

# 铁磁体的多体关联和相变

中国科学院力学研究所 朱学渊  
复 旦 大 学 孙 鑫

格林函数方法在铁磁理论中获得了广泛的应用,十几年来该方法作了许多改进,发展情况可见 Tahir-Kleli 的总结性文章<sup>[1]</sup>. 格林函数的优点是计算方便并通用于各种温度范围,但它的切断近似的根据不够清楚,难于得到系统地提高近似程度的途径. 我们希望建立一套图形展式,以便能系统地逐次近似地算出铁磁体的热力势和相变温度. 作者之一曾对反铁磁体建立了一套格点空间的图形方法<sup>[2]</sup>,由于反铁磁体计算比较复杂,只算到了二体关联. 为了看出多体关联的作用,有必要提供计算多体关联的体系和方法,铁磁体比较简单,对讨论多体关联是一个适合的体系. 本文利用[2]中的方法建立了计算铁磁体的多体关联的方法,并具体地计算了二体和三体关联下的相变温度——居里点.

## §1. 图形方法

在没有外磁场的情况下,铁磁体的海森堡模型哈密顿为①

$$\hat{H} = -J \sum_{\langle l, l' \rangle} \mathbf{S}_l \cdot \mathbf{S}_{l'}, \quad (1)$$

其中  $l$  和  $l'$  为近邻格点,双重求和时如一个指标由  $1 \rightarrow N$ , 则另一个指标由  $1 \rightarrow Z$ , 在这样的假定下体系的格点总数为  $2N$ .

引入序参量  $b$  和自旋偏离算符

$$\sigma_l^z = S_l^z - b, \quad \sigma_{l'}^z = S_{l'}^z - b,$$

便可将(1)式分解成两部分②

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}',$$

其中

$$\hat{H}_0 = -ZJb \left[ \sum_l S_l^z + \sum_{l'} S_{l'}^z \right] + NZJb^2, \quad (2.1)$$

本文 1978 年 11 月 1 日收到.

① 为了使磁化沿  $z$  轴,可先使  $J_x > J_y = J_z$ , 最后再使  $J_x \rightarrow J_y = J_z$ .

② 对于各向同性铁磁体,  $\hat{H}_0$  与  $\hat{H}'$  对易,由于上面已设  $z$  方向有单轴各向异性,故不能要求  $\hat{H}_0$  与  $\hat{H}'$  对易,下面仍需引用相互作用表象.

$$\hat{H}' = \sum_{\langle l'l' \rangle} \hat{H}'_{ll'}, \quad (2.2)$$

$$\hat{H}'_{ll'} = -J(S_l^z S_{l'}^z + S_l^y S_{l'}^y + \sigma_l^x \sigma_{l'}^x), \quad (2.3)$$

在单重求和时指标  $l$  和  $l'$  均由  $1 \rightarrow N$ .

由于不同格点的自旋算符互相对易, 而且本征值均为  $\pm \frac{1}{2}$ , 因此采用直积表示是恰当的, 即

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_1 &= \mathbf{s} \otimes I \otimes \cdots \otimes I, \\ \mathbf{S}_2 &= I \otimes \mathbf{s} \otimes \cdots \otimes I, \\ &\dots \end{aligned} \quad (3)$$

其中

$$s_x = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad s_y = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad s_z = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

很容易证明, 在相互作用表象中

$$[\hat{H}'_{ll'}(\tau), \hat{H}'_{mm'}(\tau')]_- = 0 \quad (l, l', m, m' \text{ 互不相等}). \quad (4)$$

据此工作 [2] 提出用一条连接近邻格点的短线  $! \text{---} !$  来表示  $\hat{H}'_{ll'}$ , 这线我们可以称之为“自旋键”, 它与 Feynman 图中的收缩线不一样, 前者是  $q$  数, 后者是  $c$  数. 根据对易关系 (4), 不连接的自旋键是可以对易的.

注意到自旋体系的力学量总可以是一个或几个格点的自旋算符的组合, 例如

$$\hat{H}' = \sum_{\langle ll' \rangle} -Jb(S_l^z S_{l'}^z + S_l^y S_{l'}^y + \sigma_l^x \sigma_{l'}^x),$$

我们不妨将一般力学量  $\hat{f}$  写作

$$\hat{f} = \sum_{i, j, \dots, k} \hat{f}_{ij \dots k},$$

并将这些格点  $i, j, \dots, k$  称为“源格点”.

根据量子统计的场论方法的结论, 算符  $\hat{f}$  的系综平均值为

$$\langle \hat{f} \rangle = \langle u(\beta, 0) \hat{f} \rangle_0 / u(\beta, 0)_0, \quad (5)$$

其中温度  $S$  矩阵

$$u(\beta, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^\beta d\tau_1 \cdots \int_0^\beta d\tau_n T[\hat{H}'(\tau_1) \cdots \hat{H}'(\tau_n)]. \quad (6)$$

对于 (5) 式的分子部分可作如下的展开

$$\begin{aligned} \langle u(\beta, 0) \hat{f} \rangle_0 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \sum_{i, j, \dots, k} \sum_{\langle i_1 i_1' \rangle} \cdots \sum_{\langle i_n i_n' \rangle} \int_0^\beta d\tau_1 \int_0^\beta d\tau_n \times \\ &\quad \langle T[\hat{H}'_{i_1 i_1'}(\tau_1) \cdots \hat{H}'_{i_n i_n'}(\tau_n)] \hat{f}_{ij \dots k} \rangle_0. \end{aligned}$$

根据前述的对易关系,总可以把既不与源格点直接连接,又不与源格点间接连接的键从括弧中移出去,剩下的部分构成连接图.例如图 1 就是一个连接图.

又由于每一根  $\hat{H}'_{ij}$  键均可从  $n$  个  $\hat{H}'$  中挑选,所以  $\langle T[\hat{H}'(\tau_1)\dots\hat{H}'(\tau_n)] \rangle_0$  中形成同一个  $m$  级连接图将有  $\frac{n!}{m!(n-m)!}$  种可能,若令  $n-m=q$ ,则有

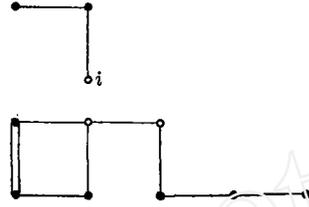


图 1

$$\begin{aligned} \langle u(\beta, 0) \hat{f} \rangle_0 &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \sum_{i_1 \dots i_m} \sum_{(i_1 i_1)} \dots \sum_{(i_m i_m)} \int_0^\beta d\tau_1 \dots \int_0^\beta d\tau_m \times \\ &\quad \langle T[\hat{H}'_{i_1 i_1}(\tau_1) \dots \hat{H}'_{i_m i_m}(\tau_m)] \hat{f}_{i_1 \dots i_m} \rangle_0 \times \\ &\quad \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(-1)^q}{q!} \sum_{(\lambda_1 \lambda_1)} \dots \sum_{(\lambda_q \lambda_q)} \int_0^\beta d\tau'_1 \dots \int_0^\beta d\tau'_q \times \\ &\quad \langle T[\hat{H}'_{\lambda_1 \lambda_1}(\tau'_1) \dots \hat{H}'_{\lambda_q \lambda_q}(\tau'_q)] \rangle_0 \\ &= \langle u(\beta, 0) \hat{f} \rangle_0 \langle u(\beta, 0) \rangle_0. \end{aligned}$$

上式代入(5)式则得

$$\langle \hat{f} \rangle = \langle u(\beta, 0) \hat{f} \rangle_0 \quad (7)$$

正则系综的热力势就是 Helmholtz 自由能

$$\Omega = -\frac{1}{\beta} \ln \text{Spe}^{-\beta \hat{H}}, \quad (8)$$

如果我们定义无相互作用体系的热力势为

$$\Omega_0 = -\frac{1}{\beta} \ln \text{Spe}^{-\beta \hat{H}_0},$$

就可以用参数法确定真实体系热力势的剩余部分  $\Omega - \Omega_0$  的微扰展式(推导见[2]之附录)

$$\begin{aligned} \Omega - \Omega_0 &= -\frac{1}{\beta} \langle u(\beta, 0) \rangle_0 + \frac{1}{\beta} \ln \text{Spe}^{-\beta \hat{H}} \\ &= -\frac{1}{\beta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^\beta d\tau_1 \dots \int_0^\beta d\tau_n \langle T[\hat{H}'(\tau_1) \dots \hat{H}'(\tau_n)] \rangle_0. \end{aligned} \quad (9)$$

### §2. 多 体 关 联

(7) 式是按相邻自旋相互作用  $\hat{H}'_{ij}$  展开的,其每一级的各种图形又直观地反映自旋关联的远近分布,展式(9)是按相互作用  $\hat{H}'$  展开的,在物理上并不好,例如图 2 中的两个图形尽管都是 5 级的,但左图是二体关联,右图是六体关联.因而只按相互作用的级次来展开,不能恰当地反映出格点间的关联结构.对确定的几个格点,它们之间的关联应该是这几个格点间所有各级图形的贡献之和.为此先要对两个相邻格点间的各级图形进行部分求和.



图 2

我们将用骨架线  $\overset{l}{\bullet} \text{---} \overset{v}{\bullet}$  来表示两格点(体)之间的各级图形的求和。即

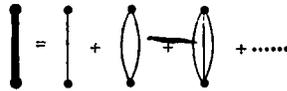


图3

它来源于  $\sum_{n=1}^{\infty} \hat{H}'(\tau_1) \dots \hat{H}'(\tau_n)$  中的非交叉乘积项

$$\sum_{n=1}^{\infty} \hat{H}'_{lv}(\tau_1) \dots \hat{H}'_{lv}(\tau_n).$$

对于格点数为  $2N$  的体系来说,这样的项将有  $NZ$  个,它们的贡献将记为  $\Omega'_N$

$$\begin{aligned} \Omega'_N &= -\frac{NZ}{\beta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^\beta d\tau_1 \dots \int_0^\beta d\tau_n \langle T[\hat{H}'_{lv}(\tau_1) \dots \hat{H}'_{lv}(\tau_n)] \rangle_0 \\ &= -\frac{NZ}{\beta} [\langle e^{\beta \hat{H}_0} e^{-\beta(\hat{H}_0 + \hat{H}'_{lv})} \rangle_0 - 1] \\ &= -\frac{NZ}{\beta} \frac{\text{Spe}^{-\beta(\hat{H}_0 + \hat{H}'_{lv})}}{\text{Spe}^{-\beta \hat{H}_0}} + \frac{NZ}{\beta}. \end{aligned} \tag{10}$$

对于多个格点(体)来说,一切连接的各级键图求和,也可以用骨架图表示。例如三体关联应为

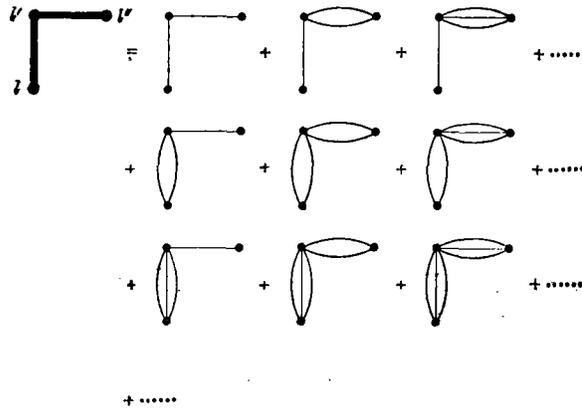


图4

它来源于  $\sum_{n=1}^{\infty} \hat{H}'(\tau_1) \dots \hat{H}'(\tau_n)$  中涉及相邻的三格点  $l, v$  和  $v'$  的部分

$$\sum_{n=1}^{\infty} [\hat{H}'_{lv}(\tau_1) + \hat{H}'_{lv'}(\tau_1)] \dots [\hat{H}'_{lv}(\tau_n) + \hat{H}'_{lv'}(\tau_n)]$$

中的交叉乘积项。其中的非交叉乘积项将形成两个多余的二体关联图,这种多余的贡献应予减去。在格点数为  $2N$  的体系中,这种三体关联将有  $NZ(Z-1)$  种可能,它们的贡献将记为  $\Omega''_N$ ,显然

$$\Omega'_{\text{III}} = -\frac{NZ(Z-1)}{\beta} \left[ \frac{\text{Spe}^{-\beta(\hat{H}_0 + \hat{H}'_{\text{II}} + \hat{H}'_{\text{III}})}}{\text{Spe}^{-\beta\hat{H}_0}} - \frac{2\text{Spe}^{-\beta(\hat{H}_0 + \hat{H}'_{\text{III}})}}{\text{Spe}^{-\beta\hat{H}_0}} + 1 \right]. \quad (11)$$

在附录中我们将具体算出  $\Omega'_{\text{II}}$  和  $\Omega'_{\text{III}}$ . 利用同样的方法可以计算三体以上的关联.

### §3. 计算结果

Ландау 的二级相变理论认为, 在相变点附近, 即  $b$  较小的时候, 体系的热力学可以展成  $b$  的偶次幂级数<sup>[2]</sup>

$$\Omega(T, b) = \phi_0(T) + A(T)b^2 + C(T)b^4 + O(b^6),$$

且体系由有序相转变到无序相的临界温度  $T_c$  可由方程  $A(T_c) = 0$  来确定.

我们计算的结果是

$$\Omega_0 = -\frac{1}{\beta} \ln \text{Spe}^{-\beta\hat{H}_0} = NZJb^2 - \frac{2N \ln 2}{\beta} - \frac{2N}{\beta} \ln \text{Ch} \left( \frac{Z}{2} \beta Jb \right). \quad (12)$$

由该式立刻可以求得零级分子场近似的临界温度  $\Theta_0 = \frac{ZJ}{4k}$ .

二体关联修正的结果为(见附录 1)

$$\Omega'_{\text{II}} = -\frac{NZ}{2\beta} \frac{e^{\beta Jb^2}}{\left( \text{Ch} \frac{Z}{2} \beta Jb \right)^2} \left[ e^{\frac{\beta J}{4}} \text{Ch}(Z-1) \beta Jb + e^{-\frac{\beta J}{4}} \text{Ch} \frac{\beta J}{2} \right] + \frac{NZ}{\beta}. \quad (13)$$

将  $\Omega_2 = \Omega_0 + \Omega'_{\text{II}}$  展成 Ландау 级数得

$$A_2(T) = NZJ \left\{ 1 - \frac{Z\beta J}{4} - \frac{1}{4} e^{\frac{\beta J}{4}} \left[ (Z-1)^2 \beta J + 3 \left( 1 - \frac{Z^2 \beta J}{4} \right) \right] + \frac{1}{4} e^{-\frac{3}{4} \beta J} \left( 1 - \frac{Z^2 \beta J}{4} \right) \right\},$$

如令  $\frac{\Theta_c}{T_c} = \frac{Z\beta_0 J}{4} = x$ , 则得  $A_2(T_c) = 0$  方程为

$$1 - x - \frac{1}{4} e^{\frac{x}{2}} \left[ 4 \frac{(Z-1)^2}{Z} x + 3(1 - Zx) \right] - \frac{1}{4} e^{-\frac{3}{2}x} [1 - Zx] = 0,$$

其解为

$$\begin{aligned} Z = 6 \text{ (s.c.)}, & \quad x = 1.78; \\ Z = 8 \text{ (b.c.c.)}, & \quad x = 1.42; \\ Z = 12 \text{ (f.c.c.)}, & \quad x = 1.21. \end{aligned}$$

三体关联修正的结果为(见附录 2)

$$\begin{aligned} \Omega_3 &= \Omega_0 + \Omega'_{\text{II}} + \Omega'_{\text{III}} \\ &= NZJb^2 - \frac{2N \ln 2}{\beta} - \frac{2N}{\beta} \ln \left( \text{Ch} \frac{\beta Z Jb}{2} \right) \\ &+ \frac{NZ(2Z-3)}{2\beta} \frac{e^{\beta Jb^2}}{\left( \text{Ch} \frac{Z}{2} \beta Jb \right)^2} \left[ e^{\frac{\beta J}{4}} \text{Ch}(Z-1) \beta Jb + e^{-\frac{\beta J}{4}} \text{Ch} \frac{\beta J}{2} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{NZ(Z-1)}{4\beta} \frac{e^{2\beta Jb}}{\left(\text{Ch}\frac{Z\beta Jb}{2}\right)^2} \left\{ e^{\frac{\beta J}{2}} \text{Ch}\left(\frac{3Z}{2}-2\right)\beta Jb + \text{Ch}\left(\frac{Z}{2}-1\right)\beta Jb \right. \\
 & \left. + e^{-\frac{\beta J}{4}} \left[ e^{\frac{Z-1}{2}\beta Jb} \text{Ch}\frac{\beta J}{2} \sqrt{b^2-b+\frac{9}{4}} + e^{-\frac{Z-1}{2}\beta Jb} \text{Ch}\frac{\beta J}{2} \sqrt{b^2+b+\frac{9}{4}} \right] \right\} \\
 & -\frac{NZ(Z-2)}{\beta}.
 \end{aligned}$$

将上式展开得

$$\begin{aligned}
 A_s(T) = & -NZJ \left\{ \frac{Z-3}{2} - \left( \frac{Z^2}{16} + \frac{Z^2}{16} - \frac{Z}{2} + \frac{1}{3} \right) \beta J - \frac{2Z-3}{2} \left[ \frac{3}{2} + \left( \frac{Z^2}{8} \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. - Z + \frac{1}{2} \right) \beta J \right] \times e^{\frac{\beta J}{4}} - \frac{2Z-3}{2} \left( \frac{1}{2} - \frac{Z^2}{8} \beta J \right) e^{-\frac{3\beta J}{4}} + \frac{Z-1}{4} \left[ \frac{112}{27} \right. \\
 & \left. + \left( \frac{Z^2}{2} - \frac{10}{3}Z + \frac{20}{9} \right) \beta J \right] \times e^{\frac{\beta J}{2}} + \frac{Z-1}{4} \left[ \frac{50}{27} - \left( \frac{Z^2}{4} + \frac{Z}{6} - \frac{1}{18} \right) \beta J \right] e^{-\beta J} \right\},
 \end{aligned}$$

仍令  $x = \frac{Z\beta_e J}{4}$ , 则得三体关联修正的临界温度的超越方程为

$$\begin{aligned}
 & \frac{Z-3}{2} - \left( \frac{Z^2}{4} + \frac{Z}{4} - 2 + \frac{1}{2Z} \right) x - \frac{2Z-3}{2} \left[ \frac{3}{2} + \left( \frac{Z}{2} - 4 + \frac{2}{Z} \right) x \right] e^{\frac{x}{2}} \\
 & - \frac{2Z-3}{2} \left( \frac{1}{2} - \frac{Z}{2} x \right) e^{-\frac{3x}{2}} + \frac{Z-1}{4} \left[ \frac{112}{27} + \left( 2Z - \frac{40}{3} + \frac{80}{9Z} \right) x \right] e^{\frac{2x}{2}} \\
 & + \frac{Z-1}{4} \left[ \frac{50}{27} - \left( Z + \frac{2}{3} - \frac{2}{9Z} \right) x \right] e^{-\frac{4}{2}x} = 0.
 \end{aligned}$$

该方程的解为

$$Z = 6 \text{ (s.c.)}, x = 2.7160;$$

$$Z = 8 \text{ (b.c.c.)}, x = 1.6434;$$

$$Z = 12 \text{ (f.c.c.)}, x = 1.2817.$$

此结果较二体关联的结果更接近高温展式的结果.

下面我们列出几种方法所得到的结果, 并与本文的结果进行比较(见表1).

### 附录 1. 二体关联的计算

根据正文(10)式

$$\Omega'_{ii} = -\frac{NZ}{\beta} \frac{\text{Spe}^{-\beta(\hat{H}_i + \hat{H}'_{ii})}}{\text{Spe}^{-\beta\hat{H}_i}} + \frac{NZ}{\beta},$$

须指出该式的计算可简约到二体表象中进行, 即

$$\frac{\text{Spe}^{-\beta(\hat{H}_i + \hat{H}'_{ii})}}{\text{Spe}^{-\beta\hat{H}_i}} = \frac{\text{Spe}^{-\beta(\hat{H}_{ii} + \hat{H}'_{ii})}}{\text{Spe}^{-\beta\hat{H}_{ii}}},$$

其中

表 1

$T_c/\theta_c$		$Z=6$ (s.c.)	$Z=8$ (b.c.c.)	$Z=12$ (f.c.c.)
分子场近似		1	1	1
高温 展式	Brown & Luttinger <sup>[4]</sup>		0.610	0.707
	Rushbrooke & Wood <sup>[5]</sup>	0.567	0.650	0.682
	Baker etc. <sup>[6]</sup>	0.558	0.631	0.669
常 数 耦 合 Kasteleijn etc. <sup>[7]</sup>			0.721	0.822
格 林 函 数	Bogolyubov etc. <sup>[8]</sup>	0.660	0.718	0.744
	Tahir-Kheli <sup>[9]</sup>	0.583	0.650	0.680
	Callen <sup>[10]</sup>	0.900	0.925	0.930
本 文	二 体 修 正	0.562	0.704	0.826
	二 体 修 正	0.368	0.608	0.780

$$\begin{aligned}\hat{H}'_{ii} &= -ZJb[S_i^x + S_i^y] = -ZJb[s_x \otimes I + I \otimes s_x] \\ &= -ZJb \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},\end{aligned}$$

它的本证值为

$$\lambda_{\pm} = \pm ZJb, \quad \lambda_3 = 0,$$

故

$$\text{Spe}^{-\beta \hat{H}'_{ii}} = \left( 2 \text{Ch} \frac{Z}{2} \beta Jb \right)^2.$$

又

$$\begin{aligned}\hat{H}'_{ii} &= -J(S_i^x S_i^y + S_i^y S_i^x + \sigma_i^x \sigma_i^y) \\ &= -J(s_x \otimes s_x + s_y \otimes s_y + \sigma_x \otimes \sigma_y) \\ &= \frac{J}{4} \begin{bmatrix} -(1-2b)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-4b^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-4b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(1+2b)^2 \end{bmatrix},\end{aligned}$$

因此

$$\hat{H}_{ii'}^0 + \hat{H}'_{ii'} = \begin{bmatrix} -ZJb - \frac{J}{4}(1-2b)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{J}{4}(1-4b^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{J}{4}(1-4b^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ZJb - \frac{J}{4}(1+2b)^2 \end{bmatrix},$$

它的四个本征值为

$$\lambda_{\frac{1}{2}} = -Jb^2 - \frac{J}{4} \pm (Z-1)Jb, \quad \lambda_3 = -Jb^2 - \frac{J}{4}, \quad \lambda_4 = -Jb^2 + \frac{3J}{4},$$

所以

$$\text{Sp}_{\mathbb{R}^4}^{-\beta(\hat{H}_{ii'} + \hat{H}'_{ii'})} = 2e^{\beta Jb} \left[ e^{\frac{\beta J}{4}} \text{Ch}(Z-1)\beta Jb + e^{-\frac{\beta J}{4}} \text{Ch} \frac{\beta J}{2} \right].$$

根据这个结果立刻可得正文(13)式.

## 附录 2. 三体关联的计算

与附录 1 相同的理由,  $\Omega'_{iii}$  的表式(11)可写作

$$\Omega'_{iii} = -\frac{NZ(Z-1)}{\beta} \left[ \frac{\text{Spe}^{-\beta(\hat{H}_{iii} + \hat{H}'_{iii} + \hat{H}''_{iii})}}{\text{Spe}^{-\beta\hat{H}_{iii}}} - \frac{2\text{Spe}^{-\beta(\hat{H}_{ii'} + \hat{H}'_{ii'})}}{\text{Spe}^{-\beta\hat{H}_{ii'}}} + 1 \right],$$

显然

$$\text{Spe}^{-\beta\hat{H}_{iii}} = \left( 2 \text{Ch} \frac{Z}{2} \beta Jb \right)^3.$$

在三体表象中的  $\hat{H}_{iii} + \hat{H}'_{ii'} + \hat{H}''_{ii'}$  将是一个  $8 \times 8$  矩阵, 可以很容易地求得. 在此我们仅列出它的 8 个本征根:

$$\lambda_{\frac{1}{2}} = -2Jb^2 - \frac{J}{2} \pm \left( \frac{3Z}{2} - 2 \right) Jb,$$

$$\lambda_{\frac{3}{2}} = -2Jb^2 \pm \left( \frac{Z}{2} - 1 \right) Jb,$$

$$\lambda_{\frac{5}{2}} = -2Jb^2 + \frac{J}{4} - \frac{J}{2} \left[ (Z-1)b \pm \sqrt{b^2 - b + \frac{9}{4}} \right],$$

$$\lambda_{\frac{7}{2}} = -2Jb^2 + \frac{J}{4} + \frac{J}{2} \left[ (Z-1)b \pm \sqrt{b^2 + b + \frac{9}{4}} \right],$$

因此

$$\begin{aligned} \text{Spe}^{-\beta(\hat{H}_{iii} + \hat{H}'_{ii'} + \hat{H}''_{ii'})} &= 2e^{2\beta Jb} \left\{ e^{\frac{\beta J}{2}} \text{Ch} \left( \frac{3Z}{2} - 2 \right) \beta Jb \right. \\ &\quad \left. + \text{Ch} \left( \frac{Z}{2} - 1 \right) \beta Jb + e^{-\frac{\beta J}{4}} \left[ e^{\frac{Z-1}{2}\beta Jb} \text{Ch} \frac{\beta J}{2} \sqrt{b^2 - b + \frac{9}{4}} \right. \right. \end{aligned}$$

$$+ e^{-\frac{z-1}{2} \beta J b} \operatorname{Ch} \frac{\beta J}{2} \sqrt{b^2 + b + \frac{9}{4}} \Bigg\}.$$

将这些结果代入  $\Omega_s = \Omega_0 + \Omega'_{II} + \Omega'_{III}$  即得正文(14)式.

## 参 考 文 献

- [1] Phase Transition and Critical Phenomena, ed. by C. Domb and M. Green, **5B** (1974).
- [2] 孙鑫, 复旦学报(自然科学版), 1977年第2期第37页.
- [3] Л.Л. 朗道、E. M. 栗弗席兹著, 杨训恺等译, 统计物理学, 人民教育出版社(1964).
- [4] Brown, H. A. and Luttinger, J. M., *Phys. Rev.*, **100** (1956), 685.
- [5] Rushbrooke, G. S. and Wood, P. J., *Mol. Phys.*, **1** (1958), 257.
- [6] Baker, G. A., Gilbert, H. E., Eve, J. and Rushbrooke, G. S., *Phys. Rev.*, **164** (1967), 800.
- [7] Kasteleijn, P. W. and Kranendonk, J. van, *Physica*, **22** (1956), 317.
- [8] Bogolyubov, N. N. and Tyablikov, S. V., *Sov. Phys. Doklady*, **4** (1959), 607.
- [9] Tahir-Kheli, R. A., *Phys. Rev.*, **132** (1963), 689.
- [10] Callen, H. B., *Phys. Rev.*, **130** (1963), 890.

## THE MANY-BODY CORRELATIONS AND THE PHASE TRANSITION FOR FERROMAGNETS

Zhu Xue-yuan Sun Xin

### Abstract

The expansions of the many-body correlations for ferromagnets are established by the diagrammatical method of the  $S$ -metrics in lattice space. The thermodynamic potential and the temperature of the phase transition for the ferromagnets are also calculated at the approximation of two-body and three-body correlations.