对动脉血液流动线性化问题的讨论

钱　民　全
(中国科学院力学研究所)

动脉血液流动线性化问题，在血液动力学中无疑是一个重要问题.《关于动脉血流线化理论的基础》一文(以下简称《基础》，此文载于力学学报 1978 年第 3 期) 对这个问题提出了讨论.

目前，一般文献提出的动脉血液流动的线性化条件（见《基础》一文中参考文献[6]、[13])是:

$$\frac{U}{c} \ll 1, \qquad \frac{R}{\lambda} \ll 1 \tag{1}$$

或者(《基础》参考文献[14])

$$\frac{U}{c} \ll 1, \qquad \frac{\omega R}{c} \ll 1 \tag{2}$$

其中，U 为血液流动的轴向特征速度，c 为脉冲波传播速度，R 为血管平衡时内半径，λ 为脉冲波波长，ω 为圆频率.

《基础》一文提出动脉血液流动线性化条件为:

$$\frac{U}{c}\frac{\lambda}{L} \ll 1, \quad \text{或者} \quad \frac{R}{L} \ll \mathrm{St} \tag{3}$$

其中根据《基础》说 L 是“血管长度或流程”, st 定义为 $\frac{fR}{U}$ (Strohl 数)，f 为心跳频率.

我们认为《基础》一文提出的线性化条件有问题，值得讨论．因为包括《基础》一文在内，目前一般文献考虑的动脉血液流动仍然只考虑相当长(即无穷长)血管中的流动问题.《基础》一文中引进了血管长度 L $\left(\text{或} \frac{R}{L}\right)$ 作为特征长度之一，但仍然没有考虑 L $\left(\text{或} \frac{R}{L}\right)$ 对流动引起的影响．其实，轴向特征长度唯一的只能取血液脉冲波的波长 λ，而不能取所谓“血管长度或流程” L.《基础》一文中又说，由于“λ” 不是流动固有的纵向尺度，而是时间尺度（与 c 结合）的反映”，似乎 λ 或者 c 在血管中有变化，所以不能取为特征尺度，其实，们们可以取 λ 或 c（或 f, ω）的平均值或者最大值作为特征量，正象我们取速度的特征量 U 可以是平均值或最大值一样，尽管速度在血管中流动也是变化的!

如果，我们要考虑有限血管长度 L 的影响，无疑这个问题在血液动力学中也很重要，这时，我们不但要考虑 $\frac{R}{\lambda}$，而且也要考虑 $\frac{R}{L}$$\Big($或 $\frac{\lambda}{L}$，三个无量纲量中，只有两个是独立

本文于 1978 年 11 月 29 日收到.

的）的作用了.

另外，一般文献中提出的线性化条件式(1)或(2)，就方程本身而言，似乎强了一点.

我们采用一般的假设，认为血液是不可压缩的牛顿流体，血液流动是充分发展了的轴对称层流、采用柱坐标 $\{x, r, \theta\}$，相应的速度分量为 $\{u, v, o\}$，除了上面的符号说明外，使 $x=\lambda\bar{x}$，$r=R\bar{r}$，$t=T\bar{t}=\frac{\lambda}{c}\bar{t}$，$u=U\bar{u}$，由连续性方程取 $v=\frac{R}{\lambda}U\bar{v}$ 等（字上有"-"者为无量纲量)，则血液流动方程可写为

$$\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{t}}+\frac{U}{c}\left(\bar{u}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}}+\bar{v}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{r}}\right)=-\frac{\lambda}{Uc}\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{U}{c}\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\lambda}{R}\left(\frac{R^2}{\lambda^2}\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial\bar{x}^2}+\frac{1}{\bar{r}}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{r}}+\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial\bar{r}^2}\right)\tag{4}$$

$$\frac{R}{\lambda}\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{t}}+\frac{R}{\lambda}\frac{U}{c}\left(\bar{u}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}}+\bar{v}\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{r}}\right)=-\frac{\lambda}{Uc}\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}+\frac{U}{c}\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{R^2}{\lambda^2}\frac{\partial^2\bar{v}}{\partial\bar{x}^2}+\frac{1}{\bar{r}}\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{r}}+\frac{\partial^2\bar{v}}{\partial\bar{r}^2}-\frac{\bar{v}}{\bar{r}^2}\right)\tag{5}$$

方程的无量纲参数为 $\frac{U}{c}$，$\frac{R}{\lambda}$ 和雷诺数 $\mathrm{Re}=\frac{UR}{\nu}$. 这样从(4)和(5)式看，方程线性化条件只要求比式(1)或式(2)更弱的条件：

$$\frac{U}{c}\ll 1,\quad \frac{U}{c}\frac{R}{\lambda}\ll 1\tag{6}$$

又如果 $\frac{1}{\mathrm{Re}}$ 和 $\left(\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{R}{\lambda}\right)$ 都不是非常大，方程线性化后有量纲形式成为

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right)\tag{7}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}+\nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{v}{r^2}\right)\tag{8}$$

又因为一般生理条件下，在动脉血液流动中脉冲波波长 λ 要比血管内径 R 大得多，即 $\frac{R}{\lambda}\ll 1$ 满足，所以一般文献认为线性化条件是式(1)或式(2)也是正确的. 又如果 Re 数不是比一1 小很多，则式(7)式(8)成为

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right)\tag{9}$$

$$0=\frac{\partial p}{\partial r}\tag{10}$$

这两个方程也是动脉血液流动中可以采用的线性化近似.

值得提出的是《基础》一文中说《基础》所引的文献[10]在 $\frac{U}{c}\ll 1$，$\frac{R}{\lambda}\ll 1$ 的条件下，对式(7)、式(8)求解，与《基础》一文对式(9)、式(10)求解得出的复波公式完全一样，这是不确切的. 文献[10]先得到的是较为一般的解，只是在一定的生理条件下简化为由式(9)、式(10)得出的简化解. 至于其原因，我们从式(7)、式(8)简化到式(9)、式(10)已作了说明.

《基础》一文中简化血管管壁方程也同样用了“血管长度 L 或流程” L 作为流动方向的特征量，在解问题过程中又不考虑 $L\left(或\ \dfrac{R}{L}\right)$ 的影响，所以我们觉得同样也是有问题的，也值得讨论.

我们也以《基础》一文中引用的最简单的薄膜线弹性管小位移模型为例，讨论血管运动方程的简化问题，设血管管壁的位移为 $\{\xi, \eta, o\}$，

管壁运动方程为

$$\rho_w h\,\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} = p - \frac{E}{1-\sigma^2}\left[\sigma\,\frac{h}{R}\,\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{h}{R}\,\frac{\eta}{R}\right] \tag{11}$$

$$\rho_w h\,\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial r}\right)_{r=R} + \frac{E}{1-\sigma^2}\left(h\,\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + \sigma\frac{h}{R}\,\frac{\partial\eta}{\partial x}\right) \tag{12}$$

其中 ρ_w 为管壁密度（一般近似为常数），E 为血管扬氏模量，σ 为泊松比，h 为管壁厚度（对薄膜线性弹性管为常值）．R 也为血管平衡态的内半径等等.

我们在前面已经讲过，我们仍只考虑无穷长的血管管壁的运动，因此，轴向方向的特征长度仍只取脉冲波波长 λ，同时轴向和径向位移 ξ 和 η 的特征长度各自取它们的最大振幅或平均振幅 ξ_0, η_0，又使 $\eta=\eta_0\bar\eta$，$\xi=\xi_0\bar\xi$，$x=\lambda\bar x$，$r=R\bar r$，$t=\dfrac{\lambda}{c}\bar t$，$u=U\bar u$，$p=\rho U^2\bar p$ 等．(带“-”为无量纲量)，简化以后的无量纲形式的方程为：

$$\frac{\rho_w}{\rho}\,\frac{h}{\lambda}\,\frac{\eta_0}{\lambda}\left(\frac{c}{U}\right)^2\frac{\partial^2\bar\eta}{\partial\bar t^2} = \bar p - \frac{E}{\rho U^2}\,\frac{1}{1-\sigma}\,\frac{h}{R}\left(\sigma\,\frac{\xi_0}{\lambda}\,\frac{\partial^2\bar\xi}{\partial\bar x^2} + \frac{\eta_0}{R}\,\bar\eta\right) \tag{13}$$

$$\begin{aligned}\frac{\rho_w}{\rho}\,\frac{h}{\lambda}\,\frac{\xi_0}{\lambda}\left(\frac{c}{U}\right)^2 \mathrm{Re}\,\frac{\partial^2\bar\xi}{\partial\bar t^2} &= -\left[\frac{\partial\bar u}{\partial\bar r} - \left(\frac{R}{\lambda}\right)^2\frac{\partial\bar v}{\partial\bar x}\right]_{\bar r=1}\\ &\quad + \frac{E}{\rho U^2}\,\frac{1}{1-\sigma^2}\,\mathrm{Re}\left(\frac{h}{\lambda}\,\frac{\xi_0}{\lambda}\,\frac{\partial^2\bar\xi}{\partial\bar x^2} + \sigma\,\frac{h}{R}\,\frac{\eta_0}{\lambda}\,\frac{\partial\bar\eta}{\partial\bar x}\right)\end{aligned} \tag{14}$$

其中 ρ 为血液密度．注意到方程(13)(14)中各项的量级．一般由于血管横向位移 η_0 比纵向位移 ξ_0 大得多，即 $\eta_0 \gg \xi_0$；又认为血液的密度 ρ 与血管的密度 ρ_w 有同一量级等等．比较量级以后，对于薄膜弹性管小位移模型可以得到，

$$p = \frac{Eh}{1-\sigma}\,\frac{\eta}{R^2} \tag{15}$$

$$\rho_w h\,\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = -\mu\,\frac{\partial\eta}{\partial r}\bigg|_{r=R} + \frac{Eh}{1-\sigma^2}\,\frac{\sigma}{R}\,\frac{\partial\eta}{\partial x} \tag{16}$$

如果 Re 数不太大，$\dfrac{\rho_w}{\rho}\,\dfrac{h}{\lambda}\,\dfrac{\xi_0}{\lambda}\left(\dfrac{c}{U}\right)^2\mathrm{Re} \ll 1$ 是可以成立的，则(16)可以进一步简化：

$$\mu\,\frac{\partial u}{\partial r}\bigg|_{r=R} = \frac{Eh}{1-\sigma^2}\,\frac{\sigma}{R}\,\frac{\partial\eta}{\partial x} \tag{17}$$

我们对一般的血管管壁运动问题，最好从式(13)、式(14)出发估计它们的确切量级，然后进行适当的简化，这样就不容易出问题.

在写此文过程中，曾和一些同志进行过讨论，但限于本人水平，本文讨论也不全面，请批评指正.