

环向加筋圆柱壳在横向冲击波作用下的动力响应*

叶 裕 恭

(中国科学院力学研究所)

摘要 用一个均匀的单层壳作为“参考”结构,把环筋当作“外载”考虑其效应.利用“残余势”法处理流体和壳体之间耦合效应,导出了无限长、环筋等距分布圆柱壳体在计及中面有伸长和无伸长时,所有模式下的动响应表达式.方程式通过不同程度简化,能得到前人的一些结果.本文计算了两组壳体参数,绘出了相应的曲线,并比较了不同方法的结果.

一、引 言

早期,潜浸在无限介质中圆柱壳受到横向平面冲击波作用的动力响应^[1,2,3],为了避免反演积分的困难,都把壳体的散射波当作平面波来处理.这种处理方法,是基于时间 t 很小,且 $n > 0$ 时,有 $H_n^{(2)}(\xi) \approx j \frac{\partial H_n^{(2)}(\xi)}{\partial \xi}$ 成立(H_n 为Hankel函数, $\xi = \frac{rn}{ct}$),从而导致问题的简化,之后有人^[5]引进了“后流系数”,使散射波具有柱面波的一些特色,而这些方法得到的近似解只能实用于冲击波刚刚接触到壳体的早期阶段. Geers^[7]提出的“残余势”法,避免了上述方法之不足.

本文在 Geers 工作的基础上,针对具有等距环加筋、无限长圆柱壳受到一平面冲击波作用的情况,考虑到壳中面具有伸长和无伸长的两种效应,利用“参考结构”法,导出加筋圆柱壳的动力响应方程.壳中面有伸长的所有模式的响应,虽然最后是要衰减的,但是在冲击波刚刚接触到壳体的一瞬间,是很重要的,尤其在周波数 n 为1或2时,是不可忽略的.所谓“参考结构”法,即以均匀的单层壳作为“参考”结构,这个“参考”壳的自然频率和振型是确定的^[3],环筋当作“外载”考虑其效应,因此作用于“参考”壳上的全部“外载”,是由真实外载及环筋对应的“外载”两部分组成.最后得到的“参考”壳的动力响应方程即为加筋圆柱壳的动力响应方程.本文导得的结果简化后可得到前人的一些结果.

* 1979年10月4日收到.

二、“参考”均匀圆柱壳的微分运动方程

对无限长均匀单层圆柱壳,若只考虑壳中面的径向位移 w 和切向位移 v ,由壳体的自由振动得知:对于每个周波数 $n>0$,都存在两个频率及两个相应的振型,其中一对主要对应于壳中面无伸长的模式,而另一对主要对应于中面有伸长的模式($n=0$ 时,只考虑呼吸型),因此壳体动位移函数选择为

$$\left. \begin{aligned} w(\theta, t) &= w_0^{(2)}(\theta)q_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^2 w_n^{(i)}(\theta)q_n^{(i)}(t), \\ v(\theta, t) &= \sum_{n=1}^2 \sum_{i=1}^2 v_n^{(i)}(\theta)q_n^{(i)}(t), \end{aligned} \right\} \quad (1a)$$

式中 $q_n^{(i)}(t)$ 为广义坐标, $w_n^{(i)}(\theta)$, $v_n^{(i)}(\theta)$ 为振型函数,它们分别为

$$\left. \begin{aligned} w_n^{(i)}(\theta) &= \cos n\theta, \\ v_n^{(i)}(\theta) &= \delta_n^{(i)} \sin n\theta. \end{aligned} \right\} \quad (1b)$$

$\delta_n^{(i)}$ 为振型系数。“参考”圆柱壳的运动微分方程有

$$\ddot{q}_n^{(i)} + \omega_n^{(i)2} q_n^{(i)} = F_n^{(i)} / \epsilon_n \pi R m_n^{(i)}, \quad (2)$$

式中 $\omega_n^{(i)}$ 为单层壳的自然频率, $m_n^{(i)}$ 为广义质量,有 $m_n^{(i)} = m_s (1 + \delta_n^{(i)2})$. i, ϵ_n 分别如下:

$$i = \begin{cases} 2, & n=0; \\ 1, 2. & n>0. \end{cases} \quad \epsilon_n = \begin{cases} 2, & n=0; \\ 1, & n>0. \end{cases}$$

$F_n^{(i)}$ 为所有外载对广义坐标 $q_n^{(i)}$ 的广义力.

由虚功原理可以导出 $F_n^{(i)}$. 假定 $q_n^{(i)}$ 有虚位移 $\delta q_n^{(i)}$, 则壳中面有

$$\delta w = w_n^{(i)}(\theta) \delta q_n^{(i)}, \quad \delta v = v_n^{(i)}(\theta) \delta q_n^{(i)}.$$

各种外载的虚功总和 $\delta A_n^{(i)} = \sum_{l=1}^3 \delta(A_l)_n^{(i)}$.

$\delta(A_1)_n^{(i)}$ 、 $\delta(A_2)_n^{(i)}$ 、 $\delta(A_3)_n^{(i)}$ 分别为单位环筋惯性力、弹性力以及真实径向外力的虚功.

$$\left. \begin{aligned} \delta(A_1)_n^{(i)} &= - \int_0^{2\pi} \frac{\rho_r A_r (R+e)}{L_r} (\ddot{w}_G \delta w_G + \ddot{v}_G \delta v_G) d\theta, \\ \delta(A_2)_n^{(i)} &= - \frac{\partial V_R}{\partial q_n^{(i)}} \delta q_n^{(i)}, \\ \delta(A_3)_n^{(i)} &= \int_0^{2\pi} f_r(\theta, t) R \delta w d\theta. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

式中 w_G 、 v_G 为偏心距 e 的外筋其质心处的位移分量, 它和壳中面位移分量的关系为^[11]

$$w_G = w, \quad v_G = v \left(1 + \frac{e}{R}\right) + \frac{e}{R} \frac{\partial w}{\partial \theta}.$$

环筋应变能 V_R 有

$$V_R = \frac{1}{2L_r} \left[\int_0^{2\pi} \frac{E_r A_r R}{(R+e)^2} \left(\frac{\partial w_G}{\partial \theta} - w_G \right)^2 d\theta + \int_0^{2\pi} \frac{E_r I_x R}{(R+e)^4} \left(w_G + \frac{\partial^2 w_G}{\partial \theta^2} \right)^2 d\theta \right].$$

利用前面的关系式, 由(3)式可以得到

$$\delta(A_1)_n^{(i)} = \begin{cases} -\frac{\rho_r A_r (R+e)}{L_r} \int_0^{2\pi} (w_0^{(2)})^2 \bar{q}_0^{(2)}(t) \delta q_0^{(2)} d\theta, & (n=0); \\ -\frac{\rho_r A_r (R+e)}{L_r} \int_0^{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j=1}^2 \left\{ \left[\left(1 + \frac{e}{R}\right) v_m^{(j)} + \frac{e}{R} \frac{\partial w_m^{(j)}}{\partial \theta} \right] \left[\left(1 + \frac{e}{R}\right) v_n^{(i)} + \frac{e}{R} \frac{\partial w_n^{(i)}}{\partial \theta} \right] \bar{q}_m^{(j)} + w_m^{(j)} w_n^{(i)} \bar{q}_m^{(j)} \right\} \delta q_n^{(i)} d\theta, & (n>0). \end{cases}$$

$$\delta(A_2)_n^{(i)} = \begin{cases} -\frac{E_r A_r R}{L_r (R+e)^2} \int_0^{2\pi} (w_0^{(2)})^2 q_0^{(2)}(t) \delta q_0^{(2)} d\theta - \frac{E_r I_x R}{L_r (R+e)^4} \int_0^{2\pi} (w_0^{(2)})^2 q_0^{(2)}(t) \delta q_0^{(2)} d\theta, & (n=0); \\ -\frac{E_r A_r R}{L_r (R+e)^2} \int_0^{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j=1}^2 \left\{ \left[\left(1 + \frac{e}{R}\right) \frac{\partial v_m^{(j)}}{\partial \theta} + \frac{e}{R} \frac{\partial^2 w_m^{(j)}}{\partial \theta^2} - w_m^{(j)} \right] \times \right. \\ \left. \times \left[\left(1 + \frac{e}{R}\right) \frac{\partial v_n^{(i)}}{\partial \theta} + \frac{e}{R} \frac{\partial^2 w_n^{(i)}}{\partial \theta^2} - w_n^{(i)} \right] \right\} q_m^{(j)} \delta q_n^{(i)} d\theta - \\ -\frac{E_r I_x R}{L_r (R+e)^4} \int_0^{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j=1}^2 \left\{ \left[w_m^{(j)} + \frac{\partial^2 w_m^{(j)}}{\partial \theta^2} \right] \times \right. \\ \left. \times \left[w_n^{(i)} + \frac{\partial^2 w_n^{(i)}}{\partial \theta^2} \right] \right\} q_m^{(j)} \delta q_n^{(i)} d\theta, & (n>0). \end{cases}$$

$$\delta(A_3)_n^{(i)} = \begin{cases} R \int_0^{2\pi} f_r(\theta, t) w_0^{(2)} \delta q_0^{(2)} d\theta, & (n=0); \\ R \int_0^{2\pi} f_r(\theta, t) w_n^{(i)} \delta q_n^{(i)} d\theta, & (n>0). \end{cases} \quad (4a, b, c)$$

广义力满足关系式: $\delta(A_i)_n^{(i)} = (F_i)_n^{(i)} \delta q_n^{(i)}$.

把 $f_r(\theta, t)$ 按级数展开: $f_r(\theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(t) \cos n\theta$.

利用(1b)可得

$$\left. \begin{aligned} (F_1)_n^{(i)} &= \begin{cases} -2\pi R \beta_{r0}^{(2)} \bar{q}_0^{(2)}, & n=0; \\ -\pi R (\beta_{rn}^{(i)} \bar{q}_n^{(i)} + \beta_{rn}^{(i)'} \bar{q}_n^{(i)}), & n>0. \end{cases} \\ (F_2)_n^{(i)} &= \begin{cases} -2\pi R \alpha_{r0}^{(2)} q_0^{(2)}, & n=0; \\ -\pi R (\alpha_{rn}^{(i)} q_n^{(i)} + \alpha_{rn}^{(i)'} q_n^{(i)}), & n>0. \end{cases} \\ (F_3)_n^{(i)} &= \begin{cases} 2\pi R Q_0(t), & n=0; \\ \pi R Q_n(t), & n>0. \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

式中的系数分别为

$$\beta_{r0}^{(2)} = \frac{\rho_r A_r (R+e)}{L_r R}, \quad \alpha_{r0}^{(2)} = \left(\frac{E_r A_r}{L_r (R+e)^2} + \frac{E_r I_x}{L_r (R+e)^4} \right),$$

$$\begin{aligned} \beta_{rn}^{(i)} &= \frac{\rho_r A_r (R+e)}{L_r R} \left[\left(\delta_n^{(i)} \left(1 + \frac{e}{R} \right) - \frac{en}{R} \right)^2 + 1 \right], \\ \beta_{rn}^{(i)'} &= \frac{\rho_r A_r (R+e)}{L_r R} \left[\left(1 + \frac{e}{R} \right)^2 \delta_n^{(i)} \delta_n^{(j)} - \frac{e}{R} \left(1 + \frac{e}{R} \right) n (\delta_n^{(i)} + \delta_n^{(j)}) + \frac{n^2 e^2}{R^2} + 1 \right], \\ \alpha_{rn}^{(i)} &= \frac{E_r A_r}{L_r (R+e)^2} \left[\left(1 + \frac{e}{R} \right) n \delta_n^{(i)} - \frac{e}{R} n^2 - 1 \right]^2 + \frac{E_r I_x}{L_r (R+e)^4} [1 - n^2]^2, \\ \alpha_{rn}^{(i)'} &= \frac{E_r A_r}{L_r (R+e)^2} \prod_{i=1}^2 \left[\left(1 + \frac{e}{R} \right) n \delta_n^{(i)} - \frac{e}{R} n^2 - 1 \right] + \frac{E_r I_x}{L_r (R+e)^4} (1 - n^2)^2, \end{aligned}$$

$i, j = 1, 2, \text{ 但同一式中 } i \neq j.$

因此对于广义坐标 $q_n^{(i)}$ 的广义力为

$$F_n^{(i)} = \pi R \epsilon_n [Q_n(t) - (\alpha_{rn}^{(i)} q_n^{(i)} + \alpha_{rn}^{(i)'} q_n^{(j)}) - (\beta_{rn}^{(i)} \tilde{q}_n^{(i)} + \beta_{rn}^{(i)'} \tilde{q}_n^{(j)})'], \quad (6)$$

(6) 式中, 当 $n=0$ 时, 取 $i=2$, 而上标不为 2 的项皆为零. 当 $n>0$ 时, 取 $i=1$, 则 $j=2$; 取 $i=2$, 则 $j=1$. 把 (6) 式代入 (3) 式中有

$$\left. \begin{aligned} \tilde{q}_0^{(2)}(t) + \omega_0^{(2)2} q_0^{(2)}(t) + \frac{1}{m_0^{(2)}} (\beta_{r0}^{(2)} \tilde{q}_0^{(2)}(t) + \alpha_{r0}^{(2)} q_0^{(2)}(t)) &= \frac{Q_0(t)}{m_0^{(2)}}, \\ n=0; \\ \tilde{q}_n^{(i)}(t) + \omega_n^{(i)2} q_n^{(i)}(t) + \frac{1}{m_n^{(i)}} (\beta_{rn}^{(i)} \tilde{q}_n^{(i)}(t) + \beta_{rn}^{(i)'} \tilde{q}_n^{(j)'}(t)) \\ + \alpha_{rn}^{(i)} q_n^{(i)}(t) + \alpha_{rn}^{(i)'} q_n^{(j)}(t) &= \frac{Q_n(t)}{m_n^{(i)}}, \\ n>0. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

当考虑到流体和壳体之间的耦合效应时, (7) 式中的 $Q_n(t)$ 不仅与入射波大小有关, 而且也 and 壳体的运动相关连.

对于入射波为平面波, 由它引起的流场速度 u_I 和压力 f_I 关系为

$$u_I(r, \theta, t) = f_I(r, \theta, t) / \rho_f c,$$

u_I 在 r 方向的分量为

$$u_{Ir} = u_I \cos \theta.$$

壳体散射波引起的流场速度势函数 φ_s , 它满足波动方程

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi_s}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi_s}{\partial \theta^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi_s}{\partial t^2} = 0. \quad (8)$$

由它引起的流场压力 f_s 和速度 u_s 为

$$f_s = \rho_f \dot{\varphi}_s, \quad u_s = \frac{\partial \varphi_s}{\partial r}.$$

基于小扰动理论, 各种扰动引起流场的参数可以线性叠加, 因此在壳体表面 $r=R$ 处受到的径向外力为

$$f_r(\theta, t) = f_I(R, \theta, t) + \rho_f \dot{\varphi}_s|_{r=R}.$$

由于壳体与流体质点不产生脱离, 故有速度连续条件

$$\dot{w}(\theta, t) = \left(\frac{f_I(r, \theta, t)}{\rho_f c} \cos \theta + \frac{\partial \varphi_s}{\partial r} \right)_{r=R}.$$

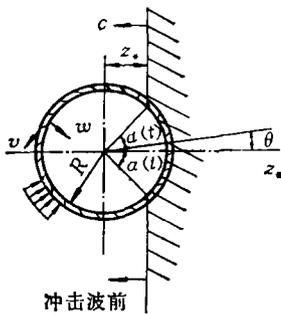


图 1

分别把 f_l , φ_s , u_{lr} 按级数展开, 得到

$$\begin{pmatrix} f_l(R, \theta, t) \\ \varphi_s(R, \theta, t) \\ u_{lr}(R, \theta, t) \end{pmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} f_{ln}(R, t) \cos n\theta \\ \psi_{sn}(R, t) \cos n\theta \\ u_{lrn}(R, t) \cos n\theta \end{pmatrix}, \quad (9)$$

因而有

$$\left. \begin{aligned} Q_n(t) &= f_{ln}(R, t) + \rho_f \psi_{sn}(R, t), \\ (\dot{q}_n^{(1)}(t) + \dot{q}_n^{(2)}(t)) &= u_{lrn}(R, t) + \left. \frac{\partial \psi_{sn}}{\partial r} \right|_{r=R}. \end{aligned} \right\} \quad (10a, b)$$

三、动力响应的解法

考虑到方程(7)、(8)及(10a, b), 并利用初值和边值条件(这里假设 $t=0$ 时, $w, v, \dot{w}, \dot{v}, \bar{v}, \varphi_s, \dot{\varphi}_s$ 皆为零, $\varphi_s|_{r \rightarrow \infty} = 0$), 原则上通过拉普拉斯变换的方法可以得到解的形式.

φ_s 的 n 阶谐量满足

$$\frac{\partial^2 \psi_{sn}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_{sn}}{\partial r} - \frac{n^2}{r^2} \psi_{sn} = \frac{1}{c^2} \ddot{\psi}_{sn} \quad (11)$$

(11)式为修正贝塞尔方程, 对它进行拉氏变换, 并使用(10)式及 $\varphi_s(\infty, 0, t) = 0$ 变换后的形式, 可以得到

$$\left. \begin{aligned} \bar{\psi}_{sn}(r, p) &= \left\{ \sum_{i=1}^2 p \bar{q}_n^{(i)}(p) - \bar{f}_{ln}(R, p) \frac{\cos \theta}{\rho_f c} \right\} \frac{K_n(\beta r)}{\beta K'_n(\beta R)}, \\ \frac{d\bar{\psi}_{sn}}{dr} &= \left\{ \sum_{i=1}^2 p \bar{q}_n^{(i)}(p) - \bar{f}_{ln}(R, p) \frac{\cos \theta}{\rho_f c} \right\} \frac{K'_n(\beta r)}{K'_n(\beta R)}. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

把(12)式代入到(7)、(10a)式变换后的形式中, 通过代数运算及反演, 可以得到

$$q_n^{(2)}(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c_0 - j\infty}^{c_0 + j\infty} \frac{(\bar{f}_{ln} - \rho_f p \bar{u}_{lr0}) \frac{K_n(\beta R)}{\beta K'_n(\beta R)} e^{pt}}{m_n^{(2)}(p^2 + \omega_n^{(2)2}) + (\beta_{n0}^{(2)} p^2 + \alpha_{n0}^{(2)}) - \rho_f p^2 \frac{K_0(\beta R)}{\beta K'_0(\beta R)}} dp, \quad n=0, \quad (13a)$$

$$q_n^{(1)}(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c_0 - j\infty}^{c_0 + j\infty} \frac{\left[\bar{f}_{ln} - \rho_f p \bar{u}_{lrn} \frac{K_n(\beta R)}{\beta K'_n(\beta R)} \right] [m_n^{(1)}(p^2 + \omega_n^{(1)2}) + p^2 (\beta_{n1}^{(1)} - \beta_{n1}^{(1)'}) + (\alpha_{n1}^{(1)} + \alpha_{n1}^{(1)'})] e^{pt}}{\prod_{k=1}^2 \left[m_n^{(k)}(p^2 + \omega_n^{(k)2}) + (\alpha_{n1}^{(k)} + \beta_{n1}^{(k)} p^2) - \frac{\rho_f p^2 K_n(\beta R)}{\beta K'_n(\beta R)} \right] - \prod_{k=1}^2 \left[(\alpha_{n1}^{(k)'}) + \beta_{n1}^{(k)' } p^2 - \frac{\rho_f p^2 K_n(\beta R)}{\beta K'_n(\beta R)} \right]} dp, \quad n > 0. \quad (13b)$$

$$\text{式中} \quad j = \sqrt{-1}, \quad i, \quad l = 1, 2, \\ \beta = p/c, \quad i \neq l.$$

$K'_0(\beta r)$, $K'_n(\beta r)$ 分别为第 2 类零阶和 n 阶修正贝塞尔函数 $K_0(\beta r)$, $K_n(\beta r)$ 对其宗量 βr 的导数. 显然用数值法处理(13)式是相当困难的, 为了避免直接反演积分的困难, 利用“残余速度势”法, 引进残余势函数 φ_R , 其 n 阶谱量 ψ_{Rn} 与速度势函数的 n 阶谱量 ψ_{sn} 之间关系有^[7]

$$\frac{\partial \psi_{sn}}{\partial r} + \frac{1}{c} \dot{\psi}_{sn} + \frac{1}{2r} \psi_{sn} = \frac{1}{r} \psi_{Rn}, \quad (14a)$$

$$f_{Rn}(R, t) = \rho_f \dot{\psi}_{Rn}(R, t). \quad (14b)$$

式中 f_{Rn} 为残余压力的第 n 阶谱量.

分别对(7)、(10)、(14)式的时间微分, 从(10b)、(14a)微分后的式中消去 $(\partial \psi_{sn} / \partial r)|_{r=R}$, 再利用(7)、(10a)得到 $\rho_f \dot{\psi}_{sn}|_{r=R}$, 代入到 $\rho \ddot{\psi}_{sn}|_{r=R}$ 的表达式中, 因此(7)式对时间微分后的形式有

$$\mathcal{D}_K q_n^{(k)} + d_K q_n^{(j)} = \frac{1}{m_n^{(k)}} \left(\dot{f}_{In} + \frac{c}{2R} f_{In} + \rho_f c \dot{u}_{Irn} + \frac{c}{R} f_{Rn} \right). \quad (15)$$

式中 $K \neq j$, $n=0$ 时, K 取值 2, 并有 $d_K q_n^{(j)} = 0$, $n>0$ 时, K, j 取值为 1, 2. \mathcal{D}_K, d_K 为线性微分算子.

$$\mathcal{D}_K = A_1^{(K)} \frac{d^3}{dt^3} + A_2^{(K)} \frac{d^2}{dt^2} + A_3^{(K)} \frac{d}{dt} + A_4^{(K)}, \\ d_K = B_1^{(K)} \frac{d^3}{dt^3} + B_2^{(K)} \frac{d^2}{dt^2} + B_3^{(K)} \frac{d}{dt} + B_4^{(K)}, \\ A_1^{(K)} = 1 + \beta_{rn}^{(K)} / m_n^{(K)}, \quad A_2^{(K)} = \frac{c}{2R} + \frac{c \beta_{rn}^{(K)}}{2R m_n^{(K)}} + \frac{\rho_f c}{m_n^{(K)}}, \\ A_3^{(K)} = \omega_n^{(K)2} + \frac{\alpha_{rn}^{(K)}}{m_n^{(K)}}, \quad A_4^{(K)} = \frac{c \omega_n^{(K)2}}{2R} + \frac{c \alpha_{rn}^{(K)}}{2R m_n^{(K)}}, \\ B_1^{(K)} = \frac{\beta_{rn}^{(K)'}}{m_n^{(K)}}, \quad B_2^{(K)} = \frac{\rho_f c}{m_n^{(K)}} + \frac{c \beta_{rn}^{(K)'}}{2R m_n^{(K)}}, \\ B_3^{(K)} = \frac{\alpha_{rn}^{(K)'}}{m_n^{(K)}}, \quad B_4^{(K)} = \frac{c \alpha_{rn}^{(K)'}}{2R m_n^{(K)}}.$$

(15)式就是环加筋圆柱壳的动力响应的微分运动方程, 式中的 $f_{Rn}(R, t)$ 可以如下导出:

由文献^[7]可知

$$\dot{\psi}_{Rn}(R, t) = - \int_0^t r_n(R, t-t') \dot{\psi}_{sn}(R, t') dt', \quad (16a)$$

$$\text{式中} \quad r_n(R, t) = \left(\frac{c}{R} \right) (-1)^{n+1} \int_0^t \frac{e^{-\left(\frac{ct}{R}\right)\xi}}{K_n^2(\xi) + \pi^2 I_n^2(\xi)} d\xi \\ + 2 \sum_{i=1}^n e^{-a_{ni} \frac{ct}{R}} \left(a_{ni} \cos \frac{b_{ni} c}{R} t + b_{ni} \sin \frac{b_{ni} c}{R} t \right), \quad (16b)$$

$I_n(\xi)$ 、 $K_n(\xi)$ 分别为第一类和第二类修正贝塞尔函数, ξ 为实变量, 不同的周波数 n 下, a_n , b_n , J_n 值示于下表.

$n=0$	—	—	—
$n=1$	—	—	$J_n=0$
$n=2$	$a_{21}=1.28137$	$b_{21}=0.42948$	$J_n=1$
$n=3$	$a_{31}=1.68179$	$b_{31}=1.30801$	$J_n=1$
$n=4$	$a_{41}=1.97816$ $a_{42}=2.62867$	$b_{41}=2.20437$ $b_{42}=0.43370$	$J_n=2$
$n=5$	$a_{51}=2.21863$ $a_{52}=3.13513$	$b_{51}=3.11308$ $b_{52}=1.30388$	$J_n=2$

由(7)、(10a)式得到 $\rho_f \dot{\psi}_m(R, t)$, 因此

$$\begin{aligned}
 f_{Rn}(R, t) = & - \left[(m_n^{(K)} + \beta_{rn}^{(K)}) \int_0^t r_n(R, t-t') \bar{q}_n^{(K)}(t') dt' + \right. \\
 & + \beta_{rn}^{(K)'} \int_0^t r_n(R, t-t') \bar{q}_n^{(j)}(t') dt' + (m_n^{(K)} \omega_n^{(K)2} + a_{rn}^{(K)}) \times \\
 & \left. \int_0^t r_n(R, t-t') q_n^{(K)}(t') dt' + a_{rn}^{(K)'} \int_0^t r_n(R, t-t') q_n^{(j)}(t') dt' \right. \\
 & \left. - \int_0^t r_n(R, t-t') f_{IR}(R, t') dt' \right], \quad (17)
 \end{aligned}$$

对于任何确定的时间 t , (16b) 式的积分值可用森甫生求积得到. 由方程(15)、(17), 并考虑到入射波的形式以及初值条件, 利用数值法可以得到 $q_n^{(K)}(t)$, $\dot{q}^{(K)}(t)$, $\bar{q}^{(K)}(t)$ 的时间历程.

从动力响应方程(15)可以看出, 若壳体为单层壳, 则有关加筋的项皆为零, (15)式简化为

$$\begin{aligned}
 \bar{q}_n^{(K)} + \frac{c}{2R} \bar{q}_n^{(K)} + \omega_n^{(K)2} \bar{q}_n^{(K)} + \frac{c\omega_n^{(K)2}}{2R} q_n^{(K)} + \frac{\rho_f c}{m_n^{(K)}} \sum_{i=1}^2 \bar{q}_n^{(i)} \\
 = \frac{1}{m_n^{(K)}} \left[\dot{f}_{In}(R, t) + \rho_f c \dot{u}_{Im}(R, t) + \frac{c}{2R} f_{In}(R, t) + \frac{c}{R} f_{Rn}(R, t) \right],
 \end{aligned}$$

式中 $\begin{cases} i, K=1, 2, i \neq K; (n > 0). \\ K=2, i \neq K \text{ 的项为零} (n=0). \end{cases}$

如再不计及中面伸长效应, 即 $q_n^{(2)}=0$, 则(18)式可简化为 Geers 方程形式^[7]. 如再考虑到式中的 $f_{Rn}=0$, $q_n^{(2)}=0$, 则得到 Haywood^[5] 采用后流系数 $\bar{g}_n = \frac{1}{2}$ 的结果. 进一步简化还可以得到文献[1]、[2]的方程.

四、阶梯波输入及计算例题

平面入射波的传播方向和壳体轴向垂直, 传播速度为 c . 阶梯波的数学描述为:

$$f_I = f_0 H(\tau)$$

式中 $\tau = t - (z_* + R)/c$, f_0 为压力幅值, t 为时间, z_* 为图 1 所示.

$$H(\tau) = \begin{cases} 0, & \tau \leq 0, \\ 1, & \tau > 0. \end{cases}$$

考虑到 $\alpha(t) = \cos^{-1}(1 - ct/R)$, 阶梯波的 n 阶谱量有

$$0 \leq t \leq 2R/c$$

$$f_{In} = \begin{cases} \frac{f_0 \alpha}{\pi}, & n=0; \\ \frac{2f_0 \sin n\alpha}{\pi n}, & n>0. \end{cases} \quad u_{In} = \begin{cases} \frac{1}{\rho_f c} \frac{f_0}{\pi} \sin \alpha, & n=0; \\ \frac{1}{\rho_f c} \frac{f_0}{\pi} (\alpha + \sin \alpha \cos \alpha), & n=1; \\ \frac{1}{\rho_f c} \frac{f_0}{\pi} \left[\frac{\sin(n-1)\alpha}{n-1} + \frac{\sin(n+1)\alpha}{n+1} \right], & n>1. \end{cases}$$

$$\dot{f}_{In} = \begin{cases} \frac{f_0 c}{R\pi \sin \alpha}, & n=0; \\ \frac{2f_0 c \cos n\alpha}{R\pi \sin \alpha}, & n>0. \end{cases} \quad \dot{u}_{In} = \begin{cases} \frac{f_0}{\pi \rho_f R} \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, & n=0; \\ \frac{2f_0}{\pi \rho_f R} \frac{\cos \alpha}{\tan \alpha}, & n=1; \\ \frac{f_0}{\pi \rho_f R} \left[\frac{\cos(n-1)\alpha + \cos(n+1)\alpha}{\sin \alpha} \right], & n>1. \end{cases}$$

$$t > 2R/c$$

$$f_{In} = \begin{cases} f_0, & n=0; \\ 0, & n>0. \end{cases} \quad u_{In} = \begin{cases} 0, & n=0; \\ \frac{f_0}{\rho_f c}, & n=1; \\ 0, & n>1. \end{cases}$$

$$\dot{f}_{In} = \dot{u}_{In} = 0, \quad n \geq 0.$$

以下列两组参数为例:

单层壳: $\rho_f/\rho_s = 7.8$,

$$R/h_s = 100,$$

$$(c_s/c)^2 = 12.5,$$

$$c_s = \frac{E}{\rho_s(1-\nu^2)},$$

加筋壳: $R = 7.874 \text{ in}$, $h_s = 0.091 \text{ in}$, $L_r = 2.378 \text{ in}$,

$$\rho_f = 0.73 \times 10^{-3} \text{ lbsec}^2/\text{in}^4,$$

$$\rho_s = 0.936 \times 10^{-4} \text{ lbsec}^2/\text{in}^4,$$

$$E = E = 0.3 \times 10^8 \text{ lb/in}^2,$$

$$e = 0.1555 \text{ in}.$$

利用龙格—库塔法对微分方程 (15)、(17) 取等时间步长进行数值积分. $t=0$ 时, $q_n^{(i)}$, $\dot{q}_n^{(i)}$, $\ddot{q}_n^{(i)}$ 皆为零, 由于 $\dot{f}_{In}|_{t=0}$, $\dot{u}_{In}|_{t=0}$ 具有奇异性, 因此把第一个时间步长 Δt 又分成许多分步长 δt^* , 取第一个时间分步长 δt^* 时的 $q_n^{(i)}$, $\dot{q}_n^{(i)}$, $\ddot{q}_n^{(i)}$, f_{In} , f_{Rn} 皆为零, 由 (15) 式得到

$$\left\{ \begin{aligned} m_n^{(1)} [A_1^{(1)} \ddot{q}_n^{(1)}(\delta t^*) + B_1^{(1)} \dot{q}_n^{(2)}(\delta t^*)] \\ m_n^{(2)} [B_1^{(2)} \ddot{q}_n^{(1)}(\delta t^*) + A_1^{(2)} \dot{q}_n^{(2)}(\delta t^*)] \end{aligned} \right\} = [f_{IR}(R, \delta t^*) + \rho_f c u_{In}(R, \delta t^*)]$$

由上式可以解出 $\bar{q}_n^{(1)}(\delta t^*)$ 值, 再用 $\dot{q}_n^{(1)}(\delta t^*) = q_n^{(1)}(\delta t^*) = 0$, 由 (15) 式可求出第二个时间分步长 (即 $t = 2\delta t^*$ 时) 的 $q_n^{(1)}(2\delta t^*)$, $\dot{q}_n^{(1)}(2\delta t^*)$, $\bar{q}_n^{(1)}(2\delta t^*)$ 的值. 由于 $f_{Rn}(R, t)$ 在时间 t 非常小时, 其值很微小, 因此在第一个时间步长 Δt 内的各个分步长 δt^* 的数值计算中都取 $f_{Rn}(R, t) = 0$, 有了第一步长时的 $q_n^{(1)}$, $\dot{q}_n^{(1)}$, $\bar{q}_n^{(1)}$ 的值, 以后的积分计算就不困难了. 处理 $f_{In}|_{t=0}$, $\dot{u}_{In}|_{t=0}$ 奇异性另一个办法是借用散射波为平面波解的形式, 计算出第一个分步长 δt^* 时壳体动力响应值, 再以这些值作为本方法计算的初始值就不困难了. 之所以可以如此处理, 是基于冲击波刚刚开始与壳体接触的瞬间, 散射波以平面波的形式来考虑具有足够的精确性 (见引言).

壳体中的应力有下列关系^[8]:

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{N_{\theta\theta}}{h_s} - \frac{12M_{\theta\theta}}{h_s^3}z, \quad (18)$$

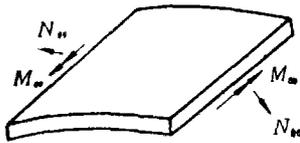


图 2

式中 $N_{\theta\theta}$ ——环向法向力,

$M_{\theta\theta}$ ——环向弯矩,

z ——壳上的点距中面的距离.

$$M_{\theta\theta} = -\frac{Eh_s^3}{12(1-\nu^2)R^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + w \right),$$

$$N_{\theta\theta} = \frac{Eh_s}{R(1-\nu^2)} \left(-\frac{\partial v}{\partial \theta} - w \right).$$

(18) 式右端第一项为薄膜应力 σ_d , 第二项为弯曲应力 σ_f (不考虑 $n=0$ 的情况), 因此有

$$\sigma_d = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E}{R(1-\nu^2)} \left[(\delta_n^{(1)} q_n^{(1)} + \delta_n^{(2)} q_n^{(2)}) n - (q_n^{(1)} - q_n^{(2)}) \right] \cos n\theta,$$

$$\sigma_f = \frac{Ez}{R^2(1-\nu^2)} \sum_{n=1}^{\infty} (1-n^2) (q_n^{(1)} + q_n^{(2)}) \cos n\theta.$$

把计算结果绘成曲线, 曲线 (1) — (4) 示出了单层壳在同样计及中面伸长效应, 在周波数 $n=1$ 和 2 时, 散射波作为平面波处理 (以后简称为平面波解) 与本文解的结果, 两者比较可知, 在开始的一段时间内 $\dot{q}_n^{(1)}$ 是吻合的, 随着时间增长, 两者偏差越大, 最大峰值处相差为 10%, 以后的时间, 相差就更大. 不过就产生最大峰值的时间而言, 两种方法的结果基本上是一致的. 曲线 (5) — (15) 为各种周波数 n 下, 最大幅值处 (波峰处) 在未计及中面伸长 (文献 [7] 的结果) 与本文解之间的比较. 可以看出, 不管 n 为多少, 考虑中面伸长效应后, 最大径向位移、速度、加速度响应都要比未计及伸长效应的来得大. 在 $n=1$ 时, 前者的最大加速度峰值要比后者大 50% 以上. $n=2$ 时, 在冲击波尚未包围整个壳体之前, 两种方法得到的径向位移基本上一致, 但在冲击波将近包围整个壳体时, 两者之间开始出现了较明显的分歧. 至于最大加速度峰值, 计及了中面伸长效应的结果要比未计及的高出 15%. 从 $n=3-5$, 两种方法得到的 w_n , \dot{w}_n 都有不同程度的差别. 计及中面伸长效应的响应曲线是振荡衰减的, 因此随着时间增加, 计及中面伸长与未计及中面伸长的两者结果趋于一致.

环向加筋圆柱壳的动力响应计算结果, 给出了 $\alpha = 0^\circ$ 处的弯曲应力的时间历程, 从不同周波数 n 的弯曲应力叠加结果得知, 随着 n 增加, 高阶的弯曲应力分量在总应力中所占的份量越来越小, 因此只要考虑前面几个周波数的值就可以了。

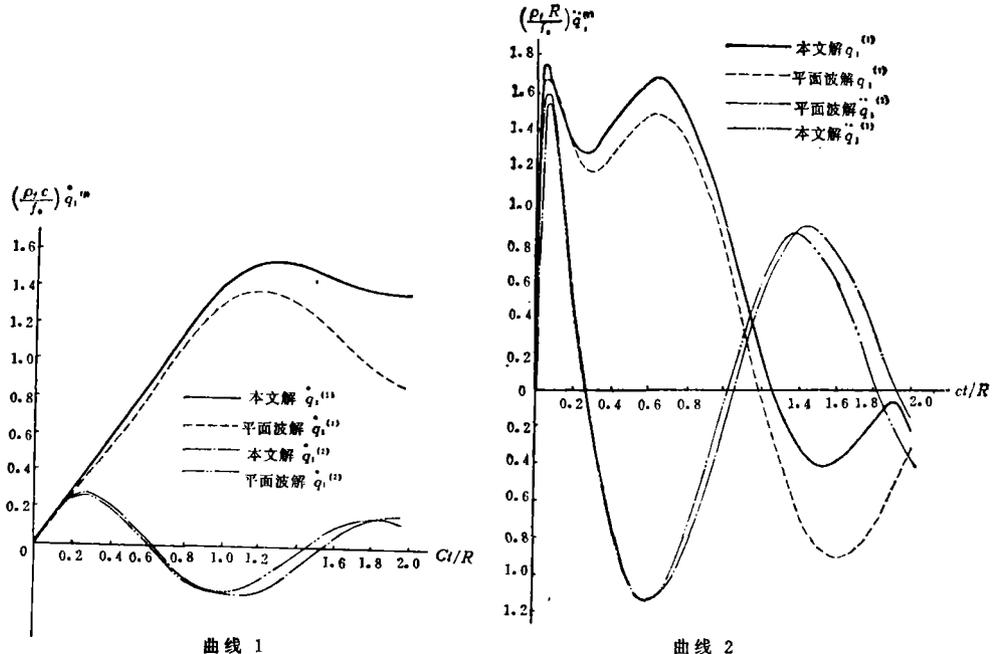
五、结 束 语

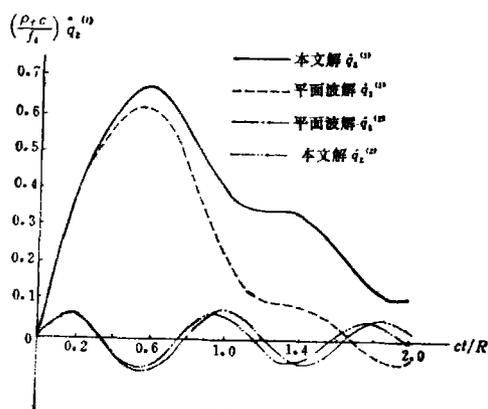
还须说明的问题是: 在考虑流体和壳体之间的耦合效应的情况下, 当圆柱壳具有纵横筋复合加强、内部具有附加质量、壳体是变厚度等等情况, 皆可以用“参考结构”的方法来处理, 只要分别考虑各种因素相应的广义力即可。

基于散射波作为平面波来处理, 得到冲击波刚刚触及壳体的暂短时间的响应是可靠的, 因此可以把“平面波”法得到的 δt^* 时的响应值作为“残余势”法的初始值(以 $\dot{f}_{1n}(\delta t^*)$ 和 $\dot{u}_{1n}(\delta t^*)$ 的值为有限, 在机器上不溢出为准), 再利用“残余势”法, 则可以得到较长时间的可靠结果, 把两种方法结合在一起可以相互取长补短。

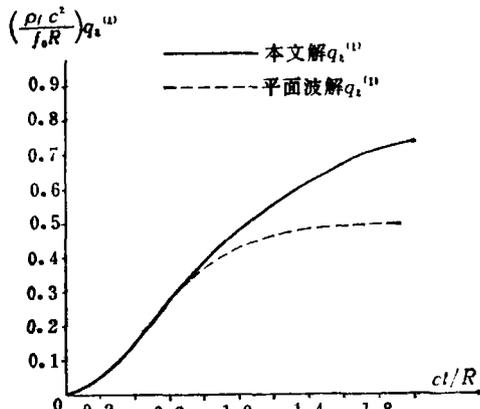
为了得到在 $n=1$ 和 $n=2$ 短时间加速度响应的正确结果, 就必须计及壳中面伸长效应, 否则将带来很大的误差。

壳体中的弯曲应力大小主要取决于前面几阶低周波的响应, 因此在计算中, 级数项取得很多是没有必要的。

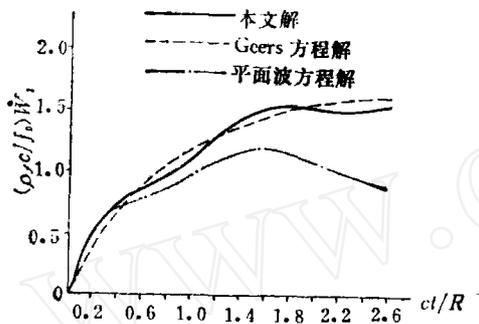




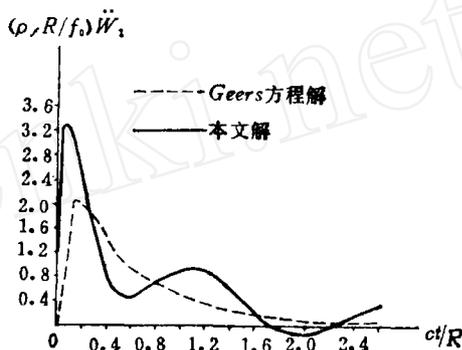
曲线 3



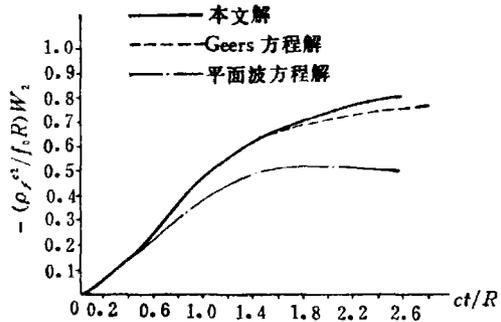
曲线 4



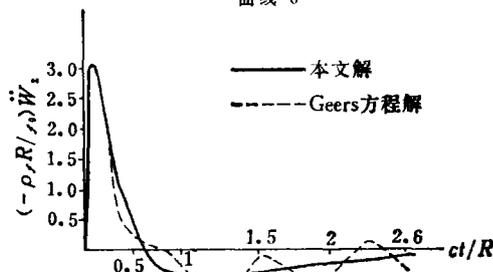
曲线 5



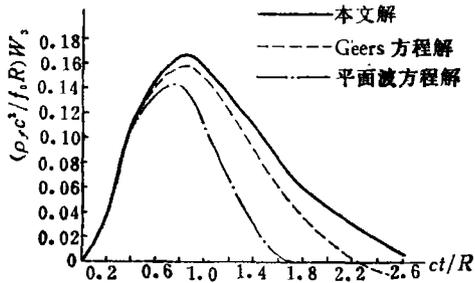
曲线 6



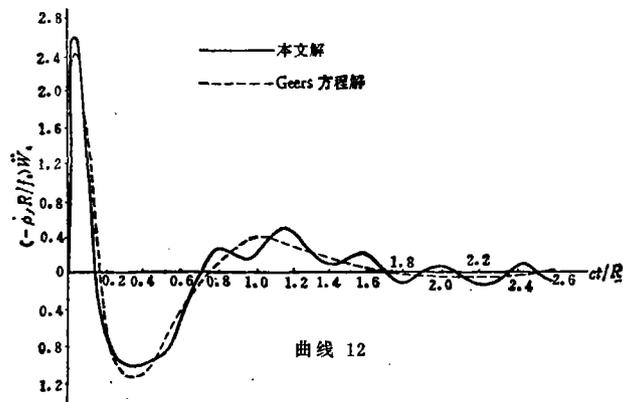
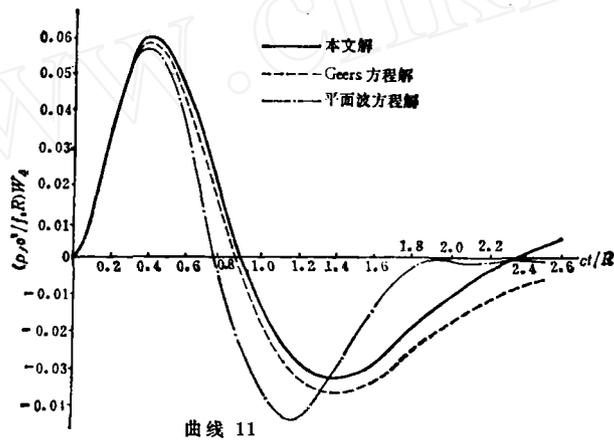
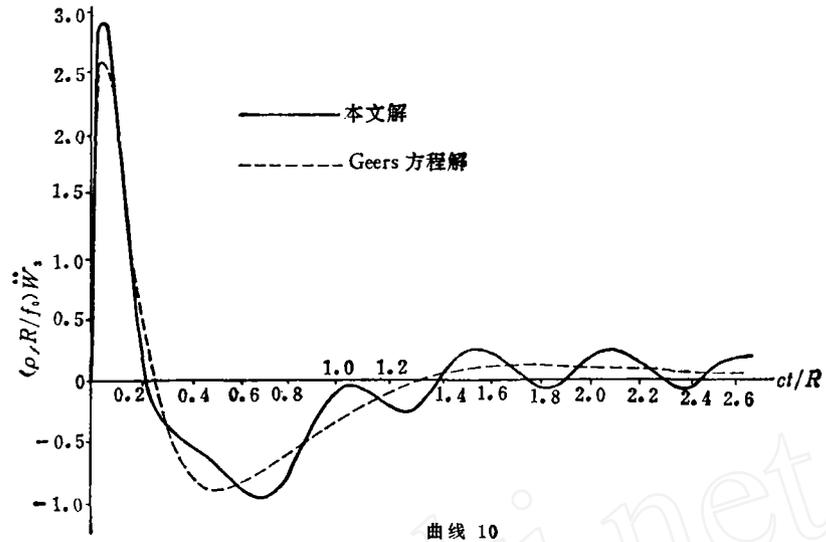
曲线 7

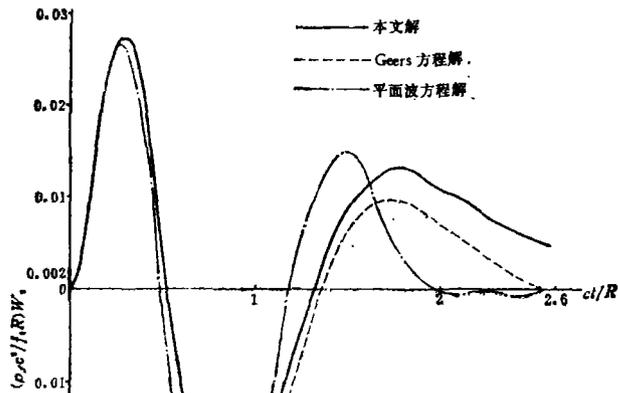


曲线 8

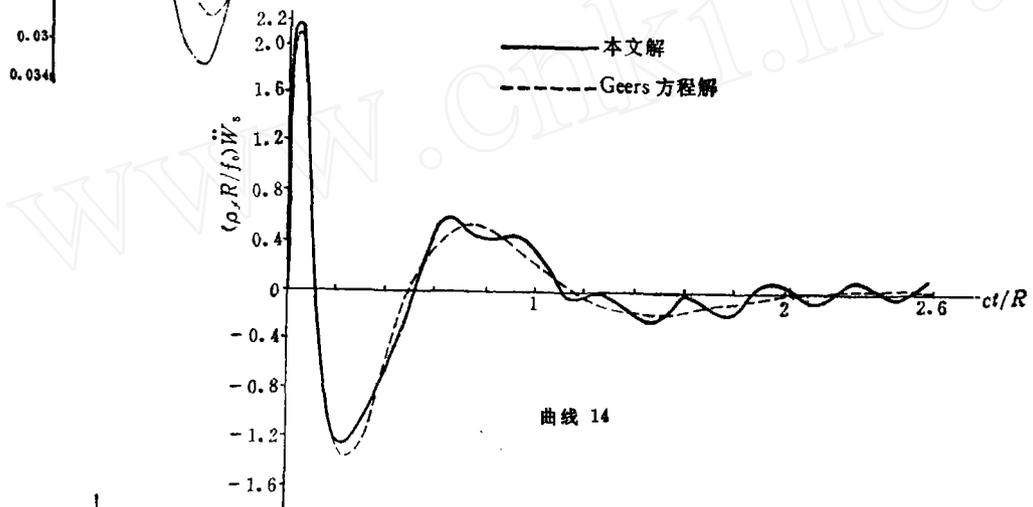


曲线 9

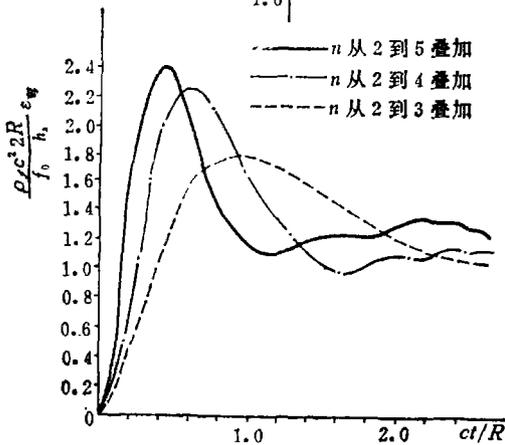




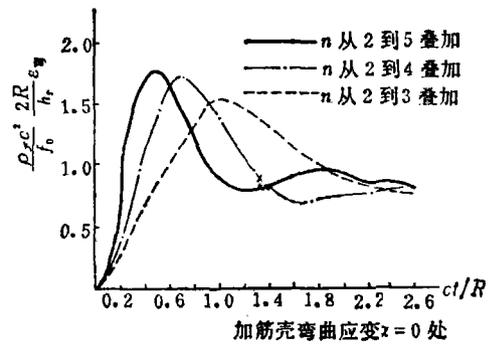
曲线 13



曲线 14



曲线 15



加筋壳弯曲应变 $\alpha = 0$ 处
曲线 16

符 号

R ——壳中面半径.

$w_n^{(i)}(\theta), v_n^{(i)}(\theta)$ ——壳体的振型函数.

$m_n^{(i)}$ ——广义质量. $m_n^{(i)} = m_s (1 + \delta_n^{(i)2})$,

$$m_s = \rho_s h_s.$$

L_R ——环筋间距.

ρ_s, ρ_f ——分别为壳体(和筋条)材料以及流场介质的密度.

h_s ——壳体厚度.

$\omega_n^{(i)}, \delta_n^{(i)}$ ——分别为单层壳在 n 阶周波数

下的 i 模式对应的频率和振型系数.

$F_n^{(i)}$ ——广义坐标 $q_n^{(i)}$ 的广义力.

E, E_r ——分别为壳体和筋条材料的弹性模量.

A_r ——环筋横截面积.

I_x ——环筋横截面对其形心的惯性矩.

c_s ——材料中的声速.

c ——流场介质中的声速.

参 考 文 献

- [1] Mindlin R. D., Bleich H. H., J. Appl. Mech., (1953), 189—195.
- [2] Melvin L. Baron, Proc. of the Second U. S. National Congress of Appl. Mech., (1954), 201—212.
- [3] Bleich H. H., Baron M. L., J. Appl. Mech., 21 (1954), 178—184.
- [4] Bleich H. H., Proc. of the Second U. S. National Congress of Appl. Mech., (1954), 213—223.
- [5] Haywood J. H., The Quart. J. Mech. & Appl. Math., May, 11(1958), 129—141.
- [6] Lyons W. C., Russel J. E., Herrmann G., J. Engng. Mech. Div., Proc. ASCE, Vol. 94, No. EM2, Apr. (1968), 397—420.
- [7] Geers, J. L., J. Appl. Mech. 36 (1969), 459—469.
- [8] Liao E. N. K., Kessel P. E., J. Appl. Mech., 38, 4(1971), 978—986.
- [9] Galletly D. G., Proc. of the Second U. S. National Congress of Appl. Mech., (1954), 225—231.
- [10] Basdekas N. L., Chi, M., J. Sound. Vib., 17, 2 (1971), 187—206.
- [11] 十二室, 力学情报, 中国科学院力学研究所, 3 (1976), 64—80.

THE RESPONSE OF RING-STIFFENED ELASTIC CYLINDRICAL SHELL OF INFINITE LENGTH TO A TRANSVERSE SHOCK WAVE

Yeh Yuh-gong

(Institute of Mechanics, Academia Sinica)

Abstract

This method employs a simple, unstiffened uniform circular cylindrical shell as a "reference structure" and treats the ring stiffeners as "external" loadings on the uniform shell.

Based on the assumption of small perturbation, the coupled effect between the fluid and shell is considered. The real external loading on the shell is the sum of the pressure of the incident shock wave and the scattered waves. In order to avoid the difficulty in the direct inversion of the Laplace transformation, the "residual potential" method is used. The elastic response of the shell is obtained by a series in terms of all normal modes of oscillation of the structure, including both the non-extensional and extensional effects in all modes.

Calculation was made for two groups of data and curves were drawn from the calculated results, from which some useful conclusions can be reached.

The equations derived in this paper can be reduced to be identical with some equations published by other workers.

出 版 消 息

钱伟长教授著《变分法与有限元》(上)已由科学出版社出版.