# 简化 Navier-Stokes 方程组及无粘和粘性边界层联合求解

高　智

（中国科学院力学研究所）

简化 N-S 方程组具有抛物-双曲方程组的特性，对定常情况可用向前推进的计算方法，要比数值求解椭圆型完全 N-S 方程组简单得多；求解简化 N-S 方程组能够同时算出无粘外部流和粘性边界层流，理论上要比先算无粘流、然后再算粘性边界层流的常规方法优越．对于许多类型的流场，简化 N-S 方程组能够真实地反映它们的力学面貌，譬如能够正确计算高超声速绕流流场中粘性边界层、高熵层和无粘外流之间相互干扰的复杂流动图象等．

求解简化 N-S 方程组的研究还在发展，事实上，它的数学性质、稳定性、Cauchy 问题的正确提法、计算流场能够达到的精确度等问题，还未得到完善的解决，不同作者的看法也不统一．本文给出作者在 1967 年探讨简化 N-S 方程组的部分研究内容[2]，从无粘和粘性边界层联合求解的分析出发提出了简化 N-S 方程组，利用摄动法论证了由该方程组可得到精确度为 $O(\mathrm{Re}_\infty^{-1/2})$ 量级的均匀一致解．顺便指出，推导简化 N-S 方程组的类似分析后来也在文献中看到，如见文献 [3]．

## 1. 简化 Navier-Stokes 方程组

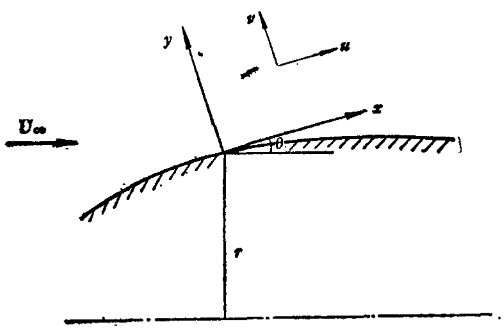


图　1

设 $x$、$y$ 分别为沿壁面及垂直壁面的正交坐标（图 1），$u$，$v$ 为相应的速度分量，$\rho$、$p$、$T$、$\mu$ 和 $\lambda$ 分别表示密度、压力、温度、粘性系数和导热系数．取来流参数 $U_\infty$、$\rho_\infty U_\infty^2$ 分别为速度和压力的特征量，固壁长度 $L$ 为长度特征量；假定 $\rho$ 和 $\mu$ 的数量级可用 $\rho_\infty$ 和 $\mu_\infty$ 来衡量．我们按照无粘外流和粘性边界层流两种观点、对完全 N-S 方程组中的各项作数量级估计如下：

$$\begin{array}{lcccccccccc}
 & \frac{u}{H}\frac{\partial u}{\partial x} & + v\frac{\partial u}{\partial y} & + \frac{kuv}{H} & = \frac{-1}{\rho H}\frac{\partial p}{\partial x} & + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right) & + \frac{\pi\mu}{\rho}\frac{\partial u}{\partial y} & - \frac{ku}{\rho}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mu}{H}\right) & + \Phi_t \\
\text{无粘流} & \frac{U_\infty^2}{L} & \frac{U_\infty^2}{L} & \frac{U_\infty^2}{L} & \frac{U_\infty^2}{L} & \mathrm{Re}_\infty^{-1}\frac{U_\infty^2}{L} & \mathrm{Re}_\infty^{-1}\frac{U_\infty^2}{L} & \mathrm{Re}_\infty^{-1}\frac{U_\infty^2}{L} & \mathrm{Re}_\infty^{-1}\frac{U_\infty^2}{L} \\
\text{边界层流} & \frac{U_\infty^2}{L} & \frac{U_\infty^2}{L} & \frac{\delta U_\infty^2}{L^2} & \frac{U_\infty^2}{L} & \mathrm{Re}_\infty^{-1}\frac{LU_\infty^2}{\delta^2} & \mathrm{Re}_\infty^{-1}\frac{U_\infty}{\delta} & \mathrm{Re}_\infty^{-1}\frac{U_\infty}{\delta} & \leqslant \mathrm{Re}_\infty^{-1}\frac{U_\infty^2}{L}
\end{array} \tag{1.1}$$

---

本文于 1981 年 5 月收到．

$$\frac{u}{H}\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{ku^2}{H}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{4}{3\rho}\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{1}{\rho H}\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right)+j\frac{\sin\theta}{\rho rH}\mu\frac{\partial u}{\partial y}+\Phi_n$$

| | $\frac{u}{H}\frac{\partial v}{\partial x}$ | $v\frac{\partial v}{\partial y}$ | $\frac{ku^2}{H}$ | $\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}$ | $\frac{4}{3\rho}\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial v}{\partial y}\right)$ | $\frac{1}{\rho H}\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right)$ | $j\frac{\sin\theta}{\rho rH}\mu\frac{\partial u}{\partial y}$ | $\Phi_n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 无粘流 | $\frac{U_\infty^2}{L}$ | $\frac{U_\infty^2}{L}$ | $\frac{U_\infty^2}{L}$ | $\frac{U_\infty^2}{L}$ | $\mathrm{Re}_\infty^{-1}\frac{U_\infty^2}{L}$ | $\mathrm{Re}_\infty^{-1}\frac{U_\infty^2}{L}$ | $\mathrm{Re}_\infty^{-1}\frac{U_\infty^2}{L}$ | $\mathrm{Re}_\infty^{-1}\frac{U_\infty^2}{L}$ |
| 边界层流 | $\frac{\delta U_\infty^2}{L^2}$ | $\frac{\delta U_\infty^2}{L^2}$ | $\frac{U_\infty^2}{L}$ | | $\mathrm{Re}_\infty^{-1}\frac{U_\infty^2}{\delta}$ | $\mathrm{Re}_\infty^{-1}\frac{U_\infty^2}{\delta}$ | $\mathrm{Re}_\infty^{-1}\frac{U_\infty^2}{\delta}$ | $\leqslant\mathrm{Re}_\infty^{-1}\frac{U_\infty^2}{L}$ |

(1.2)

这里 $\pi=j\frac{\cos\theta}{r}+\frac{k}{H}$，$j=0$（二维流），1（轴对称流），$H=1+ky$，$k$ 为壁面曲率，$\mathrm{Re}_\infty=\frac{\rho_\infty U_\infty L}{\mu_\infty}$，$\frac{\delta}{L}=O(\mathrm{Re}_\infty^{-1/2})$，$\delta$ 为边界层厚度，$\Phi_t$ 和 $\Phi_n$ 分别是切向和法向动量方程中数量级等于以及小于 $O\left(\mathrm{Re}_\infty^{-1}\frac{U_\infty^2}{L}\right)$ 量级的所有项．对大雷诺数 $\mathrm{Re}_\infty\gg1$ 的情况作如下讨论：

1）$y>\delta$，在完全 N-S 方程组中略去数量级为 $O\left(\mathrm{Re}_\infty^{-1}\frac{U_\infty^2}{L}\right)$ 的项得到 Euler 方程组；对 $y\leqslant\delta$，在 N-S 方程组中略去数量级小于和等于 $O\left(\mathrm{Re}_\infty^{-1/2}\frac{U_\infty^2}{L}\right)$ 的项得到 Prandtl 边界层方程组．

2）联立求解 Euler 方程组和边界层方程组时，在 $y=\delta$ 的交界线上存在数学奇异性，Euler 方程组的解在 $y(>\delta)\to\delta$ 时的渐近值与边界层方程组的解在 $y(<\delta)\to\delta$ 时的渐近值不会完全一致，奇异的实际数量级为 $O\left(\mathrm{Re}_\infty^{-1/2}\frac{U_\infty^2}{L}\right)$．应该注意到，在 $y(>\delta)\to\delta$ 时，法向 Euler 方程中诸惯性项的实际数量级亦为 $O\left(\mathrm{Re}_\infty^{-1/2}\frac{U_\infty^2}{L}\right)$．

3）因此为了消除联立求解无粘外流和粘性边界层流时出现的奇异性，对 $y\leqslant\delta$，应取在 N-S 方程组中略去数量级等于和小于 $O\left(\mathrm{Re}_\infty^{-1}\frac{U_\infty^2}{L}\right)$ 的项后得到的方程组，这就是简化 N-S 方程组；把简化 N-S 方程组和 Euler 方程组联立求解能够消除数学奇异性、获得精确度为 $O\left(\mathrm{Re}_\infty^{-1/2}\frac{U_\infty^2}{L}\right)$ 量级适用于全流场的均匀一致解．

如上所述，简化 N-S 方程组是指在完全 N-S 方程组中略去按照边界层观点估计的数量级等于和小于 $O\left(\mathrm{Re}_\infty^{-1}\frac{U_\infty^2}{L}\right)$ 的项后得到的方程组，具体写出它们（连同连续性和能量方程）为：

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho ur^j)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho vHr^j)=0 \tag{1.3}$$

$$\rho\left(\frac{u}{H}\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{kuv}{H}\right)=-\frac{1}{H}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\pi\mu\frac{\partial u}{\partial y}-ku\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mu}{H}\right) \tag{1.4}$$

$$\rho\left(\frac{u}{H}\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{ku^2}{H}\right)=-\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{4}{3}\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

$$+\frac{1}{H}\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right)+j\frac{\mu\sin\theta}{rH}\frac{\partial u}{\partial y} \tag{1.5}$$

$$\rho c_p\left(\frac{u}{H}\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}\right)-\left(\frac{u}{H}\frac{\partial p}{\partial x}+v\frac{\partial p}{\partial y}\right)$$
$$=\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\pi\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial y}+\mu u\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\mu\Phi_c \tag{1.6}$$

其中 $$\Phi_c=\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2-\pi u\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{2ku}{H}\frac{\partial u}{\partial y}+ku^2\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mu}{H}\right)$$

$c_p$ 为定压比热．简化 N-S 方程组 (1.3)—(1.6) 不包含 $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ 项，当 $\mu\neq 0$ 时，它有四个重特征和二个非零的实特征，故具有抛物-双曲方程特性[4]，对定常情况可用向前推进的计算方法．同时应该注意到：在简化 N-S 方程组中，当 $y(<\delta)\to\delta$ 时、$\frac{\partial}{\partial y}$ 由 $O(\mathrm{Re}_\infty^{1/2})\to O(1)$，所有粘性项的数量级均变成 $O\left(\mathrm{Re}_\infty^{-1}\frac{U_\infty^2}{L}\right)$；故精确到 $O\left(\mathrm{Re}_\infty^{-1/2}\frac{U_\infty^2}{L}\right)$量级、简化 N-S 方程组在 $y\geqslant\delta$ 时将光滑地过渡为 Euler 方程组．这就是说，为了得到精确度为 $O\left(\mathrm{Re}_\infty^{-1/2}\frac{U_\infty^2}{L}\right)$ 量级的全流场解、可以不必联立求解简化 N-S 方程组和 Euler 方程组，原则上只要给定初边值即来流(或激波)和壁面条件、单独求解简化 N-S 方程组即可．

**2. 精确度讨论**　利用拟线性简化 N-S 方程组计算包括无粘外流和粘性边界层在内的全流场时、可得到精确度为 $O\left(\mathrm{Re}_\infty^{-1/2}\frac{U_\infty^2}{L}\right)$ 量级的均匀一致解．为了论证这个结论，需要采用与通常的内、外层匹配展开[1]稍有不同的摄动展开．完全 N-S 方程组(1.1)和(1.2)的解、在 $0\leqslant y\leqslant\delta$ 的粘性边界层内，可展开成 $\varepsilon=\mathrm{Re}_\infty^{-1/2}$ 的如下幂级数：

$$\left.\begin{aligned}u/U_\infty&=u_{i0}+\varepsilon u_{i1}+\varepsilon^2u_{i2}+\cdots\\v/\varepsilon U_\infty&=v_{i0}+\varepsilon v_{i1}+\varepsilon^2v_{i2}+\cdots\\\rho/\rho_\infty&=\rho_{i0}+\varepsilon\rho_{i1}+\varepsilon^2\rho_{i2}+\cdots\\\mu/\mu_\infty&=\mu_{i0}+\varepsilon\mu_{i1}+\varepsilon^2\mu_{i2}+\cdots\\[p(X,Y)-p_w(X)]/\varepsilon\rho_\infty U_\infty^2&=p_{i0}+\varepsilon p_{i1}+\varepsilon^2p_{i2}+\cdots\end{aligned}\right\} \tag{2.1}$$

其中 $X=x/L,\ Y=y/\varepsilon L,\ \varepsilon=\mathrm{Re}_\infty^{-1/2},\ \frac{\partial}{\partial Y}=O(1)$；$u_{i0}$、$u_{i1}$、$\cdots$ 诸量及其相对于 $X$ 和 $Y$ 的偏导数均为 $O(1)$ 量级．把展开式 (2.1) 代入 N-S 方程组 (1.1) 和 (1.2)，比较 $\varepsilon$ 的同次幂得到：

$O(\varepsilon^0)$ $$\rho_{i0}\left(u_{i0}\frac{\partial u_{i0}}{\partial X}+v_{i0}\frac{\partial u_{i0}}{\partial Y}\right)=-\frac{d\bar{p}_w(X)}{dX}+\frac{\partial}{\partial Y}\left(\mu_{i0}\frac{\partial u_{i0}}{\partial Y}\right)$$

$$k_l\rho_{i0}u_{i0}^2=\frac{\partial p_{i0}}{\partial Y} \tag{2.2}$$

$O(\varepsilon^1)$ $$\rho_{i0}\left[\frac{\partial(u_{i0}u_{i1})}{\partial X}+v_{i0}\frac{\partial u_{i1}}{\partial Y}+v_{i1}\frac{\partial u_{i0}}{\partial Y}+k_lu_{i0}v_{i0}\right]+\rho_{i1}\left(u_{i0}\frac{\partial u_{i0}}{\partial X}+v_{i0}\frac{\partial u_{i0}}{\partial Y}\right)$$

$$= k_l Y\left(\rho_{i0}u_{i0}\frac{\partial u_{i0}}{\partial X} + \frac{d\bar{p}_W(X)}{dX}\right) - \frac{\partial p_{i0}}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial Y}\left(\mu_{i0}\frac{\partial u_{i1}}{\partial Y} + \mu_{i1}\frac{\partial u_{i0}}{\partial Y}\right)$$

$$+ \pi\mu_{i0}\frac{\partial u_{i0}}{\partial Y} - k_l u_{i0}\frac{\partial \mu_{i0}}{\partial Y}$$

$$\rho_{i0}\left(u_{i0}\frac{\partial v_{i0}}{\partial X} + v_{i0}\frac{\partial v_{i0}}{\partial Y} - 2k_l u_{i0}u_{i1} + k_l Y u_{i0}^2\right) - \rho_{i1}k_l u_{i0}^2 = -\frac{\partial p_{i1}}{\partial Y}$$

$$+ \frac{4}{3}\frac{\partial}{\partial Y}\left(\mu_{i0}\frac{\partial v_{i0}}{\partial Y}\right) + \frac{\partial}{\partial X}\left(\mu_{i0}\frac{\partial u_{i0}}{\partial Y}\right) + j\frac{\sin\theta}{r_l}\mu_{i0}\frac{\partial u_{i0}}{\partial Y} \tag{2.3}$$

其中 $k_l = kL$，$r_l = r/L$，$\bar{p}_w(X) = p_w(X)/\rho_\infty U_\infty^2$；对连续性方程和能量方程可类似地进行展开．需要说明的是：在现在的展开法中，N-S 方程组在 $y \leqslant \delta$ 时的 $O(1)$ 量级近似即一阶方程组 (2.2) 和 $O(\varepsilon)$ 量级方程即二阶方程组 (2.3)、均与通常的内外层匹配展开法[1]有所不同，在通常的展开法中 $y \leqslant \delta$ 时的一阶和二阶法向动量方程分别为：

$$\frac{\partial p_{i0}}{\partial Y} = 0$$

$$\frac{\partial p_{i1}}{\partial Y} = k_l\rho_{i0}u_{i0}^2$$

因此在通常的展开法中，当用内、外层的一阶方程组联立求解，以及用内、外层的二阶方程组联立求解时、在 $y = \delta$ 的交界线上均存在 $O\left(\mathrm{Re}_\infty^{-1/2}\frac{U_\infty^2}{L}\right)$ 量级的数学奇异性．

在 $y > \delta$ 的无粘外流区，N-S 方程组 (1.1) 和 (1.2) 的解可展开为 $\varepsilon$ 的如下幂级数：

$$\left.\begin{aligned} u/U_\infty &= u_{e0} + \varepsilon u_{e1} + \varepsilon^2 u_{e2} + \cdots \\ v/U_\infty &= v_{e0} + \varepsilon v_{e1} + \varepsilon^2 v_{e2} + \cdots \\ \rho/\rho_\infty &= \rho_{e0} + \varepsilon\rho_{e1} + \varepsilon^2\rho_{e2} + \cdots \\ p(X, Y_e)/\rho_\infty U_\infty^2 &= p_{e0} + \varepsilon p_{e1} + \varepsilon^2\rho_{e2} + \cdots \end{aligned}\right\} \tag{2.4}$$

其中 $Y_e = y/L$；$u_{e0}$、$u_{e1}$、$\cdots$诸量及其相对于 $X$ 和 $Y_e$ 的偏导数均为 $O(1)$ 量级，把 (2.4) 代入 (1.1) 和 (1.2)、比较 $\varepsilon$ 的同次幂得到：

$O(\varepsilon^0)$

$$\left.\begin{aligned} &\rho_{e0}\left(\frac{u_{e0}}{H}\frac{\partial u_{e0}}{\partial X} + v_{e0}\frac{\partial u_{e0}}{\partial Y_e} + \frac{k u_{e0}v_{e0}}{H}\right) = -\frac{1}{H}\frac{\partial p_{e0}}{\partial X} \\ &\rho_{e0}\left(\frac{u_{e0}}{H}\frac{\partial v_{e0}}{\partial X} + v_{e0}\frac{\partial v_{e0}}{\partial Y_e} - \frac{k u_{e0}^2}{H}\right) = -\frac{\partial p_{e0}}{\partial Y_e} \end{aligned}\right\} \tag{2.5}$$

$O(\varepsilon')$

$$\left.\begin{aligned} &\rho_{e0}\left[\frac{1}{H}\frac{\partial(u_{e0}u_{e1})}{\partial X} + v_{e0}\frac{\partial u_{e1}}{\partial Y_e} + v_{e1}\frac{\partial u_{e0}}{\partial Y_e} + \frac{k}{H}(u_{e1}v_{e0} + u_{e0}v_{e1})\right] \\ &\quad + \rho_{e1}\left(\frac{u_{e0}}{H}\frac{\partial u_{e0}}{\partial X} + v_{e0}\frac{\partial u_{e0}}{\partial Y_e} + \frac{k u_{e0}v_{e0}}{H}\right) = -\frac{1}{H}\frac{\partial p_{e1}}{\partial X} \\ &\rho_{e0}\left[\frac{u_{e0}}{H}\frac{\partial v_{e1}}{\partial X} + \frac{u_{e1}}{H}\frac{\partial v_{e0}}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial Y_e}(v_{e0}v_{e1}) - \frac{2k u_{e0}u_{e1}}{H}\right] \\ &\quad + \rho_{e1}\left(\frac{u_{e0}}{H}\frac{\partial v_{e0}}{\partial X} + v_{e0}\frac{\partial v_{e0}}{\partial Y_e} - \frac{k u_{e0}^2}{H}\right) = -\frac{\partial p_{e1}}{\partial Y_e} \end{aligned}\right\} \tag{2.6}$$

可见在 $y>\delta$ 的无粘流区域，N-S 方程组的 $O(1)$ 量级近似即一阶方程组(2.5)为 Euler 方程组、精确到 $O(\varepsilon)$ 量级的近似即二阶方程组(2.6)是考虑边界层位移厚度效应后的修正解．把方程组 (2.2) 和 (2.5) 联立求解、可得到在全流场内精确到 $O(1)$ 量级的均匀一致解；把方程组 (2.2)、(2.3) 和 (2.5)、(2.6) 联立并进行匹配求解，可求得在全流场内精确到 $O(\mathrm{Re}_\infty^{-1/2})$ 量级的均匀一致解．

把简化 N-S 方程组 (1.4) 和 (1.5) 与方程组 (2.2) 和 (2.3)、并与方程组 (2.5) 和 (2.6) 作比较，能够证明简化 N-S 方程组的解满足如下的关系，以 $u$ 为例有

$$\left.\begin{aligned} y\leqslant\delta \qquad & \left|\frac{u}{U_\infty}-(u_{i0}+\varepsilon u_{i1})\right|\leqslant O(\varepsilon^2=\mathrm{Re}_\infty^{-1}) \\ y\geqslant\delta \qquad & \left|\frac{u}{U_\infty}-(u_{e0}+\varepsilon u_{e1})\right|\leqslant O(\mathrm{Re}_\infty^{-1}) \end{aligned}\right\} \tag{2.7}$$

对于其它变量、(2.7) 式同样成立，因此，简化 N-S 方程组的解是适用于全部流场、精确度为 $O(\mathrm{Re}_\infty^{-1/2})$ 量级的均匀一致解．

**3. 结束语** 简化 N-S 方程组的具体形式将因 $O(\mathrm{Re}_\infty^{-1/2})$ 量级粘性项的取舍不同而略有不同，通常认为 $O(\mathrm{Re}_\infty^{-1/2})$ 量级粘性项的不同取舍引起的实际差别不大[3-7]．但为了获得在全流场范围内精确度为 $O(\mathrm{Re}_\infty^{-1/2})$ 量级的均匀一致解，采用作者提出的简化 N-S 方程组 (1.3)—(1.6)[2]，可能比较合适．

简化 N-S 方程组能够正确算出激波层内无粘流、高熵层和边界层流之间的复杂干扰现象[3-7]，并广泛用于其它的流场计算：如非平衡流、管道流、远尾流、激波-边界层干扰现象、以及三维尖头和钝头体的粘性绕流等．简化 N-S 方程组也已用于分离流、近尾流和压缩拐角等复杂流场的计算，但应注意到：简化 N-S 方程组仅在粘性作用占优势即 $\mu\neq 0$ 时才具有抛物-双曲方程特性，而在 $y>\delta$ 粘性作用可以忽略即 $\mu=0$ 时它过度为 Euler 方程组、相应的特征根为

$$\lambda_1=\lambda_2=H\frac{v}{u},\quad \lambda_{3,4}=H\frac{uv\pm c\sqrt{\mathrm{M}^2-1}}{u^2-C^2}$$

这里 $C$ 为声速、M是马赫数．$\mathrm{M}>1$、$\lambda_{3,4}$ 为实特征、属双曲型，简化 N-S 方程组的数学类型没有变化；$\mathrm{M}<1$、$\lambda_{3,4}$ 为复特征、属椭圆型，简化 N-S 方程组的类型发生了变化．在简化 N-S 方程组属椭圆型的流动区，Cauchy 问题并不适定，采用叠代求解或作其它的特殊处理是十分必要的．

## 参 考 文 献

[1] Van Dyke, H., Hypersonic Flow Research, Academy, Press, N. Y. (1962).
[2] 高 智，无粘外流和粘性边界层联立求解，中国科学院力学研究所工作报告 (1967).
[3] Магомедов, К. М., Изв. АН СССР, МЖГ, 2(1970), 44—56.
[4] 王汝权等，高速空气动力学计算方法(文集)，1978 年宇航飞行器计算空气动力学会议资料，杭州，(1978).
[5] 王汝权，刘学宗，焦履琼，高智，力学学报，3(1980)，226—231.
[6] Davis, R. T., *AIAA J.*, **8**, 5(1970) 843—851.
[7] Головачев, Ю. П., и др., *ЖВММФ*., **13**, 4(1973), 1021—1028.

# SIMPLIFIED NAVIER-STOKES EQUATIONS AND COMBINED SOLUTION OF NON-VISCOUS AND BOUNDARY LAYER EQUATIONS

Gao Zhi
(*Institute of Mechanics, Academia Sinica. Beijing*)

## Abstract

This paper presents a part of the technical report[2] in which the author studied the simplified Navier-Stokes equations and the combined solution of non-viscous and boundary layer equations. From the full Navier-Stokes equations and an analysis of the combined solution of non-viscous and boundary layer equations, simplified Navier-Stokes equations were worked out. A perturbation analysis which differs slightly from the match-perturbation-expansions of inner-outer layers developed by Van Dyke[1] shows that the solution of the simplified Navier-Stokes equations in uniformly valid with accuracy of $O(\mathrm{Re}_\infty^{-1/2})$ in the whole flow field, where $\mathrm{Re}_\infty = \frac{\rho_\infty U_\infty L}{\mu_\infty}$, $\rho_\infty$ is the density of free stream, $U_\infty$ the x-component of velocity, L the characteristic length, $\mu_\infty$ the dynamic viscosity of free stream.