

毛细血管中红细胞间血浆的“团流”解

严 宗 毅

(中国科学院力学研究所)

摘 要

本文采用 Galerkin 方法以及数值平滑技巧,获得了毛细血管中介于红细胞间的“团流”近似解,并详尽讨论了红细胞直径与毛细血管直径之比 λ 和红细胞同血管壁间的润滑层中回漏流量参数 Q 对于“团流”的影响。

文中还纠正了以往关于边界条件的不合理提法,使“团流”解同润滑层中流动相衔接。与其它理论计算相比较,结果是一致的。它为计算红细胞变形提供了正确的边界条件。

一、引 言

毛细血管是血液和周围组织进行新陈代谢的场所,研究毛细血管中的血流对于生理学、病理学都具有重要意义。由于它结构细微,定量观测极其困难,而大尺度模型试验又因不能完全模拟,也只能提供定性图象。因此,近十年来,国外广泛采用各种理想化的数学模型进行研究。

毛细血管的直径和天然状态的红细胞直径相比,往往相差不多,甚至更小。因此,血液循环时,红细胞只能成单排“挤”进毛细血管,它在发生大变形后,几乎充溢整个管腔。显微摄影和大尺度模型实验都清晰地表明: 不管变形后的红细胞直径多么接近于管径,在红细胞和管壁间总有一层很薄的润滑层;而介于相邻两个红细胞间的血浆,相对于随红细胞运动的坐标系做环流运动,即所谓“团流”(Bolus Flow)。

研究毛细血流中的压力-流量关系是微循环力学中具有基本意义的课题。一些作者曾把红细胞看成形状不变的刚性颗粒,但这种模型由于不能确定红细胞的真实形状,因此无法获得准确的压力-流量关系;1968年 Lighthill^[1]把红细胞看成弹性弹丸,考虑了弹丸变形和润滑层中血浆运动的相互作用,既能算出血流的压降,也可确定红细胞的形状。但由于细胞膜的实际弹性模式比文献[1]所假定的要复杂得多,而且只考虑润滑层,不考虑红细胞两侧的“团流”也会引起较大的误差,所以其结果只能定性地与模型试验相一致,而且不能合理解释红细胞后缘由活体和大尺度试验所观察到的降落伞形状。因此,开展对“团流”的研究似乎是十分必要的。

1969年 Lew 和 Fung^[2]采用本征函数展开法,首次获得了“团流”的半解析解。他们把红细胞简化成与血管等直径的等厚度圆盘,随后,又采用沿直径等距分布的无限薄圆盘模型,把

本文 1980 年 8 月 8 日收到。

上述方法推广到直径小于管径的情形[3]。1970年, Bugliarello 和 Hsiao^[4]对于直径等于或小于管径的两种情况, 获得了“团流”的数值解。这些文章揭示了“团流”的物理图象, 阐述了“团流”的生理意义, 得出一些有意义的结论。

关于“团流”的上述数学模型, 其共同缺陷是都没有把“团流”区的解和薄润滑层的速度剖面相衔接。此外, 润滑层的厚度各不相同, 而红细胞相对于管壁的速度大于血浆和红细胞的平均流速, 所以在润滑层中有血浆回漏。润滑层厚度和回漏流量同生理、病理条件有关, 它们必将会对介于红细胞间的“团流”发生一定影响。文献[2—4]中, 不是由于未考虑润滑层厚度和回漏流量, 就是没有使“团流”解同润滑层速度剖面相衔接, 因此, 问题的提法都不够合理。1972年, Fitz-Gerald^[5]试图考虑这些因素, 用类似于文献[2]的方法得到了流函数的级数解。然而, 其速度和压力的表达式是发散的。

本文在严格满足润滑层速度剖面衔接的条件下, 采用 Galerkin 方法求出了半解析形式的“团流”近似解, 并分析了润滑层厚度和回漏流量对“团流”的影响, 以克服上述缺陷。

二、问题的提法

假定毛细血管为半径是 r_0^* 的直圆管, 其中轴对称地、以间距 $2L$ 悬浮分布着半径为 λr_0^* 的等厚度圆盘形红细胞, 红细胞间充满着粘度为 μ^* 的血浆(当作牛顿流体)。我们把对称轴上两个红细胞间的中点取为原点, r^* , x^* 分别为柱坐标系的径向、轴向坐标, 该坐标系随红细胞一

起以速度 U^* (即红细胞相对于管壁的运动速度)运动(图1)。

然后, 我们按下述方法将坐标和有关

物理量无量纲化; $L = \frac{L^*}{r_0^*}$, $r = \frac{r^*}{r_0^*}$, $x =$

$\frac{x^*}{r_0^*}$, $\bar{x} = \frac{x}{L} = \frac{x^*}{L^*}$, 轴向速度 $u = \frac{u^*}{U^*}$, 径

向速度 $v = \frac{v^*}{U^*}$, 压力 $p = \frac{p^* r_0^{*2}}{\mu^* U^*}$, 切应力

$\tau = \frac{\tau^* r_0^*}{\mu^* U^*}$, 流函数 $\psi = \frac{\psi^*}{U^* r_0^{*2}}$ 。显然,

$r=0, 1$ 分别为对称轴和管壁, $\bar{x} = \pm 1, 0$

$\leq r \leq \lambda$ 为红细胞表面, $x = \pm 1, \lambda \leq r \leq 1$ 为润滑层的出入口, 其中 λ 为红细胞直径与管径之比。

为了导出润滑层出入口处的边界条件, 考虑到在薄润滑层中可忽略径向压力梯度、径向速度, 得到润滑层中的血浆运动方程及边界条件:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dp}{dx} &= \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr} \right), \\ u|_{r=\lambda} &= 0, \quad u|_{r=1} = -1, \\ \int_{\lambda}^1 u r dr &= Q, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

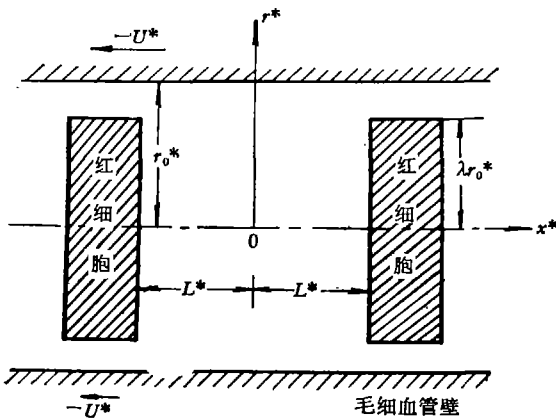


图1 坐标系

式中 $Q = \frac{Q^*}{U^* r_0^*}$, $2\pi Q^* r_0^*$ 表示沿毛细血管一周薄润滑层中的回漏流量, 积分上述方程 (1), 可得润滑层中的速度剖面

$$u = g_1 r^2 + g_2 \ln r - g_1 - 1, \quad (2)$$

式中

$$g_1 = \frac{1}{4} \frac{dp}{dx} = \frac{4Q - 2 - \frac{1 - \lambda^2}{\ln \lambda}}{(1 - \lambda^2) \left(1 + \lambda^2 + \frac{1 - \lambda^2}{\ln \lambda} \right)},$$

$$g_2 = \frac{1}{\ln \lambda} [g_1(1 - \lambda^2) + 1].$$

若流函数定义为:

$$u = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad v = \frac{-1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (3)$$

不难导出:

$$\psi = G_0 + G_2 r^2 + \frac{1}{2} g_2 r^2 \ln r + \frac{1}{4} g_1 r^4, \quad (4)$$

式中 $G_0 = \frac{1}{4} (g_1 \lambda^2 + g_2) \lambda^2$, $G_2 = -\frac{1}{4} (2g_1 + g_2 + 2)$. 取对称轴为零流线, 在红细胞表面的流函数分布为:

$$\psi = F(r) = \begin{cases} -Q & r = 1 \text{ 时,} \\ G_0 + G_2 r^2 + \frac{1}{2} g_2 r^2 \ln r + \frac{1}{4} g_1 r^4, & \lambda \leq r \leq 1 \text{ 时,} \\ 0, & 0 \leq r < \lambda \text{ 时.} \end{cases} \quad (5)$$

由此可见, 文献[2—4]关于边界条件的规定都是同 (5) 式不相符的, 因而也是不合理的, 而 (5) 式才是边界条件的正确提法.

现在来考虑流函数 ψ 的近似方程. 由于毛细血管直径小 (3—15 微米), 血流速率低 (0.1—2 毫米/秒), R_e 约为 10^{-2} — 10^{-3} 左右, 是低雷诺数流动. 所以, 可以忽略惯性力. 采用 Stokes 方程来描述“团流”区血浆运动:

$$E^4 \psi = 0, \quad (6)$$

式中 E 为微分算子:

$$E = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{L^2} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \right)^2.$$

由问题的轴对称性、壁面上血浆粘着条件及 (5) 式, 可以得到如下的边界条件:

$$\left. \begin{aligned} r = 0, \quad \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = 0, \quad \psi = 0, \\ r = 1, \quad \frac{\partial \psi}{\partial r} = -1, \quad \psi = -Q, \\ \bar{x} = \pm 1, \quad \psi = F(r), \quad \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \bar{x}} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

这样,就把研究“团流”区的血浆运动,归结成在边界条件(7)下,求解方程(6)这样一个数学问题.

三、Galerkin 方法和数值平滑

Galerkin 方法是应用数学和力学中常用的近似计算方法. 我们用它解上述问题的基本思想是: 首先假定

$$\psi = \psi_0 + \sum_{j=1}^n A_j \psi_j. \quad (8)$$

适当选择 ψ_0 和 $\psi_j (j = 1, 2, \dots, n)$ 的形式,使 ψ_0 满足边界条件(7), ψ_j 满足相应的齐次边界条件:

$$\left. \begin{aligned} r = 0, \quad \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi_j}{\partial r} \right) = 0, \quad \psi_j = 0, \\ r = 1, \quad \frac{\partial \psi_j}{\partial r} = 0, \quad \psi_j = 0, (j = 1, 2, \dots, n). \\ \bar{x} = \pm 1, \quad \psi_j = 0, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_j}{\partial \bar{x}} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (7')$$

因而, ψ 本身也严格满足边界条件(7). 随后,我们再按 Galerkin 方法的一般步骤,要求

$$\iint \psi_j E^4 \psi dr d\bar{x} = 0 (j = 1, 2, \dots, n) \quad (9)$$

得到确定系数 A_j 的 n 阶线性代数方程组

$$\sum_{j=1}^n K_{ij} A_j = -K_{i0} (i = 1, 2, \dots, n). \quad (10)$$

使 ψ 近似地满足(6)式,式中

$$K_{ij} = \int_0^1 \int_0^1 \psi_i E^4 \psi_j dr d\bar{x}, \quad K_{i0} = \int_0^1 \int_0^1 \psi_i E^4 \psi_0 dr d\bar{x}.$$

确定系数 A_j 后,所得的 ψ 即为问题的近似解.

本文取 $n = 12$. 至于 ψ_j 的具体形式,可取为不高于 10 次的偶次多项式,这是因为 ψ 关于坐标 r 和 \bar{x} 均对称的缘故. 于是, ψ 可表达为:

$$\begin{aligned} \psi = \psi_0 + (1 - \bar{x}^2)^2 r^2 (1 - r^2)^2 [& (A_1 + A_2 r^2 + A_3 r^4) \\ & + (A_4 + A_5 r^2 + A_6 r^4) \bar{x}^2 + (A_7 + A_8 r^2 + A_9 r^4) \bar{x}^4 \\ & + (A_{10} + A_{11} r^2 + A_{12} r^4) \bar{x}^6]. \end{aligned} \quad (11)$$

在选取 ψ_0 的形式时,注意到文献[2]和[4]的结论: 当红细胞间距 $2L$ 较大时,离红细胞表面距离超过 $1.3r_0$ 处的血浆流的速度剖面,接近于 Poiseuille 流的剖面. 故我们可合理地假定:

$$\psi_0 = \psi_p(r) y(\bar{x}) + F(r) [1 - y(\bar{x})], \quad (12)$$

式中

$$\psi_p(r) = \frac{1}{2} [(1 - 4Q)r^2 - (1 - 2Q)r^4] \quad (13)$$

是流量为 $-Q$ 的 Poiseuille 流的流函数,其它符号的意义为:

$$\left. \begin{aligned}
 y(\bar{x}) &= \begin{cases} 1, & 0, & \text{当 } \bar{x} \leq \bar{x}_0 \text{ 时,} \\ (1 - \xi^4)^2, & \text{当 } \bar{x}_0 < x \leq 1 \text{ 时,} \end{cases} \\
 \bar{x}_0 &= \begin{cases} 0, & \text{当 } L \leq 1.3 \text{ 时,} \\ 1 - \frac{1.3}{L}, & \text{当 } L > 1.3 \text{ 时,} \end{cases} \\
 \xi &= \frac{x - \bar{x}_0}{1 - \bar{x}_0}.
 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

容易验证: (11), (12) 两式的 ϕ_0, ϕ_j ($j = 1, 2, \dots, n$) 分别满足边界条件(7), (7')式. 上述选取方法不仅使(10)式中的 K_{ij}, K_{i0} 均可得到解析形式, 而且可用较少的项达到较高的准确程度.

我们知道, 一个函数逼近于真值, 并不意味着其导数也逼近于真值, 近似函数可能在真值附近发生波动, 特别是对于用高次多项式来逼近的情况. 由此可见, 尽管(11)式本身是问题的良好近似, 但欲求速度、压力、切应力等其它物理量时, 不能不对该函数进行求导, 结果可能使误差恶性放大. 因此, 本文宁可放弃使用解析表达式, 而用逐段数值平滑的方法来修匀 ϕ 和进行数值微分, 以减小误差.

本文采用五点三次曲线拟合方案进行平滑和微分, 若点的间距为 h , 平滑后的函数和导数值为

$$\left. \begin{aligned}
 f_{-2} &= \frac{1}{70} (69y_{-2} + 4y_{-1} - 6y_0 + 4y_1 - y_2), \\
 f_{-1} &= \frac{1}{35} (2y_{-2} + 27y_{-1} + 12y_0 - 8y_1 + 2y_2), \\
 f_0 &= \frac{1}{35} (-3y_{-2} + 12y_{-1} + 17y_0 + 12y_1 - 3y_2), \\
 f_1 &= \frac{1}{35} (2y_{-2} - 8y_{-1} + 12y_0 + 27y_1 + 2y_2), \\
 f_2 &= \frac{1}{70} (-y_{-2} + 4y_{-1} - 6y_0 + 4y_1 + 69y_2),
 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

$$\left. \begin{aligned}
 f'_{-2} &= \frac{1}{84h} (-125y_{-2} + 136y_{-1} + 48y_0 - 88y_1 + 29y_2), \\
 f'_{-1} &= \frac{1}{42h} (-19y_{-2} - y_{-1} + 12y_0 + 13y_1 - 5y_2), \\
 f'_0 &= \frac{1}{12h} (y_{-2} - 8y_{-1} + 8y_1 - y_2), \\
 f'_1 &= \frac{1}{42h} (5y_{-2} - 13y_{-1} - 12y_0 + y_1 + 19y_2), \\
 f'_2 &= \frac{1}{84h} (-29y_{-2} + 88y_{-1} - 48y_0 - 136y_1 + 125y_2).
 \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

平滑和微分需沿着 r 和 \bar{x} 方向各进行一次, 边界上的点因已满足边界条件, 无须进行平滑; 内点则除了靠近边界处外, 尽量采用 (15), (16) 式中关于 f_0 和 f'_0 的公式. 在 $\lambda < 1$ 时, 注意到

$r = \lambda$ 处 $F(r)$ 的二阶导数有间断,因此在 $r = \lambda$ 两侧应分别进行平滑和微分,否则会导致误差增大.

毛细血管壁上及红细胞表面上的切应力 τ_B , τ_S 和压力梯度 $\left(\frac{dp_s}{dr}\right)$ 同速度在边界上的一、二阶导数有关,即

$$\tau_B = \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)_{r=1}, \quad (17)$$

$$\tau_S = \frac{1}{L} \left(\frac{\partial v}{\partial \bar{x}}\right)_{\bar{x}=\pm 1}, \quad (18)$$

$$\frac{dp_s}{dr} = \frac{1}{L^2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial \bar{x}^2}\right)_{\bar{x}=\pm 1}. \quad (19)$$

为了用数值微分法求出上述各物理量,分别以 $r = 1$ 或 $\bar{x} = 1$ 为端点,取间距为 h 的相邻五点 y_0, y_1, y_2, y_3, y_4 , 在保持端点值 y_0 固定的条件下(因为它由边界条件确定),同样用最小二乘三次多项式平滑和求导,可得:

$$\left. \begin{aligned} f'_0 &= \frac{-1}{h} (4.1324476622z_1 - 2.8985507225z_2 + 0.4714170689z_3), \\ f''_0 &= \frac{2}{h^2} (-2.89855077224z_1 + 2.1521739114z_2 - 0.3623188403z_3), \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

式中 $z_1 = y_1 + 2y_2 + 3y_3 + 4y_4 - 10y_0$, $z_2 = y_1 + 4y_2 + 9y_3 + 16y_4 - 30y_0$, $z_3 = y_1 + 8y_2 + 27y_3 + 64y_4 - 100y_0$. 注意到方程(6)是按(9)式加权平均意义上成立的,权函数 ϕ_i 的峰值多数在 $r = 1$, $\bar{x} = 1$ 附近;在那里边界条件又是严格满足的,可以期望,经过平滑后再微分,能得到切应力和压力梯度的良好近似.

我们还可以由压力梯度积分及管壁应力同压差的平衡得到红细胞表面上的压力分布及 \bar{x} 为常数截面上的平均压力 $\langle p \rangle$:

$$\Delta p_s = p_s - (p_s)_{r=0} = \int_0^r \left(\frac{dp_s}{dr}\right)_{\bar{x}=\pm 1} dr, \quad (21)$$

$$\langle p \rangle - \langle p \rangle|_{\bar{x}=0} = 2L \int_0^{\bar{x}} \tau_B d\bar{x}. \quad (22)$$

此外,另一个重要物理量——表观粘度 μ_{app} , 即“团流”的平均轴向压差同没有红细胞存在时(因而 $Q = 0$)相应的 Poiseuille 流的压差之比为:

$$\mu_{app} = \frac{\langle p \rangle_{\bar{x}=0} - \langle p \rangle_{\bar{x}=1}}{8L}. \quad (23)$$

它是毛细血管中血浆所受阻力大小的衡量.

四、结果和讨论

决定“团流”特性的基本参数是红细胞间距同管径之比 L 、红细胞直径同管径之比 λ 和回漏流量参数 Q .

L 的大小取决于毛细血管直径 D^* 和红细胞压积 H (即毛细血管中红细胞所占体积的百分数). 当红细胞均匀分布时,可得

$$H = \frac{V}{V + \frac{\pi}{4} D_r^* L} \quad (24)$$

这里红细胞体积取为 94.1 微米³。表 1 列出了按(24)式算出的平均 L 值,本文考虑了 $L = 0.5 - 5.0$ 最有意义的取值范围。关于 L 对“团流”的影响已讨论得很多了^[2,4], 本文着重考虑另两个参数 λ 和 Q 的作用。

表 1 红细胞压积为 H 时,直径为 D_r^* 的毛细血管中平均红细胞间距与管直径之比 L

D_r^* (微米)	H	0.40	0.20
8.0		0.35	0.94
7.0		0.52	1.40
6.0		0.83	2.21
5.0		1.44	3.83
4.0		2.80	7.47

本文所取的 λ 和 Q 值,列于表 2。前五行中 λ, Q 的取值是一一对应的,它们由零阻力条件(即压力和切应力的合力为零)相联系。由于圆盘状红细胞的速度 U^* 和平均流速 V^* 之比为 $\frac{2}{1 + \lambda^2}$, 而回漏流量应满足 $2\pi r_0^* Q^* = \pi r_0^{*2} (U^* - V^*)$ 。由 Q 的定义得:

$$Q = \frac{1}{4} (1 - \lambda^2). \quad (25)$$

表 2 算例中参数 λ 和 Q 所取的值

λ	Q
1.0	0
0.9	0.0475
0.8	0.09
0.75	0.109375
0.5	0.1875
	0.036815

注意,上式只适用等厚度圆盘模型。真实的红细胞要

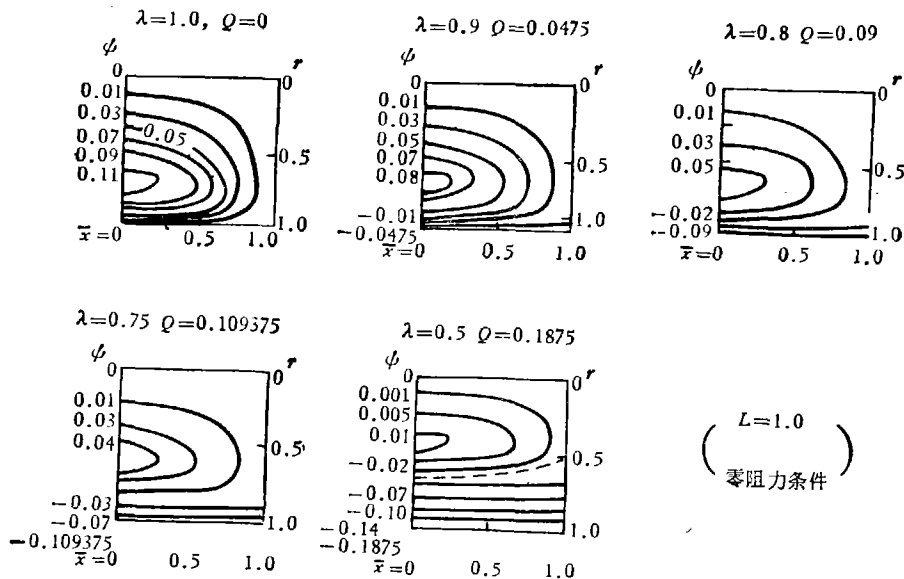


图 2 $L = 1.0$ 时各种零阻力条件下的“团流”流线

发生弹性变形, Q, λ 之间就没有这种简单的对应关系, 所以我们也对 λ, Q 的不同搭配进行了计算. 一般说来, 当毛细血管较细、流速较慢时, λ 较大, Q 较小. 至于在某种生理、病理条件下, 毛细血管究竟对应于什么 λ 和 Q 值, 已经超出了本文的范围.

图 2 图示了 $L = 1$ 时典型的“团流”流谱. 由于对称性, 沿 \bar{x}, r 方向都只画了一半. 由图 2 可见, 从润滑层流出的流线几乎平行于管壁, 形成高切应力区; 而在流场内部, 则形成闭路环流. 随着 λ 增大, Q 减小, 环流逐渐减弱 (即图中 ψ 的最大值减小), 环流区也越小, 越靠近于对称轴. L 不同时, 流谱的变化与文献 [4] 基本一致 (本文未画出). 图 3 则与文献 [2] 的速度剖面作了对比, 除了在润滑层出入口处因边界条件不同, 理应略有差别外, 两者是相当接近的.

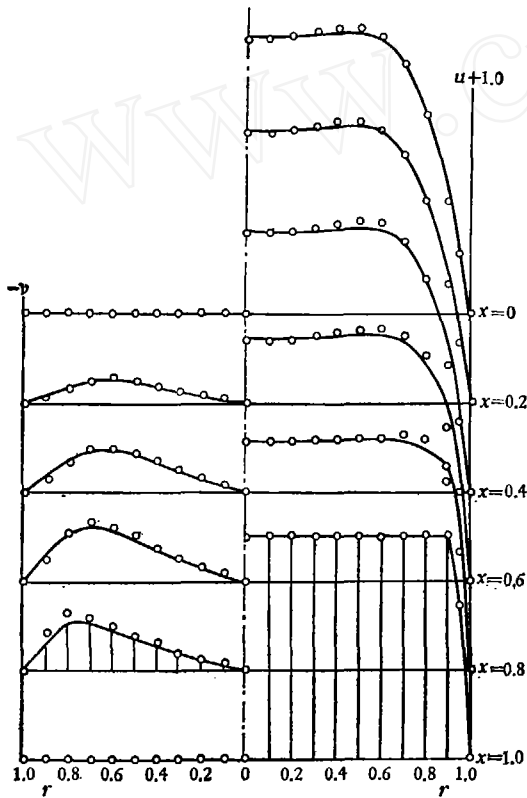


图 3 $L = 0.5, \lambda = 0.9, Q = 0.036815$ 时, 的速度剖面与文献 [2] 比较

(实线为本文结果, \circ 为取自文献 [2]. 纵坐标 x 值均为平均值)

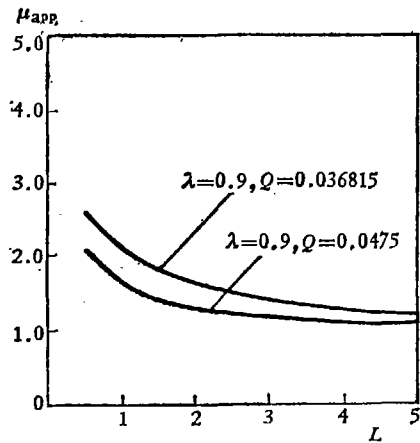


图 4 相对表观粘度 μ_{app} 随问题 L 的变化

其次来分析“团流”的压力流量关系. 表观粘度 μ_{app} 随 L 增大而减小, 并趋近于 1 (图 4, 在一般生理范围内, μ_{app} 不超过 2—3); 它又随 λ 减小而减小, 阻力甚至可能低于 Poiseuille 值 (图 5). 不过, 这是由于 λ 较小时, 润滑理论精度变差的缘故, 所以, 本文主要分析 λ 较大时的结果. 回漏流量参数 Q 对于 μ_{app} 影响很大, 随着 Q 增大, μ_{app} 迅速减小. 图 6 和图 7 画出了管壁的切应力 τ_B , 它在 $\bar{x} = 0$ 处, 接近于 Poiseuille 值; 但在润滑层出入口处 ($\bar{x} \rightarrow 1$), $|\tau_B|$ 急剧增大, 增大程度依赖于润滑层中的速度剖面. 当 λ 减小或 Q 增大时, $|\tau_B|$ 都会显著减小, 从而解释了图 4、图 5 中 μ_{app} 的变化趋势.

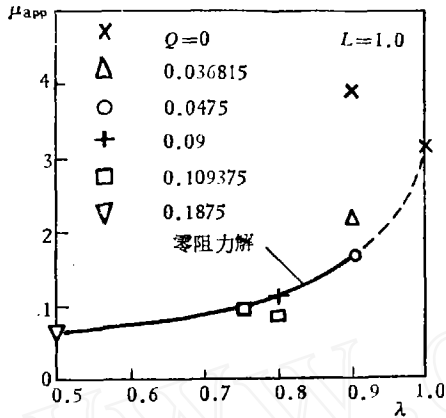


图 5 相对表观粘度 μ_{app} 随红细胞直径与管直径之比 λ 的变化

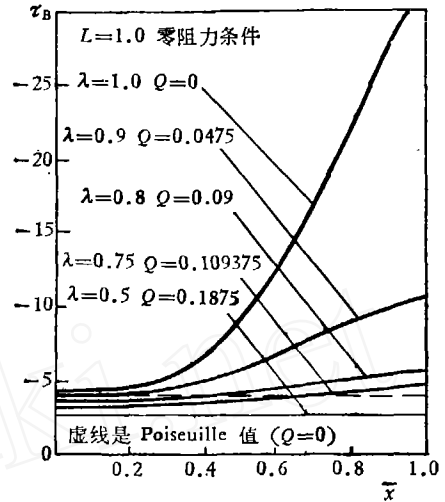


图 6 $L = 1.0$ 时, 零阻力条件下管壁的切应力分布

至于红细胞表面的切应力 τ_s 和压力分布 p_s , 这些数据对于溶血问题和计算红细胞变形都是很重要的. 图 8-11 图示了 $\bar{x} = 1$ 上的数值, 在 $x = -1$ 上 τ_s 和 Δp_s 应与它大小相等、符号相反. 由图 8-11 可见, 在润滑层出入口处的切应力和压力梯度都较小, 而在红细胞两侧表面上中心 $r = 0$ 处的压力高于周围的压力, 可能这就是使变形后, 红细胞底部凹陷而形成如降落伞状的原因. 我们知道, 在较细的毛细血管中, 润滑层较薄, λ 较大. 按图 8 和图 9 所示, 这时压力梯度和切应力都要增大, 所以红细胞中心部分压力要比外缘高得更多, 因而在较细的毛细血管中, 红细胞变形后, 底部要凹陷得更深一些. 这个结论是同模型实验完全一致的.

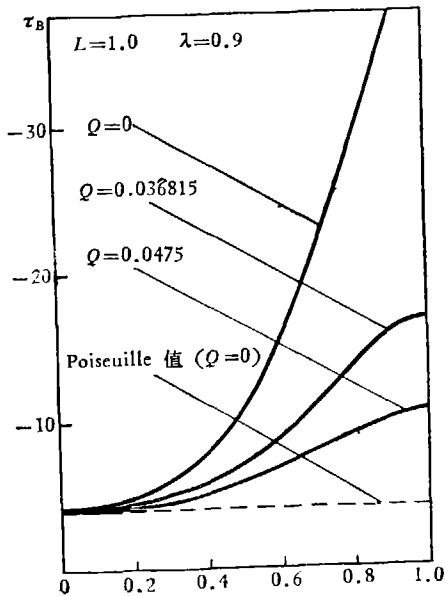


图 7 $L = 1.0, \lambda = 0.9$ 时的管壁切应力分布

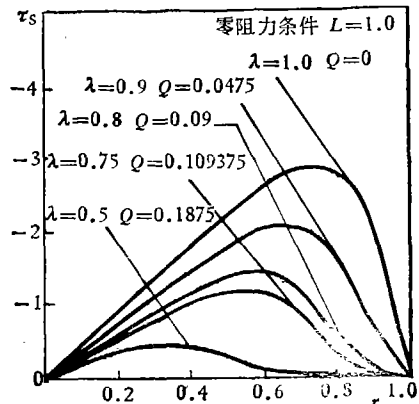


图 8 $L = 1.0$ 时, 零阻力条件下 $\bar{z} = 1$ 面上的切应力分布

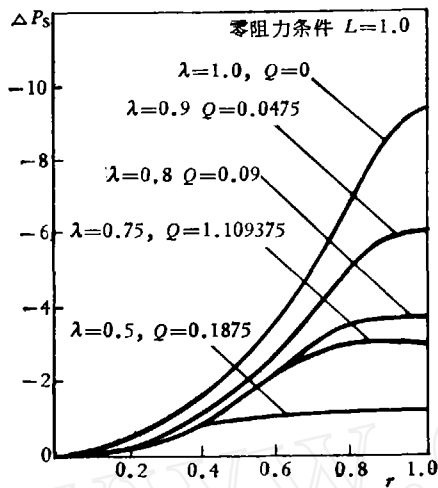


图9 $L = 1.0$ 时,零阻力条件下
 $\bar{x} = 1$ 面上的切应力分布

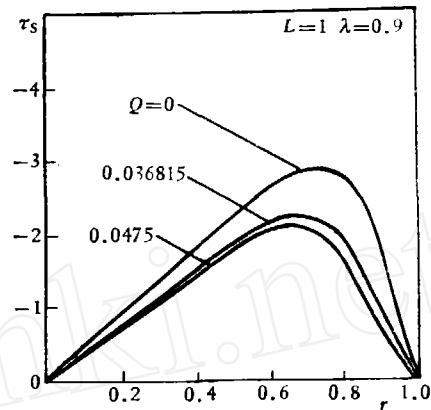


图10 $L = 1.0, \lambda = 0.9$ 时, $\bar{x} = 1$
面上的切应力分布

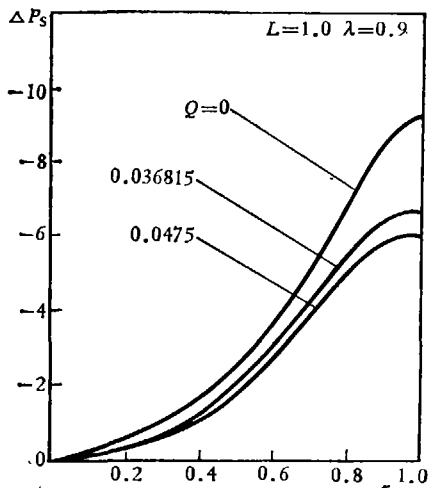


图11 $L = 1.0, \lambda = 0.9$ 时, $\bar{x} = 1$
面上的压力分布

图10表明,回漏流量 Q 对于切应力和压力分布的影响不大。

最后,简单讨论一下“团流”对传质的影响。文献[4]曾比较了氧气扩散和对流各需的时间,认为环流对气体传输作用不大,但对于扩散较慢的如蛋白一类高分子可能是有意义的。本文估算的环流时间与文献[4]基本一致。当润滑层增厚, λ 变小时,环流变慢,离壁面距离增大,对于传质的作用也会变小。但这时由薄润滑层中流出饱含氧气的血浆增多(Q 增大),在管壁附近高切应力区继续向周围组织供氧,这对于促进气体交换能起到有利作用。

五、结 束 语

本文纠正了现有文献中数学模型的不合理提法,在润滑层出入口处采用正确的边界条件,用 Galerkin 方法和数值平滑技巧,得到“团流”近似解。

文中着重讨论了红细胞直径同管径之比 λ 和回漏流量参数 Q 对于“团流”的影响,发现:随着润滑层变厚(λ 减小)和回漏流量 Q 增大,环流减弱,轴向压差降低,环流时间增长。当润滑层厚度不变时,增大回漏流量对于毛细血管壁的切应力和平均轴向压降有显著影响,并对管壁附近气体交换发挥有利作用;但对于红细胞表面的切应力和压力分布影响不很大。本文的结果同其它理论计算合理地一致。

本文计算结果表明,在固体力学中得到广泛应用的 Galerkin 方法同样可应用于流体力学问题。它的突出优点是计算工作量小。本文 25 组算例在 1 万次/秒的小型计算机上仅占用主机 6 分钟;而偏微分方程数值解或双重级数展开法,计算量要增加一些。

本文把红细胞形状取为等厚度圆盘是一种粗糙的近似。但由于在低雷诺数下,流场对局部形状不太敏感,真实红细胞后缘凹陷也不太深,所以还是有理由把这一模型作为初步近似的^[2,4]。

要彻底解决上述问题,必须正确算出红细胞在毛细血管中的变形。因此, Fung^[7] 把它称为“未来理论研究的真正重要任务”。文献[1]为解决这一任务迈出了重要的一步。可是由于模型的缺陷,结果在定量方面还不够满意,其原因之一就是因为没有考虑红细胞两侧的“团流”。可以设想,采用本文算出的“团流”中红细胞表面的压力和切应力,再用润滑理论给出润滑层中的参数,就近似地提供了计算红细胞变形的全部边界条件。然后对红细胞建立正确的弹性模型,并考虑细胞膜上力的平衡,就有可能在完整的边界条件下,通过反复迭代较精确地求得红细胞的变形。本文就是试图向这一目标前进的新的一步。

谈镐生教授对本文的指导和帮助,以及陶祖莱同志对初稿提出了意见,作者在此一并致谢。

参 考 文 献

- [1] Lighthill, M. J., *J. Fluid. Mech.*, 34(1968), 113—143.
- [2] Lew, H. S. & Fung, Y. C. (冯元桢), *Biorheology*, 6(1969), 109—119.
- [3] ———, *Biophys. J.*, 10(1970), 80—99.
- [4] Bugliarollo, G. & Hsiao, G. C., *Biorheology*, 7(1970), 5—36.
- [5] Fitz-Gerald, J. M., *J. Fluid Mech.*, 51(1972), 463—476.
- [6] 严宗毅, 红细胞在毛细血管中的流动和变形力, *学与实践*, 3(1981), 2.
- [7] Fung, Y. C. (冯元桢), *Microcirculation* (ed. Kaley, G. & Altura, B. M.), Vol. 1, 1977, 292—294.
- [8] 冯康, 数值计算方法, 国防工业出版社, 1978.