

轴对称二维定常可压缩 流体湍流边界层的计算

王 应 时

(中国科学院力学研究所)

提要 本文根据应力张量表示的动量方程, 推导出了轴对称坐标系中无旋转定常轴对称流动可压缩湍流边界层的动量方程。可以看出, 如果流道内流动要全部按粘性流体来处理, 那末流道的曲率, 以及曲率沿流动方向的变化率都不能太大。这一点在已有文献中都没有论证。根据文中提出的方程组编制了一个计算程序并计算了一个例子。

符 号

A	截面积		关系系数
A, B, C	Φ 差分方程的系数	T	绝对温度
A_u, B_u, C_u	速度 u 差分方程的系数	u	对应于 x 方向的速度分量
A', B'	转换的系数	\vec{v}	速度矢
a, b	通用守恒方程中对流项的系数	v	对应于 y 方向的速度分量, 对应于 r 方向的速度分量
c	通用守恒方程中扩散项的系数	v_1, v_2, v_3	对应于 α, β, r 增大方向的速度分量
d	通用守恒方程中源项	x, y, θ	轴对称坐标系
F	单位长度上壁面作用于流体的摩擦阻力	y_l	边界层的特征厚度
$g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6$	差分方程推导过程中有关项的一些系数	α, β, r	一般正交坐标系
H_j	j 成份的生成热	k	l 边界的曲率
h	焓	π_{ij}	应力张量
h_1, h_2, h_3	Lame 系数	τ_{ij}	粘性应力张量
J	在 y 正方向的通量	δ_{ij}	Kronecker δ
l	掺混长度	μ	动力粘性系数
\dot{m}''	质量转移率	ρ	密度
m_j	化学反应成份的质量分数	σ_h	Prandtl 数
N	跨越流线的节点数	σ_j	Schmidt 数
p	压强	τ	剪切应力
R	气体常数	Φ	通用应变量
S_1, S_2, S_3, S_4	速度 u 差分方程源项的有	ψ	流函数
		ω	无因次流函数

本文于 1978 年 6 月 14 日收到。

ϑ	定义参看图 1	E	外边界
上标:		f	流体所占的
*	滞止值	h	热的
下标:		l	内边界
d	通道的	i	化学成分 i 的
D, D^+, D^-, DD^+, DD^- u, u^+, u^-, uu^+, uu^-	控制容积边界上差分节点	z	湍流的
		eff	有效的

在实际流体流动过程中, 尤其涉及传热, 传质的情况时, 粘性的影响非常重要。而大部分粘性流动过程是湍流流动, 因此要完善地解决这样的流动过程, 势必从解湍流流动的粘性方程组出发。但解这种方程组的计算工作量较大, 直到六十年代末随着计算方法和计算机的发展, 才有可能着手这方面的工作。

粘性流动问题可以分为有回流的粘性流动问题 and 无回流的边界层流动问题。这两类流动具有不同类型的基本方程, 其解法和边界条件的处理都不一样^[1-3]。本文主要讨论在二维轴对称坐标系中可压缩湍流边界层的流场计算。

一、基本方程组及其内容讨论

可压缩流体在图 1 所示的轴对称坐标系中进行无旋转轴对称流动时, 定常状态下的边界层运动方程组如下(详细推导见附录 I):

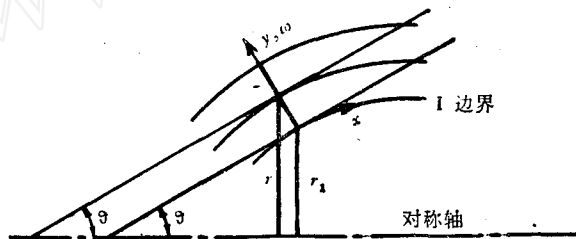


图 1 轴对称坐标系

$$\text{连续方程} \quad \frac{\partial}{\partial x}(\rho r u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho r v) = 0 \quad (1)$$

$$\text{动量方程} \quad \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial y}(\tau r) - \frac{dp}{dx} \quad (2)$$

$$\text{传质方程} \quad \rho u \frac{\partial m_i}{\partial x} + \rho v \frac{\partial m_i}{\partial y} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial y}(J_i r) + R_i \quad (3)$$

$$\text{能量方程} \quad \rho u \frac{\partial h^*}{\partial x} + \rho v \frac{\partial h^*}{\partial y} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \left(J_h + \sum_1^n H_i J_i - u\tau \right) r \right\} \quad (4)$$

如果流体满足完全气体的条件, 那末

$$\frac{p}{\rho} = RT \quad (5)$$

若忽略各成分之间 C_p 的变化并略去 v^2 , 则滞止焓可定义为

$$h^* = C_p T + \sum_1^n H_i m_i + \frac{u^2}{2} \quad (6)$$

上述这些方程适用于边界层中层流区,也适用于边界层中湍流区,当应用于湍流边界层时所有的物理量应以时均值来表示。

目前假定湍流边界层在动量、传质和传热交换率上,象层流边界层一样分别满足 Newton 定律、Fick 定律、Fourier 定律,整个边界层内交换系数可用有效值表示,即

$$\tau = \mu_{\text{eff}} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (7)$$

$$J_i = - \left(\frac{\mu_{\text{eff}}}{\sigma_{j \text{ eff}}} \right) \left(\frac{\partial m_i}{\partial y} \right) \quad (8)$$

$$J_h = - \left(\frac{\mu_{\text{eff}} C_p}{\sigma_{h \text{ eff}}} \right) \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) \quad (9)$$

在层流区内 μ_{eff} , $\sigma_{h \text{ eff}}$, $\sigma_{j \text{ eff}}$ 分别对应于流体的粘性系数, Prandtl 数和 Schmidt 数。在湍流区内有效粘性系数采用 Prandtl 的掺混长度概念,即

$$\mu_{\text{eff}(t)} = \rho l^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \quad (10)$$

而 $\sigma_{h \text{ eff}}$ 和 $\sigma_{j \text{ eff}}$ 分别为湍流有效 Prandtl 数和湍流有效 Schmidt 数。

方程(2), (3), (4)都是守恒方程的形式,等号左边是对流项,右边第一项是扩散项,第二项是源项。假定源项是已知的或者通过另外的表达式来求得,那末上述十个方程正好可以解出十个未知数 ρ , T , h^* , u , v , m_i , τ , J_i , J_h , μ_{eff} 。在解题过程中有关 l , $\sigma_{j \text{ eff}}$, $\sigma_{h \text{ eff}}$ 的值可以通过一定的表达式或者通过实验数据获得^[2]。

为了求解的方便,把上述方程用 von Mises 坐标系 (x - ϕ 坐标系)进行变换。引进流函数的概念

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \rho r u, \quad \frac{\partial \phi}{\partial x} = -\rho r v \quad (11)$$

由于

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)_y = \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)_\phi - \rho r v \left(\frac{\partial}{\partial \phi} \right)_x \quad (12)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} \right)_x = \rho r u \left(\frac{\partial}{\partial \phi} \right)_x \quad (13)$$

式(2), (3), (4)就成为

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \phi} (\tau r) - \frac{1}{\rho u} \frac{d\rho}{dx} \quad (2')$$

$$\frac{\partial m_i}{\partial x} = - \frac{\partial}{\partial \phi} (J_i r) + \frac{R_i}{\rho u} \quad (3')$$

$$\frac{\partial h^*}{\partial x} = - \frac{\partial}{\partial \phi} \left\{ \left(J_h + \sum_1^n H_i J_i - u\tau \right) r \right\} \quad (4')$$

由于式(7), (8), (9), 可以分别变换为 τ , J_i , J_h 对 ϕ 的偏导数, 因此式(2'), (3'), (4')就成为典型的有源的抛物线型方程, 这样原则上就可以采用适合于抛物线型方程的

数值解法来处理上述方程组。

在进一步求解上述方程组前,先对上述动量方程进行一些讨论。

在轴对称坐标系中推导动量方程时(见附录 I)先求得的形式是

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial \tau}{\partial y} + \frac{\cos \vartheta}{r} \tau - \frac{\partial p}{dx} \quad (\text{I-4})$$

推导过程中只是作了一般的边界层假定。方程 (I-4) 的适用范围较广,它不仅适用于以轴对称坐标为基础的旋成体表面的边界层流动,而且也适用于以圆柱坐标为基础的射流边界层流动。

对于轴对称射流流动的分析,一般用圆柱坐标系较好,这时边界层厚度与径向长度是属于同一数量级,由此可推得定常状态下轴对称二维射流流动的边界层动量方程

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\tau r) - \frac{dp}{dx} \quad (14)$$

其中 u 和 v 分别为 x 和 r 方向的速度分量。

比较式 (I-4) 与式 (14), 并参看图 1, 可以看出当 $\vartheta \rightarrow 0$, $r_1 \rightarrow 0$ 时,轴对称曲线正交坐标系就退缩为圆柱坐标系。式 (I-4) 即是式 (14)。当然,早期 Mangler 在处理层流边界层问题时,曾通过量级比较把式 (I-4) 等号右边第二项不再保留,把一个旋成体的边界层问题,在数学上化为一个平面的边界层问题来处理,使求解过程获得明显的简化^[5]。目前由于采用了数值解,通过应用前述方程组建立起来的计算程序,不仅可以解旋成体表面的边界层问题,而且可以解轴对称射流流动的边界层问题,和平面流动的边界层问题。

为了提高整个边界层各区域中的计算准确度,在差分方程建立前,差分网格的选择是很重要的。如果简单地采用 $x-\psi$ 坐标系来建立网格,那末在 x 值较小区域内,由于网格节点数太少,无法把流场的变化明显地表达出来。若为此而加密 ψ 值的坐标线,使 x 值较小处在 ψ 方向有较密的节点,但在 x 值较大处,却有大量的节点是不必要的。

有些作者在克服上述困难时,曾采用 $x-u/u_E$ 或 $x-y/y_E$ 坐标系,本文采用文献 [2] 提出的 Patankar-Spalding 坐标系,即 $x-\omega$ 坐标系。这种把正交坐标系中纵坐标化为相对值的做法,无非是想把网格节点安排成当计算向前推进时,每一站上的计算网格节点具有相同的数目,以提高 x 值较小区域内的计算精确度。根据文献 [2]

$$\omega = \frac{\psi - \psi_i}{\psi_E - \psi_i} \quad (15)$$

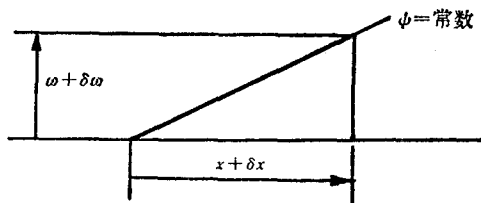


图 2 坐标系变换用图

这时 x, ψ, ω 之间的坐标情况如图 2 所示,由此得出下列关系式

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_{\psi} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_{\omega} + \left(\frac{\partial}{\partial \omega}\right)_x \left[\frac{-\frac{d\phi_I}{dx} - \omega \frac{d}{dx}(\phi_E - \phi_I)}{\phi_E - \phi_I} \right] \quad (16)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \psi}\right)_x = \frac{1}{\phi_E - \phi_I} \left(\frac{\partial}{\partial \omega}\right)_x \quad (17)$$

其中

$$\frac{d\phi_I}{dx} = -r_I \dot{m}_I'', \quad \frac{d\phi_E}{dx} = -r_E \dot{m}_E''$$

\dot{m}_I'' 和 \dot{m}_E'' 分别表示经过内外边界上的质量转移率.

应用式(16), (17)把守恒方程组(2'), (3'), (4')统一地化成下列通用形式:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + (a + b\omega) \frac{\partial \Phi}{\partial \omega} = \frac{\partial}{\partial \omega} \left(c \frac{\partial \Phi}{\partial \omega} \right) + d \quad (18)$$

其中

$$a = r_I \dot{m}_I'' / (\phi_E - \phi_I)$$

$$b = (r_E \dot{m}_E'' - r_I \dot{m}_I'') / (\phi_E - \phi_I)$$

$$c = r^2 \rho u \mu_{\text{eff}} / [(\phi_E - \phi_I)^2 \sigma_{\text{eff}}]$$

而源项 d 则随着守恒方程的性质变化而含有不同的内容¹⁾

方程性质

应变变量

d 项的内容

动量方程

*

$$-\frac{1}{\rho u} \frac{dp}{dx}$$

传质方程

m_j

$$\frac{R_j}{(\rho u)}$$

能量方程

h^*

$$\frac{\partial}{\partial \omega} \left\{ \frac{r^2 \rho u \mu_{\text{eff}}}{(\phi_E - \phi_I)^2} \left(1 - \frac{1}{\sigma_{\text{heff}}} \right) \frac{\partial (u^2/2)}{\partial \omega} \right\}$$

方程(18)仍是抛物线型方程,下面通过建立差分方程来求得这一方程的数值解.

二、差分方程的建立及其解法

在流场中取一有限控制容积如图3所示,然后在这一有限控制容积所定义的范围内进行积分来建立差分方程.用这种方法比之用 Taylor 级数展开来建立差分方程无论从满足守恒方程的物理概念,以及防止出现数学上的严重误差均有明显的好处^[2].

根据附录 II 差分方程如下:

$$g_1 \Phi_{D+} + g_2 \Phi_D + g_3 \Phi_{D-} + g_4 = g_5 (\Phi_{D+} - \Phi_D) - g_6 (\Phi_D - \Phi_{D-}) + d_u + \left(\frac{\partial d}{\partial \Phi}\right)_u (\Phi_D - \Phi_u) \quad (19)$$

经简化后成为

$$\Phi_D = A \Phi_{D+} + B \Phi_{D-} + C \quad (20)$$

其中

1) 表中能量方程的源项是令 $\sigma_{j\text{eff}} = \sigma_{\text{heff}}$ 后推得的.

$$A = \frac{g_5 - g_1}{g_2 + g_5 + g_6 - (\partial d / \partial \Phi)_u}$$

$$B = \frac{g_6 - g_3}{g_2 + g_5 + g_6 - (\partial d / \partial \Phi)_u}$$

$$C = \frac{d_u - (\partial d / \partial \Phi)_u \Phi_u - g_4}{g_2 + g_5 + g_6 - (\partial d / \partial \Phi)_u}$$

对于动量守恒方程由于源项处理的内容不同(见附录 II) 得到对应于式 (20) 的差分方程形式为

$$u_D = A_u u_{D^+} + B_u u_{D^-} + C_u \quad (21)$$

其中

$$A_u = \frac{g_5 - g_1 + S_1}{g_2 + g_5 + g_6 - S_2}$$

$$B_u = \frac{g_6 - g_3 + S_3}{g_2 + g_5 + g_6 - S_2}$$

$$C_u = \frac{S_4 - g_4}{g_2 + g_5 + g_6 - S_2}$$

根据附录中推导可知方程(19)是六点的隐式差分格式,它具有任何推进步长都稳定的特性。

由方程(20)代表的线性代数方程组的系数组成一个三对角线矩阵,通过迭代法求解。为此把式(20)再进一步简化为

$$\Phi_i = A'_i \Phi_{i+1} + B'_i \quad (22)$$

其中

$$A'_i = \frac{A_i}{1 - B_i A'_{i-1}}, \quad B'_i = \frac{B_i B'_{i-1} + C_i}{1 - B_i A'_{i-1}}, \quad A'_2 = A_2, \quad B'_2 = B_2 \Phi_1 + C_2$$

由于 Φ_1 和 Φ_{N+3} 是由边界条件决定,当边界上不给出 Φ_1 与 Φ_{N+3} 值时,则它们的系数为零。这就在理论上解决了求解的问题。

当节点取得比较密时,图 3 中 Φ 值的线性分布假定(在 $\Phi - \omega$ 平面上)对于流场内各点已满足计算精度的要求。但由于靠近边界上, Φ 值变化较陡,如果仍采用边界上真值的线性变化,便会引起失真,尤其当需要求得有关边界上的通量值和物理量的传递率时,就要引起很大误差。因为在求这些值时,需要用到 Φ 在边界上的梯度,而这一梯度不能以边界上的真实 Φ_1 值以及其邻近节点处 Φ_3 值简单地以线性变化来代替(参看图 4)。因此在边界层求解过程中,就提出了边界上的滑动值问题。也即可以根据不同的边界上 Φ 值的分布曲线,求出滑动值 Φ_2 (或 Φ_{n+2}),具体求法可以参看文献 [2]。

由于计算滑动值时要考虑到边界上 u 值的分布情况,因此边界上 u 值分布曲线的形状直接影响到边界层流动计算结果的正确性。由于靠近边界 u 值非常小,从守恒方程组 (2), (3), (4) 可以看出 x 方向的对流影响可以忽略,这就把靠近边界的流动简化为 Couette 流动的模式。根据边界上 Couette 流动的特性可以导出 u 值以及 Φ 值分布曲线指

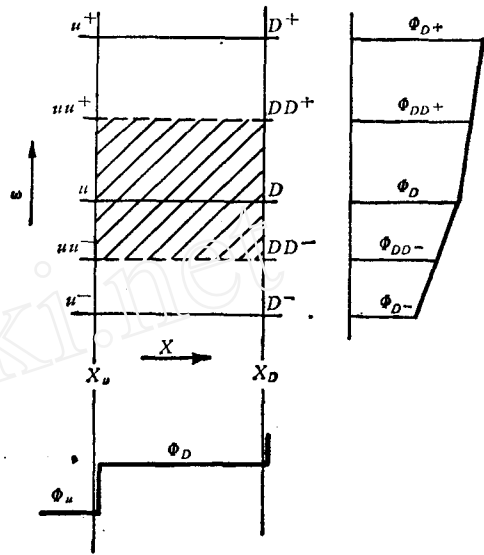


图 3 控制容积

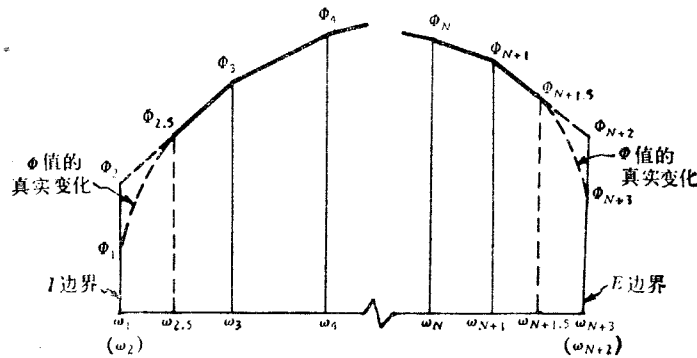


图4 滑动值定义

数值.

关于源项 $\frac{dp}{dx}$ 的处理: 对于预先给定 $\frac{dp}{dx}$ 分布的流动, 可以直接应用上述过程进行解题; 但对于 $\frac{dp}{dx}$ 的分布要在流动过程中决定的问题 (例如约束通道的边界层流动问题) 就比较复杂. 严格来讲, 应该根据迭代计算来解决 $\frac{dp}{dx}$ 的分布值, 这样在流场内必须保留与求 $\frac{dp}{dx}$ 有关的全部参数, 而且要进行多次迭代. 这样无论计算时间和要求的储存单元都显著增加, 把原来用推进形式求解抛物线型方程的优点即时间短、储存单元少, 全部取消了. 为此采用了一种近似的方法.

根据一维流动的连续方程和动量方程可推得 $\frac{dp}{dx}$ 的表达式如下:

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{F'}{A} - \frac{2\bar{u}}{A} \frac{d\dot{m}}{dx} + \frac{\dot{m}\bar{u}}{A} \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dx} + \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{d\bar{\rho}}{dx} \right) \quad (23)$$

由状态方程知

$$\frac{d\bar{\rho}}{\bar{\rho}} = \frac{dp}{p} - \frac{d\bar{T}}{\bar{T}}$$

所以

$$\frac{dp}{dx} = \frac{-\frac{F'}{A} - \frac{2\bar{u}}{A} \frac{d\dot{m}}{dx} + \frac{\dot{m}\bar{u}}{A^2} \frac{dA}{dx} - \frac{\dot{m}\bar{u}}{A\bar{T}} \frac{d\bar{T}}{dx}}{1 - \frac{\dot{m}\bar{u}}{A\bar{\rho}}} \quad (24)$$

其中

$$\bar{u} = \int r \rho u^2 dy / \int r \rho u dy, \quad \bar{T} = \int r \rho u T dy / \int r \rho u dy$$

对于低马赫数气体流动, 可以忽视压力对密度的影响, 上式等号右边分母中第二项就不存在.

关于 $\frac{\dot{m}\bar{u}}{A^2} \frac{dA}{dx}$ 的物理意义, 譬如讨论一个扩压器流动问题. 当计算进行到 $x = x_u$ 时,

发现算出的结果是流体没有充满整个扩压器断面,这说明原始给定的 $\frac{dp}{dx}$ 不对,理应重新假设 $\frac{dp}{dx}$ 来求得流体的流动断面,直到与扩压器的断面吻合为止。目前没有采用此法,而是让计算继续前进到 $x = x_D$,但这时采用的影响 $\frac{dp}{dx}$ 值的 $\frac{dA}{dx}$ 值是用下式计算

$$\frac{dA}{dx} = \frac{(A_{d,D} - A_{i,u})}{x_D - x_u} \quad (25)$$

也就是说把前一站 ($x = x_u$) 中所欠的 $\frac{dp}{dx}$ 值,在下一站 ($x = x_D$) 面积变化影响中补偿一部分。在实际计算中应该采用式 (25) 的部分值。只有这样才能防止计算所得的 A_i 的不稳定性。

在采用上述方法时,应该注意始终要使 $A_{i,D}$ 与 $A_{d,D}$ 比较接近,最好能在某些边界点上相等,否则算出的流场其近似性就毫无意义(参看图 5)。

式 (25) 的部分值采用多少,应根据试算过程中检查 $A_{i,D}$ 与 $A_{d,D}$ 的接近程度而定,对于接近直管的扩压流动,可以采用 0.1—0.2 的修正系数。对于扩压较快的扩压器,修正系数应取得很小或分段给定修正系数。

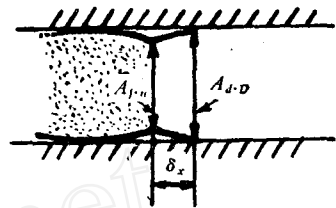


图 5 dA/dx 的物理含义

三、计算程序的内容和计算实例

根据上述内容编制了计算程序,由于篇幅所限,有关程序的框图和具体内容从略。程序利用的计算机是 Felix C-256 机。

曾使用本程序计算了一个环形扩压器(图 6)。关于沿轴向的静压变化,计算值与实验值比较示于图中,结果还较接近。

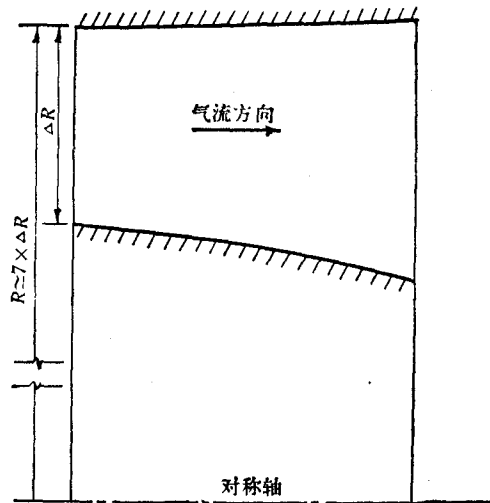
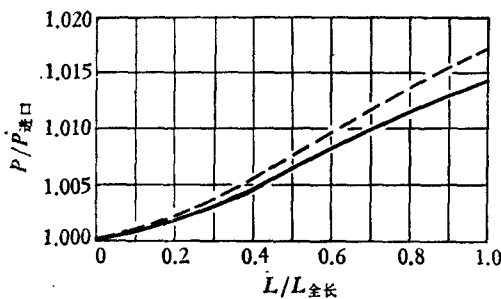


图 6 计算实例

——实验值 ——计算值 (a) 扩压器沿轴向静压变化

(b) 环形扩压器几何图形

四、结 束 语

本文根据文献 [6] 以应力张量表示的动量方程推导出轴对称坐标系中无旋转定常轴对称流动可压缩湍流边界层的动量方程, 通过推导和讨论可以清楚地看出, 方程 (2') (同样方程 (3'), (4') 和方程 (18)) 不仅适用于解旋成体表面的边界层问题, 而且也适用于解轴对称射流流动的边界层问题。

在文献 [2] 的基础上, 经本文部份修改后的计算程序, 通过实例验算证明可适用于下述两种情况:

1、当整个流道内流动要按粘性来处理时, 如果流道壁面的曲率不是太大, 沿流动方向曲率变化也不是太大, 整个流场可按本方法进行计算。

2、如果流道曲率变化较大, 那末一定要把本计算方法和主流中的无粘性流动结合起来计算。

附录 I 连续方程和动量方程的推导

当可压缩粘性流体在空间作定常流动时, 其连续方程和动量方程(不存在体力时)如下:

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0 \quad (1-1)$$

$$\nabla \left(\frac{1}{2} \rho |\mathbf{V}|^2 \right) - \mathbf{V} \times (\nabla \times \mathbf{V}) = \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \pi \quad (1-2)$$

按照文献 [6] 中介绍的向量和张量运算内容, 对于在轴对称坐标系中(图 1)进行的无旋转轴对称流动, 考虑到 $k\delta$ 和 $\delta^2 \left(\frac{dk}{dx} \right)$ 很小, 那末 $h_1 = 1$, $h_2 = 1$, $h_3 = r$, 对应于 α, β, γ 的坐标为 x, y, θ , 对应于速度矢 \mathbf{V} 的分量为 $v_1 = u$, $v_2 = v$, $v_3 = 0$, 而且所有变量在 θ 方向的变化均可略去^[4]。

由此, 连续方程写成如下形式

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) = 0 \quad (1)$$

而 x 方向的动量分方程为

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial \pi_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \pi_{xy}}{\partial y} + \pi_{xx} \frac{\sin \vartheta}{r} + \pi_{xy} \frac{\cos \vartheta}{r} - \pi_{\theta\theta} \frac{\sin \vartheta}{r}$$

应力张量 π 和粘性应力张量 τ 之间有下列关系式

$$\tau_{ij} = \pi_{ij} + \delta_{ij} p$$

其中 δ_{ij} 是 Kronecker δ , 故得

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\tau_{xx}}{\rho} \frac{\sin \vartheta}{r} + \frac{\tau_{xy}}{\rho} \frac{\cos \vartheta}{r} - \frac{\tau_{\theta\theta}}{\rho} \frac{\sin \vartheta}{r}$$

根据 Prandtl 对边界层的假定, 上述方程可简化为

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\cos \vartheta}{r} \tau_{xy} - \frac{\partial p}{\partial x} \quad (1-3)$$

在考虑了曲率的影响后, 可得到 y 方向的动量分方程为

$$k u^2 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}$$

因此

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0(1)$$

由于边界层厚度是属于 $0(\delta)$ 级, 故实际边界层中沿 y 方向的静压差可以忽视。

根据无旋转轴对称流动的条件, 以及通过量级比较, 可知 θ 方向的动量分方程已不存在。

为了简化起见令 τ 表示 τ_{xy} , 同时考虑到 $\cos \vartheta = \frac{\partial r}{\partial y}$ 和 $\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{dp}{dx}$ (因为沿 y 方向静压差可忽视), 则式(1-3)

可化为下式

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial \tau}{\partial y} + \frac{\cos \vartheta}{r} \tau - \frac{dp}{dx} \quad (1-4)$$

或

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial y} (\tau r) - \frac{dp}{dx} \quad (2)$$

关于传质方程(3)和能量方程(4)均可按上述同样步骤推导出, 不再复述。

附录 II 差分方程的推导原则

建立差分方程时, $\Phi - \omega$ 和 $\Phi - x$ 的关系如图 3 所示分别采用线性和阶梯形分布, 有关 $\frac{\partial}{\partial \omega}$ 中的 Φ 值则采用下游 x_D 上的 Φ 值, 这样可保证差分运算的稳定性^[2], 而系数 a, b, c 则从上游 x_u 处的 Φ 值来求得。然后按方程(18)各项对整个控制容积进行积分来建立该方程的差分格式。

源项 d 对应于不同的守恒方程有不同的内容。对于传质与能量守恒方程, 假定在整个控制容积内 d 值是均匀的而且都等于 d_D 值(即无论 $d-\omega$ 或 $d-x$ 变化都是阶梯形变化)。

对于动量守恒方程, 对应的 Φ 值是 u 。由于 u 值的计算结果同时要影响传质和能量守恒方程的解, 因此动量守恒方程的原项分布假定得比较精确一些就显得重要。现假定 $d-\omega$ 的变化在网格节点间是线性变化, 而 $d-x$ 的变化在网格节点间是阶梯形变化。

根据上述原则可推导出传质或能量守恒方程的差分方程

$$g_1 \Phi_{D+} + g_2 \Phi_D + g_3 \Phi_{D-} + g_4 = g_5 (\Phi_{D+} - \Phi_D) - g_6 (\Phi_D - \Phi_{D-}) + d_u + \left(\frac{\partial d}{\partial \Phi} \right)_u (\Phi_D - \Phi_u) \quad (19)$$

其中

$$g_1 = \frac{1}{4} \frac{(\omega_{D+} - \omega_D)}{(x_D - x_u)(\omega_{D+} - \omega_{D-})} + \frac{a}{(\omega_{D+} - \omega_{D-})} + \frac{b}{4} \frac{(\omega_{D+} + 3\omega_D)}{(\omega_{D+} - \omega_{D-})}$$

$$g_2 = \frac{3}{4(x_D - x_u)} - \frac{b}{4}$$

$$g_3 = \frac{1}{4} \frac{(\omega_D - \omega_{D-})}{(x_D - x_u)(\omega_{D+} - \omega_{D-})} - \frac{a}{(\omega_{D+} - \omega_{D-})} - \frac{b}{4} \frac{(\omega_{D-} + 3\omega_D)}{(\omega_{D+} - \omega_{D-})}$$

$$g_4 = -\frac{1}{4} \frac{(\omega_{D+} - \omega_D)}{(x_D - x_u)(\omega_{D+} - \omega_{D-})} \Phi_{u+} - \frac{3}{4(x_D - x_u)} \Phi_u$$

$$-\frac{1}{4} \frac{(\omega_D - \omega_{D-})}{(x_D - x_u)(\omega_{D+} - \omega_{D-})} \Phi_{u-}$$

$$g_5 = \frac{2C_{uu+}}{(\omega_{D+} - \omega_{D-})(\omega_{D+} - \omega_D)}$$

$$g_6 = \frac{2C_{uu-}}{(\omega_{D+} - \omega_{D-})(\omega_D - \omega_{D-})}$$

同样也可推导出对应于动量守恒方程的差分方程

$$g_1 u_{D+} + g_2 u_D + g_3 u_{D-} + g_4 = g_5 (u_{D+} - u_D) - g_6 (u_D - u_{D-}) + S_1 u_{D+} + S_2 u_D + S_3 u_{D-} + S_4$$

其中 $g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6$ 如上, 而

$$S_1 = \frac{1}{4\rho_u u_{u+}} \left(\frac{dp}{dx} \right)_{x_u} \frac{(\omega_{D+} - \omega_D)}{(\omega_{D+} - \omega_{D-})}$$

$$S_2 = \frac{3}{4\rho_u u_u} \left(\frac{dp}{dx} \right)_{x_u}$$

$$S_3 = \frac{1}{4\rho_u - \mu_u^2} \left(\frac{dp}{dx} \right)_{x,u} \left(\frac{\omega_{D^+} - \omega_{D^-}}{\omega_{D^+} - \omega_{D^-}} \right)$$

$$S_4 = -\frac{1}{2} \left(\frac{dp}{dx} \right)_{x,u} \left[\frac{1}{\rho_u + \mu_u} \left(\frac{\omega_{D^+} - \omega_{D^-}}{\omega_{D^+} - \omega_{D^-}} \right) + \frac{3}{\rho_u \mu_u} \right. \\ \left. + \frac{1}{\rho_u - \mu_u} \left(\frac{\omega_{D^+} - \omega_{D^-}}{\omega_{D^+} - \omega_{D^-}} \right) \right]$$

参 考 文 献

- [1] Gosman, A. D., Pun, W. M., Runchal, A. K., Spalding, D. B., Wolfshtein, M., Heat and Mass Transfer in Recirculating Flows, Academic Press (1969).
- [2] Patankar, S. V., Spalding, D. B., Heat and Mass Transfer in Boundary Layers, Intertext Books (1970).
- [3] Spalding, D. B., A General Computer Program for Two-Dimensional Boundary-Layer Problems, Imperial College of Science and Technology, Department of Mechanical Engineering (1973).
- [4] Goldstein, S., Modern Developments in Fluid Dynamics, Oxford University Press (1938), 128—130.
- [5] Mangler, W., Zusammenhang zwischen ebenen und rotationssymmetrischen Grenzschichten in Kompressiblen Flüssigkeiten, ZAMM, 28(1948), 97—103.
- [6] 钱学森, 气体动力学诸方程, 科学出版社 (1966), 58—60.

NUMERICAL CALCULATION OF STEADY TWO-DIMENSIONAL AXI-SYMMETRICAL TURBULENT BOUNDARY LAYER OF A COMPRESSIBLE FLUID

Wang Ying-shih

(Institute of Mechanics, Academia Sinica)

Abstract

A momentum equation of steady two-dimensional axi-symmetrical turbulent boundary layer is derived employing stress tensor analysis. It is found that if the flow in a duct is to be treated as viscous everywhere, the equation is valid only if the curvature of the duct and the rate of change of the curvature of the duct in the flow direction are small. These requirements so far have not been verified by previous authors.

In this paper, a computer program for solving the governing equations has been completed and a numerical example is selected to show its degree of accuracy.