于第 $i$ 次载荷增量,(3)式可以写为:

$$[K^e] \{\Delta u_i\} = \{\Delta P_i\} - [K^m] \{\Delta u_i\} \quad (13)$$

根据(11)式,上式右边第二部分可写为:

$$[K^m] \{\Delta u_i\} = \sum \int [B]^T [D_p] [B] \{\Delta u_i\} dV = \sum \int [B]^T \{\Delta \sigma_0\} dV \quad (14)$$

其中 $\{\Delta \sigma_0\} = [D_p] [B] \{\Delta u_i\} = [D_{ep}] [B] \{\Delta u_i\} - [D_e] [B] \{\Delta u_i\}$ 为弹塑性应力增量和弹性应力增量之差,这一项和弹性有限元法中的初应力相似,所以叫初应力法。从(11)式可以看出,(13)式右边的第二部分 $[K^m]$ 与应力状态及 $H$ 有关, $\{\Delta u_i\}$ 即为所求的位移增量,预先都是不知道的,这就需要一个迭代过程。我们在迭代过程中,计算 $[K^m]$ 也取第 $i$ 次载荷增量时的应力终值。

3. 计算结果和比较 用上面四种计算方法对带中心裂纹的三点弯曲梁进行了计算。梁的几何尺寸见图3。计算中 $W = 16\text{mm}$ ,  $S/W = 2$ ,  $a/W = 0.54$ ,单位厚度上的载荷 $P = 139\text{kg}$ 。假定为平面应力状态。由于对称,计算时只取一半,载荷为 $68.5\text{kg}$ 。单元划分情况见图4。共有255个节点,446个三角形单元。

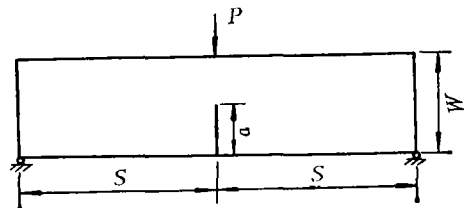


图3

材料曲线用指数形式表示:

$$\bar{\epsilon} = \begin{cases} \frac{\bar{\sigma}}{3G} & \bar{\sigma} \leq \sigma_b \\ \frac{\bar{\sigma}}{3G} + \alpha \left[ \left( \frac{\bar{\sigma}}{\sigma_b} \right)^n - 1 \right] & \bar{\sigma} > \sigma_b \end{cases} \quad (14)$$

其中 $\alpha$ ,  $n$ ,  $\sigma_b$ ,  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ 为材料常数,  $\alpha = 0.00013$ ,  $n = 25.5$ ,  $\sigma_b = 89\text{kg/mm}^2$ ,  $E = 21000\text{kg/mm}^2$ ,  $\nu = 0.3$ 。这时,  $H = \frac{\sigma_b}{\alpha_n} \left( \frac{\sigma_b}{\bar{\sigma}} \right)^{n-1}$ 。

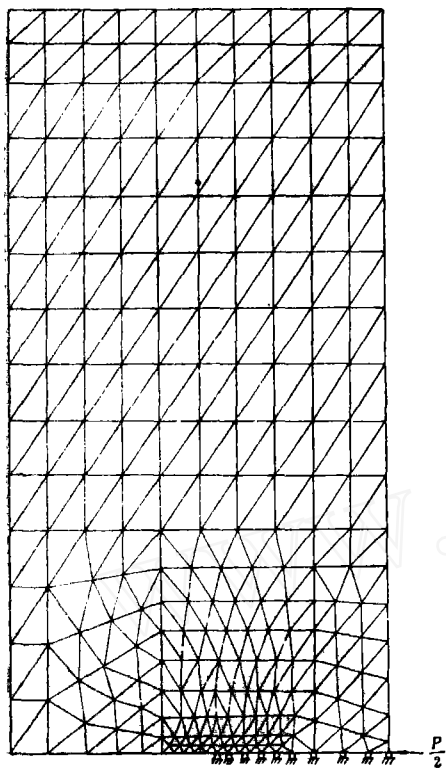


图 4

初始屈服,也就是第一个单元达到屈服时的载荷  $P_0 = 19.2\text{kg}$ ,余下的载荷,我们按相同的载荷增量共分 24 次加载.计算表明,四种计算方法所得的塑性区形状是相同的,也就是在各个载荷情况下,屈服的单元数是相同的.但是,四种方法所得的应力数值不完全相同.图 5 画出了第 6, 12, 18, 24 次载荷增量下的塑性区的形状.

图 6 画出了用四种计算方法所得的加载点的载荷位移曲线.可以看出,由于切线刚度法采用的刚度矩阵为每次载荷增量初始时的刚度矩阵,对于硬化材料,刚度矩阵比实际的大,所以,计算所得的位移要比实际的小一些,载荷增量越小,误差越小,随着载荷的增加,误差积累越来越大.平均刚度法和一阶自校正法所得的位移结果相当接近,在图上用一条曲线表示,所得的位移比切线刚度法的结果要大一些.初应力法所计算的位移结果更大,

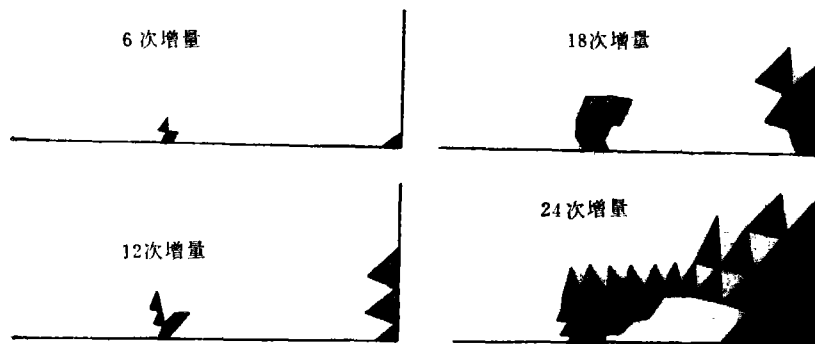


图 5

因为我们在初应力法中,计算(13)式的右边第二部分  $[K^m]$  时用的是终值,所以计算结果要比实际的大一些.由于没有精确解可以比较,无法判断那一个解的结果最好.但是从上面的分析来看,平均刚度法或一阶校正法所得的结果应当比较好.此外,我们对平均刚度法采用了一阶校正,计算结果与平均刚度法的结果没有什么差别,这表明,平均刚度法的结果比较好.

整个计算是在 TQ-16 计算机上进行的,切线刚度法和一阶自校正法所需机时约八十分钟(每次载荷增量约三分钟),而平均刚度法由于在每次增量计算中都需要迭代,

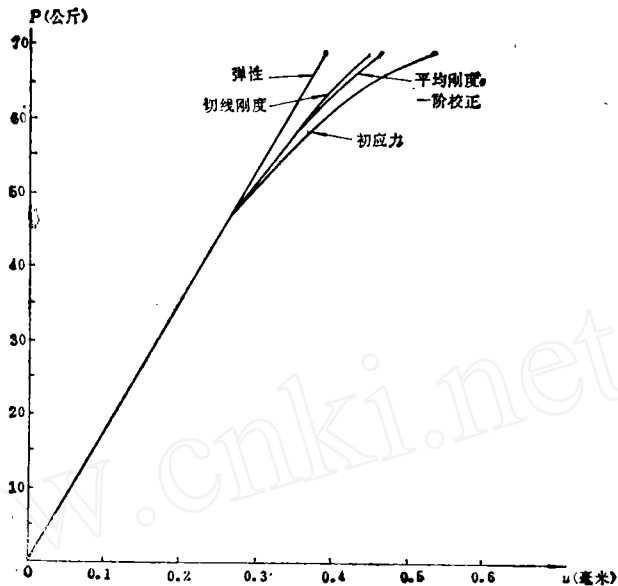


图6 加载点的载荷—位移曲线

一般每次增量迭代二至四次, 因此, 总的计算时间较长, 总共约三个半小时。初应力法虽然不必每次都形成刚度矩阵, 但是需要迭代, 在前几次载荷增量时迭代次数较少, 只需几次, 然而, 随着载荷的增加, 迭代次数也增加, 有的增加到一、二十次, 这表明, 塑性区越大, 计算中仍采用弹性刚度矩阵, 收敛越慢, 总的计算时间约二个小时。在平均刚度法和初应力法的迭代中, 我们以最大位移增量的相对误差作为收敛标准, 所假定的位移增量与计算得到的位移增量相对误差小于  $1/1000$ , 则认为收敛了, 从而停止迭代, 进入下一次载荷增量的计算。误差控制的大小将影响迭代次数及计算时间。

从上面的算例比较可以看出, 无论从计算结果还是计算时间来说, 一阶自校正法是比较好的。

#### 参 考 文 献

- (1) Marcal P. V. and King I. P., Elastic-plastic Analysis of Two-dimensional Stress Systems by The Finite Element Method. Inter. Jour. of Mecha. Sci. 9, 3 (1967), 143-155.
- (2) Yamada Y., Yoshimura N. and Sakurai T., Plastic Stress-strain Matrix and Its Application for the Solution of Elastic-plastic Problems by the Finite Element Method Inter. Jour. of Mecha. Sci. 10, 5 (1968), 343-354.
- (3) Zienkiewicz O. C., The Finite Element Method in Engineering Science. McGraw-Hill London (1971).
- (4) Nayak G. C. and Zienkiewicz O. C., Elastic-plastic Stress Analysis. A Generalization for Various Constitutive Relations Including Strain Softening. Inter. Jour. for Nu-

mer Methods in Engineering. 5, 1(1972), 113—135.

- [5] Stricklin J. A., Haisler W. E. and Vor Rieseemann W. A., Evaluation of Solution Procedures for Material and/or Geometrically Nonlinear Structural Analysis. AIAA Journal 11, 3(1973)292—299.

**A COMPARISON BETWEEN SOLUTION PROCEDURES  
FOR ELASTIC-PLASTIC ANALYSIS BY THE  
FINITE ELEMENT METHOD**

Wu Yong-li

*(Institute of Mechanics, Academia Sinica)*