

$$w_{ij} = \frac{1 + \mu}{\pi E r_{ij}} \left[\frac{1 - 2\mu}{2} a_{ij} X_i + \frac{1 - 2\mu}{2} b_{ij} Y_i + (1 - \mu) Z_i \right]$$

式中

$$r_{ij} = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2$$

$$a_{ij} = (x_i - x_j)/r_{ij}$$

$$b_{ij} = (y_i - y_j)/r_{ij}$$

式(5)可以用矩阵表示成

$$\{\delta_{ij}\} = [F_{ij}]\{R_i\} \quad (6)$$

这里

$$\{\delta_{ij}\} = \{u_{ij} v_{ij} w_{ij}\}$$

$$[F_{ij}] = \frac{1 + \mu}{\pi E r_{ij}} \begin{bmatrix} 1 - \mu b_{ij}^2 & \text{对称} \\ \mu a_{ij} b_{ij} & 1 - \mu a_{ij}^2 \\ \frac{1 - 2\mu}{2} a_{ij} & \frac{1 - 2\mu}{2} b_{ij} & 1 - \mu \end{bmatrix}$$

(当 $i \neq j$ 时) (7)

对于 $\{\delta_{ij}\}$, 即在 i 点的荷载引起的在 i 点的位移, 采用和文献[1]相同的处理方法, 即认为它是分布在面积为 $2a \times 2b$ 的形心在点 i 的矩形单元上的均布荷载 $R_i/4ab$ 作用产生的位移, 则

$$[F_{ij}] = \frac{1}{4ab} \int_{x_i-a}^{x_i+a} \int_{y_i-b}^{y_i+b} [F_{ij}] d_x d_y \quad (8)$$

计算出式(8)的定积分后, $[F_{ij}]$ 可用对角线矩阵表为

$$[F_{ii}] = [\alpha + (1 - \mu)\beta(1 - \mu)\alpha + \beta\alpha + \beta] \quad (9)$$

式中

$$\alpha = \frac{1}{a} \operatorname{arcsh} \frac{a}{b}$$

$$\beta = \frac{1}{b} \operatorname{arcsh} \frac{b}{a}$$

对于在半无限体表面的一组方格网点上的反力 $\{R\}$ 和位移 $\{\delta\}$, 由式(6)可以建立方程式

$$\{\delta\} = [F]\{R\} \quad (10)$$

$[F]$ 即为地基柔度矩阵, 其子矩阵 $[F_{ij}]$ 由式(7)和式(9)得到。

参 考 文 献

- [1] Naik, T.R., Wang, C. K., Methods of Structural Analysis, American Society of Civil Engineers 2

(1976), 644--647.

- [2] 铁木辛柯, 古地尔, 弹性理论(徐芝纶、吴永祯译), 高等教育出版社(1964), 372--374.
[3] Филоненко-Бородиц, М. М., Теория упругости, Государственное издательство физико-математической литературы, Москва (1959), 267--276.

(本文 1979 年 7 月 30 日收到)

环形管道磁流体力学流动的渐近解

陈 允 明

(中国科学院力学研究所)

考虑矩形截面环形管道(图1): $0 \leq z' \leq L$, $r'_1 \leq r' \leq r'_2$. 上下壁为绝缘壁, 在 z' 轴方

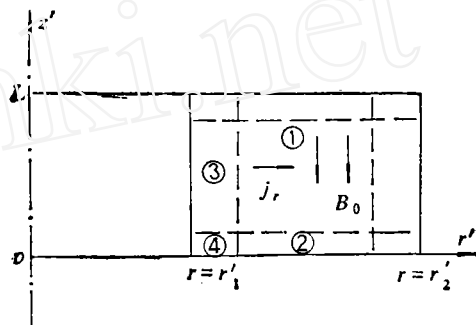


图 1

向加匀强磁场 B_0 . 内外壁为理想导体, 用作电极, 在径向通以电流 I . 管道内导电流体就在电磁力作用下旋转起来(单极机). 设导电率 σ 及粘性系数 η 都是常数. 设

$$\frac{Rc}{M^2} \left(\frac{r_2 - r_1}{r_2 + r_1} \right)^2 \ll 1,$$

则二次流小, 可以忽略. 这时柱坐标下无量纲方程及边界条件如下^[1,2,3]

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} - \frac{V}{r^2} - M \frac{\partial B}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial^2 B}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 B}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial B}{\partial r} - \frac{B}{r^2} - M \frac{\partial V}{\partial z} &= 0 \\ z = 0, 1: V = 0, B = \pm \frac{1}{r} \\ r = R_1, R_2: V = 0, \frac{\partial(rB)}{\partial r} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

其中 $V = V_0 / \left(\frac{I}{4\pi L \sqrt{\eta\sigma}} \right)$, $B = B_0 / \left(\frac{\mu L}{4\pi L} \right)$,
 $r = r'/L$, $z = z'/L$, $R_1 = r'_1/L$, $R_2 = r'_2/L$,
 $M = \sqrt{\frac{\sigma}{\eta}} B_0 L$.

困难在于 $r = R_1, R_2$ 处 V 给的是第一类边值, 而 B 给的是第三类边值. 在文献[3]中我们利用格林函数将问题化为一维积分方程而求出了级数解. 但当 $M \gg 1$ 时, 级数收敛很慢, 应转而求其渐近解. 文献[4,5]对直管道求出了渐近平均速度, 但未给出速度分布. 文献[6]对环形管道作了实验, 理论值则直接套用文献[4]的结果, 由于没有考虑曲率的影响, 误差由 $O(M^{-3/2})$ 增到 $O(M^{-1})$. 本文计入了曲率影响, 使误差降回 $O(M^{-3/2})$, 并且求出了速度分布, 与精确级数解以及实验值都很符合(比较见文献[3]).

$M \gg 1$ 时截面可分为四个区域(图1). 在第一区 $\left(\frac{\partial}{\partial x} = 0 \right)$ 及第二区 $\left(\frac{\partial}{\partial z} \approx M \right)$ 内显然有

$$V_1 = \frac{1}{r}, B_1 = 0 \quad (2)$$

$$V_2 = \frac{1}{r} - \frac{1}{r} e^{-Mz}, B_2 = \frac{1}{r} e^{-Mz} \quad (3)$$

先分析第四区解的形式, 由于 $\frac{\partial}{\partial z} \approx M$, 方程为

$$\frac{\partial^2 V_4}{\partial z^2} - M \frac{\partial B_4}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial^2 B_4}{\partial z^2} - M \frac{\partial V_4}{\partial z} = 0$$

又由衔接条件 $V_4(r, Mz \rightarrow \infty) \rightarrow V_3(x, z)$ 可知解的形式应为 $V_4 = V_3(x, z) - f(x)e^{-Mz}$, $B_4 = B_3(x, z) + f(x)e^{-Mz}$. 由 $z = 0$ 边条件得

$$f(x) = V_3(x, 0) \quad (4)$$

$$B_3(x, 0) + V_3(x, 0) = \frac{1}{r} \quad (5)$$

利用式(5)可求解第三区 $\left(\frac{\partial}{\partial x} \approx \sqrt{M} \right)$.

方程原含 $\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2}$ 三项, 文献[6]扔

去了 $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2}$ 两项故相对误差为

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} / \frac{\partial^2}{\partial r^2} \approx 1/\sqrt{M}.$$

我们保留两项, 只扔去 $\frac{1}{r^2}$ 阶项, 则相对误差降

为 $O(1/M)$. 注意到 $\frac{1}{\sqrt{r}} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (\sqrt{r} f) = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{1}{4} \frac{f}{r^2}$, 可令 $\rho = \sqrt{M}(r - R_1)$,

$$V_3 = \frac{1}{r} + \frac{V^*}{\sqrt{r}}, B_3 = \frac{B^*}{\sqrt{r}}.$$

保留 $\frac{1}{\sqrt{M}}$ 阶项, 方程组为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 V^*}{\partial \rho^2} - \frac{\partial B^*}{\partial z} &= 0, \quad \frac{\partial^2 B^*}{\partial \rho^2} - \frac{\partial V^*}{\partial z} = 0 \\ z = 0: V^* + B^* &= 0 \\ \rho = 0: V^* - \frac{1}{\sqrt{R_1}} \frac{\partial B^*}{\partial \rho} + \frac{1}{2\sqrt{M}R_1} B^* &= 0 \\ \rho \rightarrow \infty: V^* \rightarrow 0, B^* \rightarrow 0 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

其中 $\rho = \sqrt{M}(r - R_1)$. 引入 $\psi = V_0^* + B^*$, 由于 V^* 对于 $z' = L/2$ 上下对称, 而 B^* 则为反对称, 故 $V^* = \frac{1}{2} [\psi(\rho, z) + \psi(\rho, 1-z)]$

$B^* = \frac{1}{2} [\psi(\rho, z) - \psi(\rho, 1-z)]$ 再假设 $\rho = 0$ 处有

$$\frac{\partial V^*}{\partial \rho} + \frac{1}{2\sqrt{M}R_1} V^* = A(z) \quad (7)$$

则 ψ 满足方程组

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho^2} - \frac{\partial \psi}{\partial z} &= 0 \\ z = 0 \quad \psi = 0 \quad \rho \rightarrow \infty \quad \psi \rightarrow 0 \\ \rho = 0 \quad \frac{\partial \psi}{\partial \rho} + \frac{1}{2\sqrt{M}R_1} \psi &= A(z) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

其解为

$$\psi = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \frac{A(\zeta)}{\sqrt{z-\zeta}} \left\{ \exp \left[-\frac{\rho^2}{4(z-\zeta)} \right] + \frac{1}{2\sqrt{M}R_1} \int_0^\infty \exp \left[\frac{u}{2\sqrt{M}R_1} - \frac{(\rho+u)^2}{4(z-\zeta)} \right] du \right\} d\zeta \quad (9)$$

由边条件 $\rho = 0$ 处 $V^* = -\frac{1}{\sqrt{R_1}}$ 得到

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^1 \frac{A(\zeta)}{\sqrt{|z-\zeta|}} d\zeta + \frac{1}{4\sqrt{\pi M R_1}} \times \int_0^1 \frac{A(\zeta)}{\sqrt{|z-\zeta|}} \int_0^\infty \exp\left[\frac{u}{2\sqrt{M R_1}} - \frac{u^2}{4|z-\zeta|}\right] du d\zeta = \frac{1}{\sqrt{R_1}}$$

而积分

$$\int_0^\infty \exp\left[\frac{u}{2\sqrt{M R_1}} - \frac{u^2}{4|z-\zeta|}\right] du = \sqrt{\pi|z-\zeta|} + O\left(\frac{1}{\sqrt{M}}\right),$$

故最后得到积分方程

$$\int_0^1 \frac{A(\zeta)}{\sqrt{|z-\zeta|}} d\zeta = 2\sqrt{\pi} \left[\frac{1}{\sqrt{R_1}} - \frac{\sqrt{\pi K_0}}{2\sqrt{M R_1}} \right] \quad (10)$$

其中 $K_0 = \int_0^1 A(\zeta) d\zeta$. 由[7,8]的反演公式得到

$$A(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi R_1}} \left[1 - \frac{\Gamma^2(3/4)}{\pi \sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{M R_1}} \right] \times [z(1-z)]^{-1/4} \quad (11)$$

最后可得到近似速度分布及平均速度为

$$V_3 = \frac{1}{r} - \frac{1}{\pi \sqrt{2r R_1}} \int_0^1 \frac{(1 - 0.338/\sqrt{M R_1})}{[\zeta(1-\zeta)]^{1/4} \sqrt{|z-\zeta|}} \times \exp\left[-\frac{\rho^2}{4|z-\zeta|}\right] d\zeta \quad (12)$$

$$\bar{V} \frac{R_2 - R_1}{\ln R} = 1 - \frac{2}{M} - \frac{1.35}{\sqrt{M}} \frac{L}{r_2 - r_1} \frac{R + 1}{2R}$$

$$\times \frac{R - 1}{\ln R} + \frac{0.228}{M} \left(\frac{L}{r_2 - r_1} \right) \frac{R^2 - 1}{R^2} \times \frac{(R - 1)^2}{\ln R} + O(M^{-3/2}) \quad (13)$$

其中 $R = R_2/R_1$. 而第四区的解按(4)式为

$$\left. \begin{aligned} V_4 &= V_3(\rho, z) - V_3(\rho, 0)e^{-Mz} \\ B_4 &= B_3(\rho, z) + V_3(\rho, 0)e^{-Mz} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

然而, $\frac{\partial(B_4 r)}{\partial r} \Big|_{r=0} = \infty$, 无法再求高阶近似, 解不一致有效. 但可直接借用直管道情形的结果^[9], 将(11)式中的 $[z(1-z)]^{-1/4}$ 换为

$$\left\{ [z(1-z)]^{-1/4} - \frac{2F(z)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) M^{1/4}} \right\}$$

即可(相对误差为 $O\left(\frac{1}{\sqrt{M}}\right)$).

工作中得到谈镜生先生的帮助, 谨此致谢.

参 考 文 献

- [1] Hunt, J. C. R., Shercliff, J. A., *Ann. Rev. Fluid. Mech.*, **3** (1971).
- [2] Брановер, Г. Г., Циюбер, А. Б., *Магнитная Гидродинамика Несжимаемых Сред* (1970).
- [3] 陈允明, *力学学报*, 4(1978).
- [4] Hunt, J. C. R., Stewartson, K., *J. Fluid Mech.*, **23** (1965).
- [5] Fahidy, T. Z., *J. Fluid Mech.*, **42** (1970).
- [6] Baylis, J. A., Hunt, J. C. R., *J. Fluid Mech.*, **48** (1971).
- [7] Carleman, T., *Math. Zeitschrift* **15** (1922).
- [8] Гринберг, Г.А., *ДАН*, **141** (1961), *ПММ*, **25** (1961), *ПММ*, **26** (1962).
- [9] 陈允明, 直管道磁流体动力学流动的一致有效渐近解, *力学学报*, 2(1980).

(本文 1979 年 8 月 20 日收到)

会议拾锦

湍流会议报道

湍流理论是全国力学规划确定的重点研究课题, 为了推动我国湍流研究的发展, 中国力学学会 1980 年 10 月在青岛举行了湍流与流体稳定性学术交流会, 全国有 21 个单位 42 位代表参加. 会上共交流了二十七篇学术论文, 其中既有这一学术领域内最新进展的调研报告, 也有创造性的研究论文, 有理论分析, 数值计算, 也有实验技术应用研究.

湍流分组交流的文章, 介绍了国内外在湍流实验数据的数字处理, 湍流的模式理论和计算方法, 海洋边界层和湍流拟序结构等方面的发展概况; 而在理论研究方面报告了壁湍流(包括湍流边界层), 海洋宏观湍谱, 湍流统计理论和湍流扩散等方面的研究成果. 实验方面有坝体湍流边界层, 水流通过粗糙体湍流边界层

(下转 33 页)