# 托卡马克中等离子体平衡的数值计算

刘 新 萍

（中国科学院力学研究所）

**一. 引言** 环形等离子体的理想磁流体力学平衡的自由边界问题，Шафранов 等人做了研究[1-3]，但是仅给出 $a/R \ll 1$ 的圆截面等离子体柱平衡的分析结果．目前建造大型托卡马克装置时，要求纵横比 $a/R$ 比较大，并且要能够准确的求出等离子体的平衡位形．本文用超松弛法求解平衡方程，得到计算自由边界问题的磁面的方法．自由边界问题是非线性问题，计算中利用了限制器，并且讨论限制器和计算收敛性的关系．

**二. 基本方程和计算公式** 在 MKSA 单位制中，理想磁流体力学平衡的基本方程组：

$$\left.\begin{aligned}\nabla P &= \vec{j} \times \vec{B},\\ \nabla \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{j},\\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0,\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

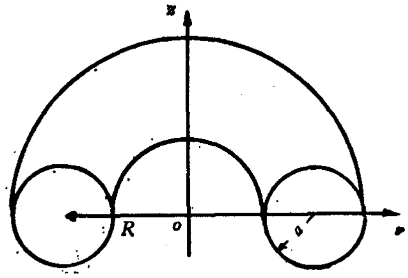


图 1 柱坐标 $r, \varphi, z$

轴对称环形系统中，采用柱面座标系，如：图 1 所示．引入角向磁场的流函数 $\psi$ 的定义：

$$\vec{B}_P = \frac{1}{2\pi r}[\nabla\psi \times \vec{e}_\varphi], \tag{2}$$

展开式（2）得到

$$B_r = -\frac{1}{2\pi r}\frac{\partial\psi}{\partial z}, \quad B_z = \frac{1}{2\pi r}\frac{\partial\psi}{\partial r}$$

代入式（1）得到平衡方程，当在等离子体边界内时，即 $\psi \geqslant \psi_{边}$，方程是

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = -2\pi\mu_0 r j_\varphi,\\ &j_\varphi = rA(\psi) + \frac{1}{r}B(\psi),\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

当在等离子体边界外，即 $\psi < \psi_{边}$ 时，方程是

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = 0, \tag{4}$$

其中：

$$A(\psi) = 2\pi\frac{dP}{d\psi}, \quad B(\psi) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{dI^2}{d\psi}.$$

在理想磁流体力学模型中，给不出 $A(\psi)$，$B(\psi)$ 的实际函数形式．本文假设 $A(\psi)$、$B(\psi)$

本文于 1977 年 10 月 30 日收到.

的函数形式

$$A'\left(\frac{\psi}{\psi_{边}}-1\right)^n = 2\pi\frac{dP}{d\psi}, \quad n=0,1,2,\cdots$$

$$B'\left(\frac{\psi}{\psi_{边}}-1\right)^m = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{dI^2}{d\psi}, \quad m=0,1,2,\cdots$$

其中，$A'=$ 常数，$B'=$ 常数.

计算边界上的流函数由全部电流产生，用以下载有单位电流线圈的流函数公式计算

$$\psi_0(r,z;R,\zeta) = 2\mu_0\sqrt{\frac{rR}{K^2}}\left[\left(1-\frac{K^2}{2}\right)\mathscr{K}-E\right] \tag{5}$$

其中：

$$K^2 = \frac{4Rr}{(R+r)^2+(z-\zeta)^2},$$

$$\mathscr{K} = \int_0^{\pi/2}\frac{d\beta}{\sqrt{1-K^2\sin^2\beta}}, \quad E = \int_0^{\pi/2}\sqrt{1-K^2\sin^2\beta}\,d\beta.$$

$\mathscr{K}$、$E$ 是完全椭圆积分，用多项式展开的近似公式计算.

**三. 计算法则** 用迭代方案：$L(\psi^{n+1}) = f(\psi^n, A^n, B^n)$ 求解. 在每次大迭代过程中，保持 $\beta_J=$ 常数，$I_\varphi=$ 常数. 其中：

$$\beta_J = \iint rA(\psi)ds/I_\varphi, \quad I_\varphi = \iint j_\varphi ds.$$

限制器与等离子体边界相切，给出 $\psi_{边}=$ 常数的值. 只有当垂直磁场场强的大小和等离子体环电流 $I_\varphi$ 及计算区的选取匹配适当时，限制器放到等离子体环的上面刚好能得到解. 一般情况下，很难做到匹配适当. 在计算过程中等离子体截面沿限制器向里或向外跑，必需再加一个限制器，如何加法？计算中发现：限制器加到等离子体环的内侧，迭代收敛. 限制器加到等离子体环的外侧，迭代不收敛. 下面用 $a/R\ll 1$ 的等离子体环平衡作例子，简略地说明原因. 在每次迭代中作用到等离子体环上的电磁力 $F_m = RI_\varphi B_\perp$. 假设在迭代中等离子体位形是平衡封闭的. 电磁力 $F_m$ 与等离子体柱向外的膨胀力

$$F_r = \frac{\mu_0 I_\varphi^2}{4\pi}\left(\ln\frac{8R}{a}-1\right)$$

相平衡，迭代方案收敛.

(1) 当限制器放到等离子体环内侧时，要求等离子体边界通过固定点 $(R_{限}, 0)$，$R_{限}$ 固定在环的内侧，此时 $a = R - R_{限}$. 在迭代过程中力 $F_m$ 和 $F_r$ 仅是 $r$ 的函数，其他量保持不变. 利用 $F_m = F_r$，得到

$$\frac{\mu_0 I_\varphi^2}{4\pi}\left(\ln\frac{8R}{R-R_{限}}-1\right) = RI_\varphi B_\perp \tag{6}$$

从式 (6) 可看出存在一个平衡的 $R_{平}$ 值，$R_{平} > R_{限}$.

若 $R = R_{平}$ 时，则 $F_r = F_m$.

若 $R > R_{平}$ 时，则 $F_r < F_m$.

若 $R < R_{平}$ 时，则 $F_r > F_m$.

因此，当等离子体柱向外跑时，由于 $F_r < F_m$，在以后的迭代中，$F_m$ 把等离子体柱向里

压，使 $R$ 接近 $R_{平}$. 当等离子体柱向里跑时，由于 $F_r > F_m$，在以后的迭代中，等离子体柱向外膨胀，使 $R$ 接近 $R_{平}$，所以计算收敛.

（2）当限制器放到等离子体环外侧时，$R_{限}$ 固定在环的外侧，此时 $a = R_{限} - R$. 同理，至少存在一个平衡的 $R_{平}$ 值，$R_{平} < R_{限}$.若 $R < R_{平}$ 时，则 $F_r < F_m$. 若 $R > R_{平}$ 时，则$F_r > F_m$. 因此，当流函数初始值使 $R$ 小于 $R_{平}$ 时，等离子体环膨胀力小于磁压缩力，等离子体环被压向里边，更远离 $R_{平}$，迭代不收敛. 当流函数初始值使 $R$ 大于 $R_{平}$ 时，等离子体环的膨胀力也大于磁压缩力，等离子体环继续膨胀，计算得不到解.

**四. 计算方法的应用**　利用上述方法计算了托卡马克装置中等离子体平衡的自由边界问题. 在图 2 中给出平衡磁场线圈系统和计算区域. 垂直磁场系统由上下对称的六个大线圈组成，线圈中的电流强度 9060 安培. 第 I 个线圈 24 匝，第 II 个线圈 48 匝，第 III 个线圈 24 匝. 计算边界内部划分成正方形网格的计算区. 在图 3 中给出计算区域内求得的磁面. 等离子体环电流强度是 $1.2 \times 10^6$ 安培，$\beta_I = 0.5$. 求出等离子体环横截面的半径 $a = 0.6$ 米，等离子体环的半径 $R = 1.76$ 米. 此外把加热场线圈系统和平衡场线圈系统同时做了自由边界问题计算，发现当杂散场小于 6 高斯时对平衡位形没有影响.

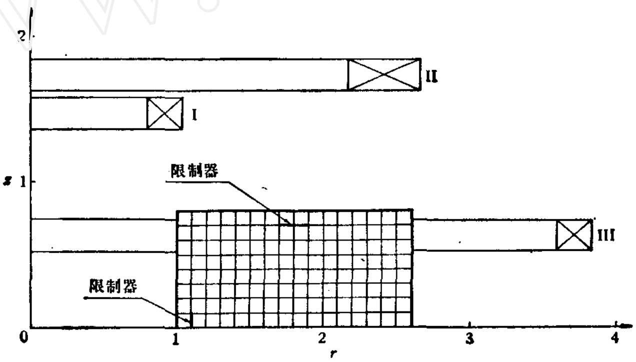


图 2　垂直磁场线圈系统和计算区

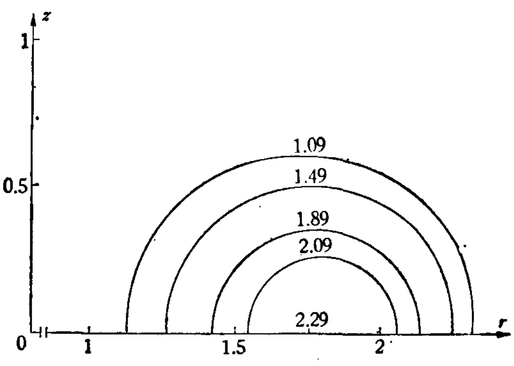


图 3　计算的磁面

## 参　考　文　献

[1]　Шафранов, В. Д., *ЖЭТФ*, **33** (1957), 710.
[2]　Шафранов, В. Д., *ЖЭТФ*, **37** (1959), 1088.

[3] Зуева, Н. М., Соловьев, Л. С., *Атомная Энергия*, **24** (1968), 453.
[4] Zakharov, L. E., *Nuclear Fusion*, **13** (1973), 544.
[5] Feneberc, W., Lackner, K., *Nuclear Fusion*, **13** (1973), 549.
[6] Suzuki, Y., *Nuclear Fusion*, **14** (1974), 345.
[7] Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables.

# NUMERICAL COMPUTATION FOR PLASMA EQUILIBRIUM IN TOKAMAK

Liu Xin-ping
*(Institute of Mechanics, Academia Sinica)*