广义 WKB 方法及其对浅水波问题的应用

陈　嗣　熊
（中国科学院力学研究所）

提要　本文首先指出 WKB 方法可适用于更广泛的一类方程，并把它应用于线性化浅水波方程．对浅水波焦散区的非线性情形，用广义 WKB 方法进行了讨论，把文献［4］的结果推广到一般弯曲焦散线的情形．

一、WKB 方法的推广应用

Keller[1] 提出，对线性波动方程

$$\nabla^2 u + k^2 n^2(\boldsymbol{r}) u = 0 \tag{1}$$

这里 $u = u(\boldsymbol{r})$ 为未知函数，$n(\boldsymbol{r})$ 是折射率，k 表示波数．当 $k \gg 1$ 时，可利用下列渐近展开式

$$u(\boldsymbol{r}) = e^{ikS(\boldsymbol{r})} \sum_{m=0}^{\infty} (ik)^{-m} u_m(\boldsymbol{r}) \tag{2}$$

将式（2）代入式（1），使 k 的同次幂的系数相等，可得

$$(\nabla S)^2 = n^2(\boldsymbol{r}) \tag{3}$$

$$2\nabla S \cdot \nabla u_0 + u_0 \nabla^2 S = 0 \tag{4}$$

$$2\nabla S \cdot \nabla u_m + u_m \nabla^2 S = -\nabla^2 u_{m-1}, \quad m \geqslant 1 \tag{5}$$

若在式（2）中取零级近似，则 $u_0(\boldsymbol{r})$ 即表示模而 $S(\boldsymbol{r})$ 表位相．我们可以把这种 WKB 方法推广应用于更广泛的一类方程．

对于以下形式的非线性波动方程

$$\nabla^2 u + a(x, y, u) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y, u) \frac{\partial u}{\partial y} + k^2 \left[n^2(\boldsymbol{r}) - i \frac{c}{\omega} g_1(x, y, u) \right] u = 0 \tag{6}$$

亦可用 WKB 方法来求解．这里 $k = \frac{\omega}{c} \gg 1$，$a(x, y, u)\, b(x, y, u)$，$g_1(x, y, u)$ 都与 k 无关．形如式（6）的方程在实际问题中常遇到．例如在含有激活介质的激光谐振腔中[2]遇到式（6）中 $a = b = 0$ 的方程，在浅水波问题中遇到式（6）中 $g_1(x, y, u) = 0$ 的方程．

类似式（2），令

$$u(\boldsymbol{r}) = u_0(\boldsymbol{r}) e^{ikS(\boldsymbol{r})} \tag{7}$$

代入式（6）．忽略含 $1/k$ 与 $1/k^2$ 的项，得

$$(\nabla S)^2 = n^2(\boldsymbol{r}) \tag{8}$$

本文 1979 年 6 月 4 日收到．

然后忽略含 $1/k$ 的项，得

$$2\nabla u_0\cdot\nabla S+u_0[\nabla^2 S-g_1]+a\frac{\partial S}{\partial x}u_0+b\frac{\partial S}{\partial y}u_0=0 \tag{9}$$

由式 (8) 可知，$a(x,y,u)$，$b(x,y,u)$，$g_1(x,y,u)$ 等函数并不影响几何光学近似中的位相因子 $S(\boldsymbol{r})$，但它们都影响式 (7) 中的振幅 $u_0(\boldsymbol{r})$.

用特征方法解式 (8)，得

$$\frac{d}{d\sigma}\left(n\frac{d\boldsymbol{r}}{d\sigma}\right)=\nabla n \tag{10}$$

$$S=S_0+\int_{\sigma_0}^{\sigma}n\,d\tau \tag{11}$$

这里 σ 是沿特征线（或称射线）的长度，$\boldsymbol{r}$ 是特征线上点的矢径. 由 (10) 在初始条件 $\boldsymbol{r}(\sigma_0)=\boldsymbol{r}_0$，$\frac{d\boldsymbol{r}(\sigma_0)}{d\sigma}=\dot{\boldsymbol{r}}_0$ 下，求出特征线的轨迹方程，然后由 (11) 求出特征线上的 $S=S(\sigma)$，代入式 (9) 得

$$u_0=u_0[\boldsymbol{r}(\sigma_0)]\exp\left\{-\int_{\sigma_0}^{\sigma}\frac{1}{2n}\left[\nabla^2 S-g_1+a\frac{\partial S}{\partial x}+b\frac{\partial S}{\partial y}\right]d\tau\right\} \tag{12}$$

当然，一般情况下 a，b，g_1 中都包含有 u_0，故式 (12) 是关于 u_0 的积分方程. 若 a，b，g_1 与 u 无关，则式 (12) 就是所求的解.

二、WKB 方法对线性化浅水波方程的应用

浅水波方程为

$$\eta_t+\nabla\cdot[(h+\eta)\boldsymbol{V}]=0 \tag{13}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t}+(\boldsymbol{V}\cdot\nabla)\boldsymbol{V}+g\nabla\eta=0 \tag{14}$$

这里 $\boldsymbol{V}=u\boldsymbol{i}+v\boldsymbol{j}$ 是质点的速度，η 是静止水平面上的波的高度，$h=h(x,y)$ 是水的深度，g 是重力加速度. 方程组 (13) (14) 是在 $\frac{h_0}{l}\ll 1$ 的条件下推得的，这里 h_0 与 l 分别是特征深度与水平面的特征长度.

若 u 与 v 皆为小量，则由 (14)，知 η 亦为小量，忽略二阶小量，则得线性化浅水波方程

$$\frac{1}{g}\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}-\frac{\partial}{\partial x}\left(h\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(h\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)=0 \tag{15}$$

令 $\eta(x,y,t)=\eta_0(x,y)e^{-i\omega t}$，则式 (15) 成

$$\frac{\partial^2\eta_0}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\eta_0}{\partial y^2}+\frac{hx}{h}\eta_{0x}+\frac{hy}{h}\eta_{0y}+\frac{\omega^2}{gh}\eta_0=0 \tag{16}$$

设特征深度为 h_0，特征长度 l，令 $\frac{\omega^2}{gh_0}=k^2$，$\frac{h}{h_0}=\bar{h}$，假定 $k\gg 1$，对式 (16) 用 WKB 方法求解. 因为式 (16) 是方程 (6) 的特例，故 Eiconal 方程的形式仍为式 (8)，而模可用式 (12) 求出 $\left(这时\ n=\frac{1}{\sqrt{h}},\ a(x,y)=\frac{h_x}{h},\ b(x,y)=\frac{h_y}{h}\right)$.

由于 Fermat 原理与方程组(10)等价[3]，故对方程(16)，可用 Fermat 原理求射线方程，即

$$\delta\int_{P_1}^{P_2}\frac{dS}{\sqrt{gh(\boldsymbol{r})}}=0 \tag{17}$$

现讨论特殊情形，即 $h=h(x)$，则由式(17)的 Eular 方程，得

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\sqrt{gh}}\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right]=0 \tag{18}$$

设初始条件为 $x=x_0$ 时，$y=y_0$，$y'=y'_0$，则由式(18)得

$$y'^2(1-c^2gh)=c^2gh \tag{19}$$

这里

$$c=\frac{y'_0}{\sqrt{gh(x_0)}\sqrt{1+y_0'^2}}$$

因此

$$y=y_0\pm\int_{x_0}^{x}\frac{|c|\sqrt{gh(x)}}{\sqrt{1-c^2gh(x)}}dx \tag{20}$$

这就是当 $h=h(x)$ 时的射线方程. 由式(19)、(20)可知，当 $x=x_0$ 时，对各种 y_0，在 y'_0 相同的情况下，射线(20)可能的包络线为

$$c^2gh(x)=1 \tag{21}$$

不可能有其他的包络线. 由式(19)知，在包络线上 $y'=\infty$，即包络线为平行于 y 轴的直线，其位置由式(21)决定. 射线不可能进入 $c^2gh(x)>1$ 的区域. 这种包络线就是所谓的焦散线，在这种区域平常的 WKB 方法不再成立，必须另用焦散线附近的渐近展开，才能使展开式一致有效.

对于一般情形 $h=h(x, y)$，也可由式(17)讨论它的射线与焦散线，此时的焦散线一般为曲线. 有了射线方程，然后由式(11)与(12)确定模.

三、焦散区的非线性焦散理论

当 u, v 为小量时，非线性浅水波方程(13)(14)可以简化成线性方程(15)，但对于焦散区，u, v 或 η 就可能不为小量. 例如，由式(4)可得

$$\nabla\cdot(u_0^2\nabla\phi)=0.$$

把此式用到一般的射线管，即得

$$\frac{u_0^2(\boldsymbol{r}_1)}{u_0^2(\boldsymbol{r}_2)}=\frac{\Delta\sigma_2}{\Delta\sigma_1} \tag{22}$$

这个 $\eta\Delta\sigma_1$, $\Delta\sigma_2$ 分别为在 $\boldsymbol{r}_1$ 处与 $\boldsymbol{r}_2$ 处射线管的横截面积. 式(22)说明了振幅平方与射线管横截面积成反比，故在焦散线附近振幅可以达到很大的值，从而引起非线性效应. 例如，在 $h=h(x)$ 的情形，虽然在焦散区外 u, v, η 均为小量，但在焦散区 v 与 η 就可能不是小量. 故我们直接由方程组(13)(14)来讨论焦散区的特性.

设直角坐标用 x_1, y_1 表示，焦散线在直角坐标系下的方程为 $y_1=f(x_1)$，令

$$x_1 = t + \frac{f'(t)}{\sqrt{1+f'^2(t)}} x \tag{23}$$

$$y_1 = f(t) - \frac{x}{\sqrt{1+f'^2(t)}} \tag{24}$$

且

$$y = \int_{t_0}^{t} \sqrt{1+f'^2(t)}\, dt \tag{25}$$

则坐标变换 (23)—(25) 表示直角坐标 x_1, y_1 至正交曲线坐标 x, y 的变换. 其中 t 为中间参数，t_0 为某常数. 显然，x 表示沿焦散线法线方向的长度，y 表示焦散线上的弧长，x 方向表示沿焦散线上对应点的法线方向，y 方向表示焦散线上对应点的切线方向. 曲线坐标 x, y 的 Lame 系数分别为 $H_1 = 1$, $H_2 = 1 + Kx$. 这里 K 为焦散线上对应点的曲率. 显然，K 仅为 y 的函数，即 $K = K(y)$. 方程组 (13) (14) 在正交曲线坐标 x, y 下的方程为(不失一般性，我们省略了常数 g):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{v}{1+Kx}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{K}{1+Kx}v^2 = -\frac{\partial \eta}{\partial x}. \tag{26}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{v}{1+Kx}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{K}{1+Kx}uv = -\frac{1}{1+Kx}\frac{\partial \eta}{\partial y} \tag{27}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{1}{1+Kx}\frac{\partial}{\partial x}[(1+Kx)(h+\eta)u] + \frac{1}{1+Kx}\frac{\partial}{\partial y}[(h+\eta)v] = 0 \tag{28}$$

这里 u, v 分别表示沿 x, y 方向的速度分量，而 h 通过变换 (23)—(25) 为 $h = h(x, y)$.

对于焦散区外边的线性化解，仍可由 (8) (9) 求得，但其中的 x, y 应改为 x_1, y_1. 把求得的沿射线的解 $a = a(x_1y_1)$ 与 $u_0 = u_0(x_1y_1)$，用变换 (23)—(25) 代入即得焦散区外的线性化解.

在焦散线附近，考虑到波沿 y 方向传播，而在 x 方向有变化，故 u, v, η 都是 x 与位相 α 的函数. 而位相 α 是 y, t 的函数，与 x 仅有微弱的关系. 同时注意到在焦散区 $u \ll 1$，故我们可作以下形式的广义 WKB 展开:

$$\left.\begin{aligned} u &= k^{\beta}U(\alpha, X) \\ v &= V(\alpha, X) \\ \eta &= H(\alpha, X) \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

这里

$$\left.\begin{aligned} &\alpha = k\theta, && X = k^{\alpha_0}x, \\ &\theta = \theta(\sigma, y, t) && \sigma = k^{\gamma}x \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

α_0, β, γ 都为待定常数，k 是波数，满足 $kl \gg 1$，将 (29) (30) 代入 (26)，得

$$k^{\beta+1}U_\alpha\theta_t + k^{2\beta+\alpha_0}UU_X + k^{2\beta+1+\gamma}UU_\alpha\theta_\sigma + k^{\beta+1}\frac{VU_\alpha\theta_y}{1+KXk^{-\alpha_0}}$$

$$-\frac{K}{1+KXk^{-\alpha_0}}V^2 + k^{\alpha_0}H_X + k^{\gamma+1}H_\alpha\theta_\sigma = 0 \tag{31}$$

考虑到 $u\dfrac{\partial u}{\partial x}$ 所对应的项与其他各项相比，应为小量，故应有

$$\beta + 1 = \alpha_0 = \gamma + 1 > 2\beta + \alpha_0 = 2\beta + 1 + \gamma \tag{32}$$

注意到 $K = O(1)$，因此对应于含 V^2 的项应保留，故令

$$\beta = -1 \tag{33}$$

代入 (32) 得

$$\left.\begin{aligned}\alpha_0 &= 0\\ \gamma &= -1.\end{aligned}\right\} \tag{33'}$$

将 (33) (33′) 代入方程 (31)，并令 $k^{-1} = \varepsilon$，则得

$$\left(\theta_t + \frac{V\theta_y}{1+KX}\right)U_\alpha + H_X + H_\alpha\theta_\sigma - \frac{K}{1+Kx}V^2 = -\varepsilon^2 U(U_X + U_\alpha\theta_\sigma) \tag{34}$$

同理将 (29) (30) 与 (33) 代入方程 (27) 与 (28)，经整理后得

$$\frac{\theta_y}{1+Kx}H_\alpha + \left(\theta_t + \frac{V\theta_y}{1+Kx}\right)V_\alpha = -\varepsilon^2 U\left(V_X + V_\alpha\theta_\sigma + \frac{K}{1+Kx}V\right) \tag{35}$$

$$\begin{aligned}\left(\theta_t + \frac{V\theta_y}{1+Kx}\right)H_\alpha + \frac{(H+h)\theta_y}{1+Kx}V_\alpha = -\varepsilon^2\Big\{&[(H+h)U]_X + [(H+h)U]_\alpha\theta_\sigma\\ &+ \frac{K}{1+Kx}(h+H)U\Big\} - \varepsilon\frac{h_yV}{1+Kx}\end{aligned} \tag{36}$$

在式 (9)—(11) 中，令 $g_1 = 0$，$a = \frac{h_x}{h}$，$b = \frac{h_y}{h}$，$n = \frac{1}{\sqrt{h}}$，则得线性化方程 (16) 的解．由 (9) 得

$$2\nabla \ln u_0 \cdot \nabla s = -\nabla^2 s - \frac{1}{h}\nabla h \cdot \Delta s$$

将 s 的表达式 (11) 代入，得

$$2n\frac{d\ln u_0}{d\sigma} = -\nabla\cdot(n\boldsymbol{\sigma}) - n\frac{d\ln h}{d\sigma} \tag{37}$$

这里 $\boldsymbol{\sigma}$ 为沿射线切线方向的单位矢量．若采用由 (23)—(25) 确定的正交曲线坐标 x，y．并设 $\boldsymbol{\sigma}$ 沿焦散线方向，也即沿 y 方向，则式 (37) 为

$$2n\frac{d\ln u_0}{dy} = -\frac{dn}{dy} - n\frac{d\ln h}{dy} \tag{38}$$

注意到 $n = \frac{1}{\sqrt{h}}$，且在焦散线上 u_0 达极大值，故由 (38) 知，沿焦散线必有

$$\frac{dh}{dy} = 0 \tag{39}$$

当然，严格说来在焦散线附近 (9)—(11) 不再成立，故式 (39) 只是一种近似．将 (39) 代入 (36)，得

$$\begin{aligned}\left(\theta_t + \frac{V\theta_y}{1+Kx}\right)H_\alpha + \frac{(H+h)\theta_y}{1+Kx}V_\alpha = -\varepsilon^2\Big\{&[(H+h)U]_X + [(H+h)U]_\alpha\theta_\sigma\\ &+ \frac{K}{1+Kx}(h+H)U\Big\}\end{aligned} \tag{40}$$

方程组 (34) (35) (40) 就是我们求得的焦散区的方程组．这样，我们把文献 [4] 的方程 (15) (16) 推广至一般焦散线的情形．类似于文献 [4] 的讨论，可对方程组 (34) (35) (40) 进行类似的讨论．

(35) (40) 的右边是小量，故左边 H_α，V_α 的系数行列式应为零，得

$$\theta_t + \frac{V\theta_y}{1+Kx} = \pm \frac{\theta_y}{1+Kx}\sqrt{H+h} \tag{41}$$

令 $a = (H+h)^{\frac{1}{2}}$ 则在特征线上

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{1+Kx}[V \mp a] \tag{42}$$

有 $\theta = \text{const}$. 方程(42)中V与a都是θ, X的函数. 假定当 $X=0$, $y=0$ 时, 位相 $\theta = t$, 则由(42)得

$$y + x\int_0^y K(y)dy = (V \mp a)(t-\theta) \tag{43}$$

当 $V(\theta, X)$ 与 $H(\theta, X)$ 确定后,即可由式(43)求出函数 $\theta = \theta(\varepsilon, X, y, t)$.

将式(41)代入式(35),忽略 ε^2 项,并注意到 h 与 θ 无关,得 $(2a \pm V)_\alpha = 0$

因此

$$2a \pm V = G(X) \tag{44}$$

这里 $G(X)$ 可由焦散区的外边缘条件决定. (34)中忽略 ε^2 项,并把(41)代入,得

$$\pm \frac{\theta_y a}{1+Kx}U_\alpha + H_X + H_\alpha\theta_\sigma - \frac{K}{1+Kx}V^2 = 0 \tag{45}$$

方程组(35)(40)左边系数行列式为零,故右边应满足相容性条件,利用(41)式得

$$\mp aUV_X + [(H+h)U]_X + \theta_\sigma(2UH_\alpha + a^2U_\alpha) \mp \frac{KaUV}{1+Kx} + \frac{Ka^2U}{1+Kx} = 0 \tag{46}$$

由方程组(43)—(46),即可确定 U, V, H 与 θ. 若波沿 y 的负方向传播,则方程组中的正负号都取上边的符号,反之,则取下边的符号. 这样,我们把文献[4]的结果推广到了一般弯曲焦散线的情形.

参 考 文 献

[1] Keller, J. B., *Proc. Symp. Appl. Math.*, **8** (1958), 27—52.

[2] 陈嗣熊,中国科学 1979 年,第 4 期, 413—421 页.

[3] Whitham, G. B., "Linear and nonlinear waves", John Wiley & Sons, (1974), 249.

[4] Bobbitt, J. I. and Cumberbatch, E., Stud. *Appl. Math.*, **55**, 3 (1976), 239—247.

GENERALIZED WKB METHOD AND APPLICATION TO PROBLEMS OF SHALLOW WATER WAVE

Chen Si-xiong

(Institute of Mechanics, Academia Sinica)

Abstract

It is pointed out that the WKB method can be applied to a wider kind of partial differential equations. The method is applied to linearized shallow water wave equations. The caustic region of nonlinear shallow water wave is discussed by generalized WKB method. Results in reference [4] are extended to the case of general curved caustics.