

可压缩流边界层参数的工程计算方法

卞荫贵 赵国英

(中国科学院力学研究所)

提要 本文把边界层理论中的参考焓方法推广到具有压力梯度的二维和三维轴对称流动,得到了物面动量厚度和摩擦阻的计算公式。同时利用边界层理论的某些成果推导了边界层各种厚度之间的近似关系。所得公式计算方便,与目前流行的但只适用于特殊情况的公式和有关的实验数据的比较表明,本文的结果是满意的。

主要符号表

$c_f = 2\tau_w/\rho_e u_e^2$ 物面摩擦系数

h 焓

$h_r = h_e + ru_e^2/2$ 恢复焓

$J = \begin{cases} 0 & \text{二维物体} \\ 1 & \text{三维轴对称物体} \end{cases}$

p 压力

Pr 层流普朗特数

q_w 壁面热流

r 恢复因子

R 轴对称物体物面到对称轴的距离

$Re_s = \rho_e u_e s / \mu_e$ 雷诺数

s 物面坐标

St 斯坦顿数

T 温度

$T_r = T_e + ru_e^2/2$ 恢复温度

u 平行于物面的速度

y 离物面的法向距离

τ_w 物面摩擦应力

ρ 密度

δ 边界层厚度

$\delta^* = \int_0^\delta \left(1 - \frac{\rho u}{\rho_e u_e}\right) dy$ 位移厚度

$\theta = \int_0^\delta \frac{\rho u}{\rho_e u_e} \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) dy$ 动量厚度

μ 动力学粘性系数

下标:

w 壁面

m 局部等属性流体

t_r 转捩点

e 边界层外缘

一、引言

可压缩流动边界层的工程计算中,参考焓方法仍然是常用的方法之一。其优点在于简单、方便,具有一定的精度。

参考焓方法是1935年卡门首先对等温平板绕流提出的^[1]。五十年代后,该方法得到了广泛的发展和采用。虽然人们常把它推广到等温平板以外的情况,但由于推导过程中对湍流边界层大都采用平板摩擦公式计算有压力梯度情况下的物面摩擦^[3,4],而后在此基础上得到边界层沿物面的增长,因而所得结果都存在着一定的缺点。例如[3]的公式与实验数据分歧很大,而[4]收集的一些公式也只适用于等温壁面的情况。

本文于1978年10月28日收到。

本文在论述了参考焓方法的物理意义后,提出了“局部等属性流体”及其边界层的概念,利用不可压缩边界层的一些结果把参考焓方法推广到二维和三维轴对称流动,求出了物面动量厚度和摩阻的计算公式。同时利用边界层理论的某些成果推导了边界层厚度、位移厚度与动量厚度之间的近似关系。与目前流行的公式和有关实验数据的比较表明,所得公式是相当满意的。

本文结果可供工程设计部门进行有关计算时使用。

二、分 析

(一) 平板参考焓方法

不少作者(例如 [1]、[4] 和 [6]) 都曾对平板参考焓方法的物理意义作过解释,综合这些工作,我们可以把参考焓方法的基本思想理解为,在可压缩流动的情况下,即在有压缩性存在的场合,我们仍可假定在壁面附近形成不可压缩边界层,只要我们选择合适的温度(或焓)来计算这种假想的不可压缩流体的密度和粘性系数,那末就可以从不可压缩流动的关系式得到可压缩流动的一些关系式(注意起先只限于摩擦系数和传热系数的公式,不包括动量厚度等的关系)。

现在我们从数学上来说明上述平板参考焓的基本思想,考虑可压缩流体绕一块零攻角半无穷平板的流动,其边界层动量积分方程及其边界条件可写作

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\theta}{ds} &= \frac{\tau_w}{\rho_e u_e^2} \\ \text{壁面 } y=0, \quad u &= 0, \\ \text{边界层外缘 } y=\delta, \quad u &= u_e = \text{常数}, \quad p = p_e = \text{常数} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

按照参考焓方法的物理意义,可假定在壁面附近形成不可压缩流动边界层,它的动量积分方程可写作

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\theta_m}{ds} &= \frac{\tau_{wm}}{\rho_m u_e^2} \\ \text{边界条件为} \\ \text{壁面 } y=0, \quad u &= 0, \\ \text{边界层外缘 } y=\delta_m, \quad u &= u_e = \text{常数}, \quad p = p_e = \text{常数} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

当我们选择合适的焓(或温度)来计算这种不可压缩边界层中流体的密度和粘性系数时,那末由此算得的表面摩擦力与可压缩流动相同,即 $\tau_{wm} = \tau_w$ 。现在流行的各种参考焓^[2],就是从层流数值解基础上得到的这种焓的取法的经验公式,并且已推广到了湍流平板。

利用 Pohlhausen 方法,可求得 (2) 在层流情况下的解

$$\left. \begin{aligned} c_{fm} &= 0.664 \sqrt{\mu_m / \rho_m u_e s} \\ \theta_m &= 0.664 s \sqrt{\mu_m / \rho_m u_e s} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

由于 ρ_m 、 μ_m 的选择保证了 $\tau_{wm} = \tau_w$, 故可得

$$c_f = 0.664 \sqrt{\rho_m \mu_m / \rho_e \mu_e} / \sqrt{\text{Re}, s} \quad (4)$$

同时,由于两种边界层的 u_e 相同,且在平板前缘有 $\theta = \theta_m = 0$, 由(1)、(2)可积得

$$\theta = \rho_m \theta_m / \rho_e \quad (5)$$

将(3)代入上式得到

$$\theta = 0.664s \sqrt{\rho_m \mu_m / \rho_e \mu_e} / \sqrt{Re_s} \quad (6)$$

对于湍流平板,从幂次速度分布律和摩擦系数 c_{fm} 与边界层厚度 δ_m 的关系,并假定转换点位置 $s_r = 0$,在进行与层流类似的推导以后,可得到 c_{fm} 和 θ_m 的表达式,并进而得到

$$c_f = 0.0592(\rho_m/\rho_e)^{1/5}(\mu_m/\mu_e)^{1/5}/(Re_s)^{1/5} \quad (7)$$

$$\theta = 0.0365s(\rho_m/\rho_e)^{1/5}(\mu_m/\mu_e)^{1/5}/(Re_s)^{1/5} \quad (8)$$

如果我们选用文献[7]关于参考焓的公式

$$h_m = h_e + 0.5(h_w - h_e) + 0.22(h_r - h_e) \quad (9a)$$

或

$$T_m = T_e + 0.5(T_w - T_e) + 0.22(T_r - T_e), \quad (9b)$$

那末公式(4)和(6)以及(7)和(8)就是[7]的结果。

从[7]的附图,我们看到,层流时参考焓方法对数值解的误差小于2%;湍流时与实验也很符合。而且,由于所取的普朗特数 Pr 和粘性系数的规律不同,平板层流数值解之间出现了十分大的差异,当粘性系数的指数 ω 取1时,可压缩绕流的摩擦系数竟与不可压缩流动相同。但特别有意义的是对于任何一对选定的 ω 和 Pr 数,参考焓方法却能以2%的误差逼近数值解的结果。这深刻地说明了参考焓方法的优越性。

(二) 参考焓方法的推广

1. 基本思想:按照上节中用参考焓方法求解平板边界层的思路,现在我们把这个方法推广到二维和零攻角轴对称物体的情况。此时,壁面和外流条件是物面坐标 s 的函数,因而我们假设这样一种不可压缩边界层,其外流压力和速度以及壁面条件与真实流动相同,但当流体进入边界层后,它们在每个截面上($s = \text{常数}$)的密度和粘性系数取由该截面的真实外流和壁面条件所决定的参考焓(或温度)下的值,显然它们也是随 s 而变化的;如果我们能恰当地选择这个量,那末这种边界层作用在壁面上的摩擦力就与真实流动相同,即 $\tau_{wm} = \tau_w$ 。为了方便起见,我们把这种流体称为“局部等属性流体”,把它在物面上形成的边界层称为“等属性边界层”,并且带下标 m 的量来表示其中的参数。

可压缩流体绕二维或零攻角轴对称物体流动时边界层动量积分方程的一般形式可写作^[8]:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\theta}{ds} + \theta \left[\left(2 + \frac{\delta^*}{\theta} \right) \left(-\frac{1}{\rho_e u_e^2} \frac{dp_e}{ds} \right) + \frac{d}{ds} (\ln \rho_e R^J) \right] &= \frac{\tau_w}{\rho_e u_e^2} \\ \text{壁面 } y=0, u=0, \\ \text{边界层外缘 } y=\delta, u=u_e(s), p=p_e(s) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

把上式应用于等属性边界层,便得到有关的动量积分方程为

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\theta_m}{ds} + \theta_m \left[\left(2 + \frac{\delta_m^*}{\theta_m} \right) \left(-\frac{1}{\rho_m u_e^2} \frac{dp_{em}}{ds} \right) + \frac{d}{ds} (\ln \rho_m R^J) \right] &= \frac{\tau_{wm}}{\rho_m u_e^2} \\ \text{壁面 } y=0, u=0, \\ \text{边界层外缘 } y=\delta_m, u=u_e(s), p=p_{em}(s). \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

按照上述等属性边界层定义, 则 $dp_{em}/ds = dp_e/ds = -\rho_e u_e (du_e/ds)$.

我们作如下假设: 公式 (9) 就是适合于目前情况的参考焓, 若以它来计算等属性边界层中的密度和粘性系数, 就能保证 $\tau_{wm} = \tau_w$, 那末剩下的问题就是求解 (11), 并把所得的结果转换到真实的可压缩边界层上去. 如果这样求得的结果与有关实验数据和边界层理论中已有的结果相符, 那末就可以说我们上面所作的假设是合理的. 本文第三部分完成了这一工作.

2. 公式推导¹⁾: 利用边界层理论的已有结果, 我们在本节第三部分推导了 δ^*/θ 的关系, 由此及公式 (9), 可以证明下式是一个既适用于层流也适用于湍流的很好的近似:

$$\frac{2 + \delta^*/\theta}{2 + \delta_m^*/\theta_m} \approx \frac{T_m}{T_e} = \frac{\rho_e}{\rho_m} \quad (12)$$

将 (12) 代入 (10) 减去 (11), 并按照选用 (9) 能保证 $\tau_{wm} = \tau_w$ 的假设, 积分所得的微分方程, 再利用已有数值解的结果 [平板或尖头体 $s = 0$ 时 $\theta = \theta_a$, $r = 0$, 钝体时用 (11) 在驻点的解及有关的可压缩边界层的数值解在驻点处 θ 的值 (例如文献 [1] 中的结果)], 确定积分常数, 便可得到

$$\theta = (\rho_m \theta_m) / \rho_e \quad (13)$$

该式为我们把等属性边界层的解转换到可压缩边界层去提供了简易的关系.

1) 层流情况: 我们采用不可压缩边界层中常用的方法, 即 Pohlhausen 方法和 Walz 近似, 完全可以按照与不可压缩流动相类似的步骤^[1], 引进

$$\Lambda_m = \frac{\delta_m^2 \rho_e}{\nu_m \rho_m} \frac{du_e}{ds}, \quad K_m = \frac{\theta_m^2 \rho_e}{\nu_m \rho_m} \frac{du_e}{ds}, \quad z = \frac{\theta_m^2}{\nu_m} \rho_m^2 R^2$$

等参数, 求解 (11), 并利用 (13), 然后利用 $\tau_w = \tau_{wm}$ 可以得到

$$\frac{\theta}{s} = \frac{0.686}{\sqrt{Re, s}} \left\{ \frac{\int_0^s \frac{1}{u_e} \rho_m \mu_m R^2 e^{\int_0^s \frac{\rho_e}{\rho_m} \frac{d \ln u_e}{ds} ds} ds}{\int_0^s \frac{1}{u_e} \rho_e \mu_e R^2 e^{\int_0^s \frac{\rho_e}{\rho_m} \frac{d \ln u_e}{ds} ds} ds} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (14)$$

和

$$c_f = 2f_2(K_m) \rho_m \mu_m / (\rho_e^2 \theta u_e) \quad (15)$$

其中 $f_2(K_m)$ 可由文献 [1] 表 12.2 查得.

2) 湍流情况: 为了计算压力梯度对速度分布型的影响, 我们引进速度分布的形状参数

$$\Gamma = [\rho_e \theta_m / (\rho_m u_e)] (du_e/ds) (u_e \theta_m / \nu_m)^{1/n} \quad (16)$$

并假定壁面摩擦力 τ_{wm} 和厚度比 $H = \delta_m^*/\theta_m$ 也是形状参数 Γ 的函数, 即

$$\left. \begin{aligned} \tau_{wm} &= [f_1(\Gamma) / (u_e \theta_m / \nu)^{1/n}] \rho_m u_e^2 \\ H &= \delta_m^*/\theta_m = f_2(\Gamma) \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

将 (17) 代入 (11), 并利用 Buri 根据他自己和 Nikurcdse 在不可压缩边界层中所做的实验提出的近似^[1]

$$F(\Gamma) = [(n+1)/n] f_1(\Gamma) - \{2 + 1/n + [(n+1)/n] f_2(\Gamma)\} \Gamma = c - d\Gamma \quad (18)$$

1) 本文的推导都假定可压缩流体满足完全气体方程 $p = \rho RT$ 以及 $h = c_p T$, $c_p =$ 常数.

式中当 $n = 4$ 时, $c = 0.016$, $d = 4$, 再利用关系式 (12) 和 (13) 便可得到

$$\frac{\theta}{s} = \left\{ \frac{0.016 \int_{s_{tr}}^s \mu_m^{1/4} \rho_m R^{5/4} e^{\int_{s_{tr}}^s [4 + \frac{1}{4}(1 - \frac{\rho_m}{\rho_c})]} \frac{\rho_c}{\rho_m} \frac{d}{ds} \ln u_e \cdot ds + c_1}{\text{Re}^{1/4} s \mu^{1/4} \rho_c R^{5/4} e^{\int_{s_{tr}}^s [4 + \frac{1}{4}(1 - \frac{\rho_m}{\rho_c})]} \frac{\rho_c}{\rho_m} \frac{d}{ds} \ln u_e ds} \right\}^{1/2} \quad (19)$$

其中 c_1 由转捩点处层流和湍流边界层动量厚度相等的条件来确定, 即

$$c_1 = (\rho_c \theta)^{1/2} u_e^{1/2} R^{3/4} \Big|_{s=s_{tr}} \quad (20)$$

由 (17) 和摩擦系数的定义可得

$$c_f = \frac{2f_1(\Gamma)}{\left(\frac{\rho_c u_e \theta}{\mu_m}\right)^{1/2} \rho_m} \quad (21)$$

Buri 的文章中没给出 $f_1(\Gamma)$ 的表达式, 我们曾试图根据文献 [5] 的数据反推出这个式子, 在顺压梯度下 $f_1(\Gamma)$ 随 Γ 变化很小, 接近于平板的值, 故可取 $f_1(\Gamma) = 0.0128$; 对于逆压梯度, 计算中发现 $f_1(\Gamma)$ 随 Γ 变化很大, 但实验数据比较稀, 无法精确地确定 f_1 , 因而未给出 $f_1(\Gamma)$ 的表达式。

(三) 边界层厚度、位移厚度与动量厚度之间的近似关系

1. 层流情况: 可压缩层流边界层的相似理论指出, 利用可压缩变换

$$\eta = \frac{\rho_c u_e}{\sqrt{2\xi}} \int_0^y R^j \frac{\rho}{\rho_c} dy, \quad \xi = \int_0^s \rho_c \mu_c u_c R^j ds$$

可将边界层方程变换为

$$(cf'')' + ff'' + \beta[\rho_c/\rho - (f')^2] = 0 \quad (22)$$

的形式, 其中 $f'(\eta) = u/u_e$, $c = \rho\mu/\rho_c\mu_c$, $\beta = (2\xi/u_e) du_e/d\xi$, 在假定存在相似解的条件下, [9] 给出了 $c = 1$ 情况下的数值解, 从该文献图 2 可知, 冷壁(绝热壁温以下)和顺压梯度或小逆压梯度下, 含有 β 的项对 f' 与 η/η_e 关系的影响很小, 从文献 [10] 图 1 和 [2] 的图 7-1 可知, 在上述条件下, $c \geq 0.6$, 故 β 对 f' 与 η/η_e 的关系影响不大. 因而对于求解与 f' 值大小有关的问题(我们这里计算 θ 与 δ^* 和 δ 的关系便属于这一类问题), 可将 (22) 简化为

$$(cf'')' + ff'' = 0 \quad (23)$$

文献 [2] 给出了 (23) 的近似解

$$u/u_e = f'(\eta) = f'_B(\eta/\sqrt{c_m}) \quad (24)$$

其中 B 代表 Blasius 解, $c_m = \rho_m \mu_m / \rho_c \mu_c$. 如果我们利用 Crocco 关系 [2]

$$h/h_e = 1 + [(h_r - h_e)/h_e](f' - f'^2) + (h_w/h_e - 1)(1 - f') \quad (25)$$

作为有压力梯度时能量方程的近似解, 那末利用 (24) 及 θ 和 δ^* 的定义, 可得到 [(24) 中 Blasius 解 f' 的值可查 [1] 的表 7.1]

$$\left. \begin{aligned} \delta^*/\theta &= (h_r/h_e - 1) + 2.69h_w/h_e \\ \delta/\theta &= 6.43 + \delta^*/\theta \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

其中 δ 定义为 $f' = 99.9\%$ 处的 y .

2. 湍流情况: 利用 Coles-Crocco [8] 变换可以把可压缩湍流边界层的动量和能量方程变

换成不可压缩边界层的动量和能量方程, 这个变换对有压力梯度和热传导的情况也适用。这个变换中有关系 $(\bar{\rho}/\rho)\partial\bar{y}/\partial y = \eta(\zeta)$, $d\bar{s}/ds = \xi(\zeta)$, $u/u_e = \bar{u}/\bar{u}_e$, 带上标一的数量为变换后的不可压缩边界层的参数。假定速度分布满足 1/7 次幂的规律(这个假定对顺压梯度和小逆压梯度都是成立的, 参看文献 [1] 二十一章和 [2] 的图 6-4),

$$u/u_e = \bar{u}/\bar{u}_e = (\bar{y}/\bar{\delta})^{1/7} \quad (27)$$

利用上式及 Crocco 关系 (25) 可得到

$$\left. \begin{aligned} \delta^*/\theta &= 9h_w/(7h_e) + h_r/h_e - 1 \\ \delta/\theta &= 9 + \delta^*/\theta \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

三、比 较

(一) 与有关公式的比较

边界层厚度沿物面增长这个经典的问题, 前人做了大量工作, 今把 (14) 和 (19) 与之作一比较。

对于不可压缩流动, 在二维和三维轴对称绕流情况下, μ 和 ρ 以常值代入 (14) 和 (19) 所得结果与文献 [1] 和 [2] 的有关公式相符。超音速零攻角平板和圆锥绕流的条件下, 由 (14)、(15)、(19)、(20) 所得公式与文献 [2] 和 [7] 的有关公式相符。

对于三维钝体驻点, (14) 变成

$$\theta = 0.686 \sqrt{\rho_m \mu_m} / [\rho_e \sqrt{(6\rho_e/\rho_m + 2) du_e/ds}]_{s=0} \quad (29)$$

由 (15) 并近似地采用不可压缩三维驻点绕流的雷诺比拟关系^[2]

$$St = 0.29 Pr^{-0.6} c_f$$

可得到

$$q_w = k_m \cdot 0.762 Pr^{-0.6} \rho_w \mu_w^{0.1} (\rho_e \mu_e)^{0.4} \sqrt{du_e/ds}|_{s=0} (h_r - h_w)$$

其中 $k_m = 0.38(\rho_m \mu_m / \rho_e \mu_e)^{0.4} (\rho_m \mu_m / \rho_w \mu_w)^{0.1} \sqrt{(6\rho_e/\rho_m + 2)}$, 在壁温比 $T_w/T_e = 0.1 - 1.0$ 的范围内, 利用 $\mu = \mu_0(T/T_0)^{0.76}$ 可算得 $k_m \sim 1$ 。因而本文推出的驻点热流公式与 Fay 和 Riddell 公式相符。

文献 [11] 曾对钝体驻点区层流边界层进行过求解, 文中采用了高冷壁和 $c = 1$ 的假定, 并认为此时方程 (20) 中可以忽略含 β 的项, 由此可得

$$\frac{\theta}{s} = \frac{0.664}{\sqrt{Re_s}} \left\{ \frac{\int_0^s \rho_e \mu_e u_e R^2 ds}{\rho_e \mu_e u_e R^2 s} \right\}^{1/2} \quad (30)$$

利用 [11] 所作的假定, (14) 同样可简化为 (30)。

对于湍流边界层, [12] 在高冷壁的假定下取 $s_{tr} = 0$, 得到了驻点区动量厚度的计算公式

$$\frac{\theta}{s} = \frac{0.0365}{Re_s^{1/5}} \left\{ \frac{\int_0^s \rho_e \mu_e^{1/4} u_e^{3/4} R^{5/4} ds}{\rho_e \mu_e^{1/4} u_e^{3/4} R^{5/4} s} \right\}^{1/2} \quad (31)$$

作了同样的假设以后, (19) 也可变成与 (30) 相类似的公式。(30) 可以看作平板边界层摩擦系数与物形参数的乘积, 如果用参考焓修正前者, 以反映压缩性对动量厚度的影响,

表 1 本文理论公式计算结果与 Winter 等人实验数据的比较

M_∞	Rel	$\frac{x^*}{l}$	δ (时)		δ^* (时)		θ (时)	
			实 验	理 论	实 验	理 论	实 验	理 论
0.597	9.98×10^6	0.4	0.315	0.377	0.0635	0.0512	0.0363	0.0363
		0.475	0.464	0.695	0.1095	0.0928	0.0630	0.0669
		0.55	0.757	1.014	0.1572	0.1348	0.0939	0.0997
		0.7	1.101	1.938	0.3059	0.2560	0.1858	0.1869
		0.833	0.920	1.249	0.1683	0.1660	0.1142	0.1203
		0.983	0.758	0.670	0.0859	0.0901	0.0609	0.0644
1.398	10.02×10^6	0.4	0.287	0.262	0.0654	0.0512	0.0234	0.0234
		0.475	0.360	0.424	0.0970	0.0790	0.0362	0.0383
		0.55	0.524	0.671	0.1581	0.1178	0.0618	0.0615
		0.7	0.960	0.144	0.3244	0.2340	0.1359	0.1347
		0.833	0.921	1.122	0.1837	0.1812	0.0916	0.1044
		0.983	0.931	0.850	0.1233	0.1350	0.0663	0.0794
1.404	1.997×10^6	0.4	0.266	0.232	0.0584	0.0454	0.0207	0.0207
		0.475	0.314	0.372	0.0840	0.0695	0.0312	0.0336
		0.55	0.450	0.590	0.1356	0.1308	0.0543	0.0541
		0.7	0.874	1.280	0.2866	0.2073	0.1234	0.1192
		0.833	0.821	0.987	0.1594	0.1595	0.0806	0.0920
		0.983	0.828	0.774	0.1112	0.1184	0.0605	0.0696
1.700	10.00×10^6	0.4	0.363	0.282	0.0800	0.0624	0.0244	0.0244
		0.55	0.465	0.625	0.1594	0.1246	0.0538	0.0556
		0.7	0.841	1.221	0.2901	0.2208	0.1070	0.1112
		0.833	0.820	0.970	0.1763	0.1731	0.0764	0.0885
		0.983	0.892	0.723	0.1172	0.1268	0.0545	0.0663
2.000	9.96×10^6	0.4	0.372	0.285	0.0916	0.0721	0.0238	0.0283
		0.475	0.400	0.416	0.1232	0.0999	0.0329	0.0351
		0.55	0.483	0.581	0.1678	0.1310	0.0482	0.0500
		0.7	0.775	1.051	0.2736	0.2122	0.0878	0.0932
		0.833	0.760	0.844	0.1689	0.1661	0.0636	0.0753
		0.983	0.827	0.627	0.1180	0.1211	0.0478	0.0562
2.401	10.03×10^6	0.4	0.405	0.1396	0.0582	0.0406	0.0110	0.0110
		0.55	0.500	0.350	0.1170	0.0922	0.0281	0.0286
		0.7	0.676	0.625	0.1903	0.1462	0.0527	0.0532
		0.833	0.820	0.523	0.1447	0.1172	0.0475	0.0451
		0.983	0.887	0.415	0.0957	0.0908	0.0322	0.0360
2.799	10.05×10^6	0.4	0.341	0.174	0.0796	0.0577	0.0129	0.0129
		0.55	0.500	0.374	0.1323	0.1138	0.0259	0.0289
		0.7	0.630	0.607	0.1410	0.1616	0.0329	0.0395
		0.833	0.820	0.429	0.1199	0.1238	0.0333	0.0409
		0.983	0.827	0.387	0.0998	0.0952	0.0283	0.0325

*) $l = 60$ 吋

便可得到近似文献 [13] 的结果。

公式 (30) 和 (31) 都受到高冷壁等假定的限制, 因而未能反映壁温沿物面变化对边界层增长的影响。而 (14) 和 (19) 却无此缺点。此外, (19) 考虑了转捩问题, 而 (31) 却没有。

(二) 与实验数据的比较

文献 [5] 对一个腰形旋成体上的绝热湍流边界层作了测量。就作者所知, 该实验已成了可压缩湍流边界层理论中各种方法与实验比较的最常用的实验之一。图 1 示出了本文算得的动量厚度与这个实验的比较¹⁾, 结果是令人满意的, 它甚至与差分法^[14,15]的结果相近。在求得 θ 以后, 我们用 (28) 算出了 δ^* 和 δ , 也与实验相符(见表 1)。

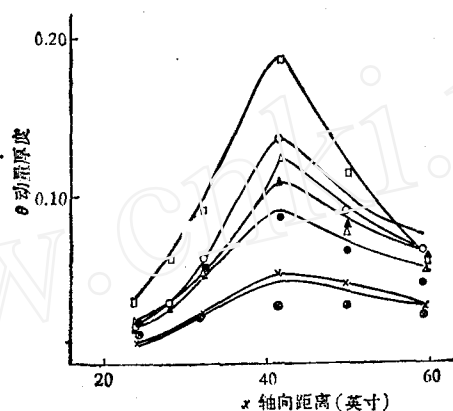


图 1 式 (39) 与 Winter 等人实验数据的比较

实验点	□	○	▲	△	●	×	⊗
M_∞	0.597	1.398	1.404	1.700	2.000	2.401	2.999
$Re, \rho_\infty \times 10^{-3}$	9.98	10.08	19.34	10.00	9.88	10.10	10.10

——式 (39) 的计算结果

四、讨 论

本文所得公式, 适用于二维及三维轴对称物体绕流, 物体既可是尖头体, 也可以是钝头体。但因推导中假定了顺压梯度和小逆压梯度, 以及非热壁 (壁温低于绝热壁温) 的条件, 因而使用文中的公式时请注意这些条件。

参 考 文 献

- [1] Schlichting, D. H. "Boundary Layer Theory". McGraw-Hill (1960).
- [2] White, F. M. "Viscous Fluid Flow" McGraw-Hill (1974).
- [3] Spence, D. A., ARC. R&M. 3191 (1961).
- [4] 空气动力学参考资料, 1975 年第 2 期。
- [5] Winter, K. G. et al., ARC. R&M. 3633 (1970).
- [6] Dorrance, W. H. "Viscous Hypersonic Flow". McGraw-Hill (1962).
- [7] Eckert, E. R. G., J. A. S., 22, 8(1955).

1) 该计算由王福汉同志完成, 在此表示谢意。

- [8] Crocco, L., *AIAA. J.*, 1, 12(1963).
- [9] Cohen C. B., Reshtho, E. NASA Report 1293 (1956).
- [10] Fay, J. A., Riddell, F. R. *J. A. S.*, 25, 2(1958).
- [11] Lees, L., *Jet propulsion*, 26, 4 (1956).
- [12] Probst, R. F. et al., *Jet Propulsion*, 28, 1(1958).
- [13] Grabow, R. M. et al., *AIAA. J.*, 13, 5 (1975).
- [14] Cebeci, T. et al., "Analysis of Turbulent Boundary Layers" Academic Press (1974).
- [15] Herring, H. J. et al., NASA, SP216 (1970).

AN ENGINEERING METHOD FOR THE CALCULATION OF THE PARAMETERS IN COMPRESSIBLE BOUNDARY LAYERS

Pien Yen-kwei Chao Guo-ying

Abstract

This paper extends the reference enthalpy method in boundary layer theory to the two dimensional and axisymmetrical three dimensional flow with pressure gradient, the formulae for calculating the momentum thickness and friction coefficient along the body surface are obtained. The approximate relationships among various thicknesses are derived by using some related results of the boundary layer theory. It is shown that the present formulae are in good agreement with the related experimental data and are fairly satisfactory as compared with the current formulae under special conditions.