研究简报

FORTRAN 语言的非数值应用

刘尊全　　秦朝斌
（中国科学院应用数学研究所）（中国科学院力学研究所）

1. 系统设计

利用高速计算机，进行微分方程公式的推导是数学研究工作的一个新的尝试，它将影响今后微分方程研究工作的现代化.

微分方程程序系统(Differential Equation Program System，简称 DEPS)的主要用途是进行微分方程公式推导，对有穷序列的符号串进行自动化地信息加工.

DEPS 是具有通用性的应用软件. 系统设计的关键是处理带有系数的多变量的多项式，其项的一般形式可表示为

$$\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdots \alpha_m \cdot \beta_1^{k_1} \beta_2^{k_2} \cdots \beta_n^{k_n}, \tag{1.1}$$

式中 $\alpha_i (i = 1, 2, \cdots, m)$ 为项的系数，$\beta_j (j = 1, 2, \cdots, n)$ 为项的变元，k_j 为所对应变量的方幂.

DEPS 的主要组成部分有：1. 多项式运算；2. 取项；3. 比项；4. 合并同类项；5. 多项式传送；6. 提取公因子；7. 约分；8. 多项式微分；9. 矩阵运算；10. 制表.

基于项的一般形式，我们可以看出，DEPS 本身既能进行数值计算，又能进行符号推演.

在进行系统设计时，我们遇到并解决了下述问题：

1. 数值计算与非数值应用的并行处理.

根据公式推导的需要，为适应大系数的处理，避免机器产生上溢和下溢，并且保证运算的精度，DEPS 尽量地扩充数的取值范围，从理论上说，系统数的取值范围是 $-\infty \sim +\infty$.

通常情形下的符号逻辑运算，不能满足公式推导的需要，为此 DEPS 解决了符号的算术运算，这是 DEPS 系统的重要特征.

2. 随机存贮项栈结构.

3. 机器结果的加工整理.

2. 算法描述

作为系统的具体应用和验证，我们将 DEPS 用于微分方程极限环中心焦点的判定，Ляпунов 函数的推导等方面的研究工作.

本文 1979 年 11 月 13 日收到.

我们求解下面的方程组

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} \equiv X_1(x, y) + X_2(x, y) + \cdots\cdots + X_m(x, y) \equiv y + \sum\limits_{i=2}^{m} X_i, \\ \dfrac{dy}{dt} \equiv Y_1(x,y) + Y_2(x, y) + \cdots\cdots + Y_m(x, y) \equiv -x + \sum\limits_{i=2}^{m} Y_i, \end{cases} \tag{2.1}$$

式中 X_i, Y_i 均为 i 次齐次多项式.

先取一形式级数 $F(x, y)$

$$F(x, y) \equiv \sum_{n=2}^{\infty} F_n(x, y), \tag{2.2}$$

其中

$$F_n(x, y) = \sum_{0 \leqslant m \leqslant n} A_m^{(n)} x^{n-m} y^m. \tag{2.3}$$

特别地

$$F_2(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2). \tag{2.4}$$

要使

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt} \equiv 0,$$

即

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot X + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot Y = \left(\sum_{j=2}^{\infty} \frac{\partial F_j}{\partial x}\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{m} X_i\right) + \left(\sum_{j=2}^{\infty} \frac{\partial F_j}{\partial y}\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{m} Y_i\right)$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} \left[\sum_{\substack{i \geqslant 1, j \geqslant 2 \\ i+j=n+1}} \left(\frac{\partial F_j}{\partial x} \cdot X_i + \frac{\partial F_j}{\partial y} \cdot Y_i \right) \right].$$

令

$$f_n = \sum_{\substack{i \geqslant 1, j \geqslant 2 \\ i+j=n+1}} \left(\frac{\partial F_j}{\partial x} \cdot X_i + \frac{\partial F_j}{\partial y} \cdot Y_i \right), \tag{2.5}$$

现在,为了依次求出 F_3, F_4, F_5, $\cdots$, 令 $\dfrac{dF}{dt} \equiv 0$, 则依次使 $f_n = 0 (n = 2, 3, 4, \cdots)$,

即

$$-y\frac{\partial F_n}{\partial x} + x\frac{\partial F_n}{\partial y} = \sum_{\substack{i \geqslant 2, j \geqslant 2 \\ i+j=n+1}} \left(\frac{\partial F_j}{\partial x} \cdot X_i + \frac{\partial F_j}{\partial y} \cdot Y_i \right) = H_n. \tag{2.6}$$

对于 $n = 3, 4, \cdots$ 依次求解. 由 F_2 求出 F_3, 逐步求出 F_4, F_5, $\cdots$.

$$-y\frac{\partial F_n}{\partial x} + x\frac{\partial F_n}{\partial y} = \sum_{0 \leqslant m \leqslant n} (n-m) A_m^n x^{n-m-1} y^{m+1} - \sum_{0 \leqslant m \leqslant n} m A_m^n x^{n-m+1} y^{m-1}$$

$$= \sum_{0 \leqslant m \leqslant n} B_m^n x^{n-m} y^m$$

系数矩阵可写成:

$$
\begin{bmatrix}
0 & -1 & & & & \\
n & 0 & -2 & & & \\
 & n-1 & 0 & \ddots & & \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & & & \ddots & \ddots & -(n-1) \\
 & & & 2 & 0 & -n \\
 & & & & 1 & 0
\end{bmatrix}
\cdot
\begin{bmatrix} A_0^n \\ A_1^n \\ \vdots \\ A_n^n \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} B_0^n \\ B_1^n \\ \vdots \\ B_n^n \end{bmatrix}. \tag{2.7}
$$

令

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial F_n}{\partial y} &= A_1^n x^{n-1} + 2A_2^n x^{n-2}y + \cdots + nA_n^n y^{n-1} \\
&= C_0^n x^{n-1} + C_1^n x^{n-2}y + \cdots + C_{n-1}^n y^{n-1}, \\
\frac{\partial F_n}{\partial x} &= nA_0^n x^{n-1} + (n-1)A_1^n x^{n-2}y + \cdots + A_{n-1}^n y^{n-1} \\
&= C_n^n x^{n-1} + C_{n+1}^n x^{n-2}y + \cdots + C_{2n-1}^n y^{n-1},
\end{aligned}
$$

则系数 $C_m^n(0 \leqslant m \leqslant 2n-1)$ 可由 (2.7) 式求出.

需要指出,对于 $n=$ 奇数,方程 (2.6) 一定有解;对于 $n=$ 偶数,方程 (2.6) 只在 X_i、Y_i 中的参数满足一定的条件 V 时才有解.

我们进行公式推导的目的,就是在 (2.6) 式成立的情况下,给出 F_n,并求出在 n 为偶数的情形下方程有解的条件 V.

这里 $F(x, y)=\text{const}$, 在原点附近是封闭曲线族,它们可以作为求解运动稳定性的 Ляпунов 函数.

3. 一个典型例子

作为一个具体例子,我们求解了下述文字方程组

$$
\begin{cases}
\dfrac{dx}{dt} = y + X_2(x, y) = y - L_3x^2 - (2L_2 + L_5)xy + L_6y^2, \\[2mm]
\dfrac{dy}{dt} = -x + Y_2(x, y) = -x - L_2x^2 + (2L_3 + L_4)xy + L_2y^2.
\end{cases} \tag{3.1}
$$

机器推导的结果如表 1 所示.

现在要和 Н. Н. Баутин 的结果进行对比, Н. Н. Баутин 所用的方程为

$$
\begin{cases}
\dfrac{dx}{dt} = \lambda_1x - y - \lambda_3x^2 + (2\lambda_2 + \lambda_5)xy + \lambda_6y^2, \\[2mm]
\dfrac{dy}{dt} = x + \lambda_1y + \lambda_2x^2 + (2\lambda_3 + \lambda_4)xy - \lambda_2y^2.
\end{cases} \tag{3.2}
$$

当 $\lambda_1=0$ 时有中心焦点的判定问题,上式中以 $-y$ 代替 y 即为 (3.1).

Н. Н. Баутин 的结果与机器推导的结果,见表 2.

由表 2 看出, $\bar{V}_i$ 与 $\tilde{V}_i$ 应同号. 表中 $\bar{V}_3$ 与 $\tilde{V}_3$ 同号, $\bar{V}_5$ 与 $\tilde{V}_5$ 同号,但 $\bar{V}_7$ 与 $\tilde{V}_7$ 反号,因此二者符号必有一错.实际上 $\bar{V}_7$ 错了符号,应该加上一个负号.这一现象,最初是在特定的数值计算中发现的. 现在,我们从公式的机器推导中,用文字的推导将它揭示出来.这个符号的差别,联系到无限远的稳定性情况,可以相差一个极限环的存在性,因此,不能不加以改正.

表 1　机器推导的 V_3，V_5，V_7

V_3=															
−1/	3	·L1**	0	·L2**	0	·L3**	1	·L4**	0	·L5**	1	·L6**	0	·L7**	0
1/	3	·L1**	0	·L2**	0	·L3**	0	·L4**	0	·L5**	1	·L6**	1	·L7**	0
·X**0·Y**4															
V_5=															
1/	3	·L1**	0	·L2**	1	·L3**	2	·L4**	1	·L5**	0	·L6**	0	·L7**	0
1/	15	·L1**	0	·L2**	1	·L3**	1	·L4**	2	·L5**	0	·L6**	0	·L7**	0
−1/	15	·L1**	0	·L2**	1	·L3**	0	·L4**	2	·L5**	0	·L6**	1	·L7**	0
1/	3	·L1**	0	·L2**	1	·L3**	0	·L4**	1	·L5**	0	·L6**	2	·L7**	0
−2/	3	·L1**	0	·L2**	1	·L3**	1	·L4**	1	·L5**	0	·L6**	1	·L7**	0
·X**0·Y**6															
V_7=															
−2/	35	·L1**	0	·L2**	1	·L3**	1	·L4**	2	·L5**	0	·L6**	2	·L7**	0
−2/	175	·L1**	0	·L2**	1	·L3**	1	·L4**	3	·L5**	0	·L6**	1	·L7**	0
−2/	35	·L1**	0	·L2**	3	·L3**	1	·L4**	2	·L5**	0	·L6**	0	·L7**	0
2/	35	·L1**	0	·L2**	1	·L3**	0	·L4**	2	·L5**	0	·L6**	3	·L7**	0
2/	175	·L1**	0	·L2**	1	·L3**	0	·L4**	3	·L5**	0	·L6**	2	·L7**	0
2/	35	·L1**	0	·L2**	3	·L3**	0	·L4**	2	·L5**	0	·L6**	1	·L7**	0
·X**0·Y**8															

表 2

	H. H. Баутин 结果	机器推导结果
3	$\bar{V}_3 = -\frac{\pi}{4}\lambda_5(\lambda_3 - \lambda_6)$	$\tilde{V}_3 = -\frac{1}{3}L_5(L_3 - L_6)$
5	$\bar{V}_5 = \frac{\pi}{24}\lambda_2\lambda_4(\lambda_3 - \lambda_6)(\lambda_4 + 5\lambda_3 - 5\lambda_6)$	$\tilde{V}_5 = \frac{1}{15}L_2L_4(L_3 - L_6)(L_4 + 5L_3 - 5L_6)$
7	$\bar{V}_7 = \frac{25}{32}\pi\lambda_2\lambda_4(\lambda_3 - \lambda_6)^2(\lambda_3\lambda_6 - 2\lambda_6^2 - \lambda_2^2)$	$\tilde{V}_7 = -\frac{2}{7}L_2L_4(L_3 - L_6)^2(L_3L_6 - 2L_6^2 - L_2^2)$

在微分方程的研究工作中,有很多关键性的研究与判定需要大量的公式推导. 例如,在 Hilbert 第 16 问题中,为了研究极限环的个数,需要考虑从奇点跳出极限环的个数,而这个问题又与中心和焦点的判定相联系. 在研究运动稳定性的问题中,需要作出相应的 Ляпунов 函数,所有这些关键性的问题都需要进行极其复杂的公式推导. 虽然从原则上说,这些工作都有固定的方法可以遵循,但由于计算复杂,工作量大,所以具体化的结果却很少.

由此可见,原则上可行的途径,由于推导过于复杂,加上人手劳动出错的可能性极大,至使可能性长期没有转化为现实性. 大型高速电子计算机的出现,为将这种可能性转化为现实性开辟了道路.

利用 DEPS 系统,可以为有关的研究工作者(理论工作者和应用工作者)提供大量可资应用的公式.

4. DEPS 的特点

在微分方程理论研究方面,采用计算机进行公式推导,是计算机科学值得重视的一个研究方向.

DEPS 系统具有以下特点:

1. 采用 FORTRAN 语言作为系统设计的工具,这是一个大胆的尝试. 迄今为止,在国内外文献中尚没见到 FORTRAN 语言在非数值方面应用的报道. 在多次国际会议(例如, ICS 73) 曾就 FORTRAN 的未来展开热烈的争论. 毫无疑问,我们的工作有益于 FORTRAN 的进一步应用和推广. 对于大多数计算机厂家和习惯 FORTRAN 语言的广大用户来说,将引起他们的兴趣和注意.

2. 系统兼顾数值计算与非数值应用.

3. 扩大了数的取值范围和精确度.

4. 系统设计有独到之处,考虑到随机存贮项栈空间的忽涨忽落,采用一般的符号处理语言来设计还存在一定的困难,系统巧妙地运用了表加工技术.

5. DEPS 是一块结构程序系统,因此易于调试,易于扩充,易于移植.

在本文写作过程中,曾与曹东启同志进行了讨论,特此致谢.

参 考 文 献

[1] 吴文俊,初等几何判定问题与机械化证明,中国科学, 1977, 6.

[2] H. H. Баутин, Очисле предельных циклов, появляющихся при изменения коэффицинтов из состояния равновесия типа фокуса или центра. Матем сбор, **30**:72 (1952), 181—195.

NON-NUMERICAL APPLICATION OF FORTRAN

LIU ZUNQUAN
(*Institute of Applied Mathematics, Academia Sinica*)
QIN CHAOBIN
(*Institute of Mechanics, Academia Sinica*)

ABSTRACT

Mechanical deduction of formulas of differential equation by high-speed computer is a new field of computer sciences. It will modernize the means of research of mathematics.

This article describes the algorithm of the Differential Equation Program System (DEPS in abridged form). This system has been applied successfully to the research work of limit cycles.