论旋转液体星的稳定

徐硕昌

(中国科学院力学研究所)

摘　　要

本文应用文献[1]中的方法,证明了旋转液体星(作为自吸引、不可压粘性液体处理)由所有振动本征模决定的稳定临界和长期稳定临界是一致的. 同时,以 Columbus 问题作为这个结论的实验依据[2]. 这是 Thomson 和 Tait 在 1883 年预见而没有证明的重要结论. 由此可以重新肯定旋转液体星准稳态演化过程必须按长期稳定临界判断; 而对于近三十年来被否定的 Jeans-Darwin 双星分裂理论, 必须重新进行评价.

旋转液体星的平衡与稳定问题是一个经典课题. 早期研究的总结见 Jeans[3] 和 Lamb[4] 的著作. 后来, Lyttleton[5], Ledoux[6,7], Chandrasekhar[8] 和荒木俊马[9]等相继作了综述. 50 年代以前, 老一辈研究者都相信"长期稳定是实用的稳定","是天体演化学唯一感兴趣的稳定"(文献[3] § 182, 文献[4] § 205). 基于这种观点发展起来的 Jeans-Darwin 双星分裂理论为天文界所普遍接受[10].

1953 年, Lyttleton 认为 Jeans 在论述长期稳定和动力稳定关系中存在原则性错误[5]. 此后,有人按动力稳定演化过程来寻求双星分裂过程[11,12]. 当前,双星分裂说处于众说纷纭没有定论的状态[9—14]. 争论焦点之一是,旋转液体星准稳态演化过程倒底应按那一种稳定性判断?

早在 1883 年, Thomson 和 Tait 预言在粘性影响下, 旋转系统稳定与否取决总势能取极小[15]. 由于没有证明, 人们有理由怀疑: 出现长期不稳定是否会必然出现扰动随时间指数而增长? 对于 Maclaurin 椭球在小粘性假设下得到了肯定的结论[16]. 普遍结论尚没有证明. 本文应用非自伴算子变分方法[1]证明了普遍结论, 同时建立了长期不稳定和扰动随时间指数增长的关系.

关于旋转液体星长期稳定和动力稳定这场争论和关于阻力的"D'Alenbert 疑难"之争极其相似. 不考虑粘性时, 相应于 Coriolis 力稳定作用的动力稳定是虚假的, 考虑粘性才能符合实际。Columbus 问题就是这一结论的实验依据. 运用"涡丝稳定概念"可以解释粘性和 Coriolis 力相互作用的实质。

一、旋转液体星的稳定理论

1. 旋转液体星的数学模型

假设液体星由不可压粘性液体组成,以角速度 Ω_0 作整体旋转. 我们仅考虑其在自身引力

本文 1980 年 1 月 25 日收到。

场作用下平衡状态的稳定．假设液体星以外区域是真空，星的密度分布可以不均匀．假设 V 为液体星所占据的体积，S 为边界．

液体星平衡状态满足：

$$\rho_0\nabla\left\{\mathscr{B}_0+\frac{1}{2}|\boldsymbol{\Omega}_0\times\boldsymbol{x}|^2\right\}=\nabla P_0, \tag{1}$$

$$\mathscr{B}_0=G\iiint\limits_V\frac{\rho_0(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}d\boldsymbol{x}' \tag{2}$$

$$\text{在 } S \text{ 上} \qquad P_0=0, \tag{3}$$

其中 ρ_0, P_0, $\mathscr{B}_0$ 分别为液体星的密度、压力和引力势，$\boldsymbol{x}$ 为矢径，G 为引力常数．设势函数 $U=\mathscr{B}_0+\frac{1}{2}|\boldsymbol{\Omega}_0\times\boldsymbol{x}|^2$，平衡条件要求等压面 $P_0=$ 常数，等势面 $U=$ 常数和等密度面 $\rho_0=$ 常数三者重合．

旋转液体星平衡位形，由求解 (1)—(3) 式得到．许多专著论述了这个课题[1,2,8,17—23]．最近总结见文献[23]．

2. 小扰动方程和本征值问题

1. 按照粘性流体稳定理论来处理旋转液体星的稳定[24]，参考系取以 $\boldsymbol{\Omega}_0$ 作角速度的均匀旋转坐标系．假设扰动位移矢量为 $\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x},t)$，则液体星物理量的欧拉变化可表述为：

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x},t)=\frac{\partial\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x},t)}{\partial t}, \qquad \rho(\boldsymbol{x},t)=\rho_0(\boldsymbol{x})+\tilde{\rho}(\boldsymbol{x},t),\\&P(\boldsymbol{x},t)=P_0(\boldsymbol{x})+\tilde{P}(\boldsymbol{x},t),\ \mathscr{B}(\boldsymbol{x},t)=\mathscr{B}_0(\boldsymbol{x})+\tilde{\mathscr{B}}(\boldsymbol{x},t),\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

其中带下标 0 的为平衡值，带“～”号的为小扰动量．旋转液体星小扰动方程为：

$$\begin{aligned}\rho_0\frac{\partial^2\boldsymbol{\xi}}{\partial t^2}+2\rho_0\boldsymbol{\Omega}_0\times\frac{\partial\boldsymbol{\xi}}{\partial t}-\mu\nabla^2\left(\frac{\partial\boldsymbol{\xi}}{\partial t}\right)&=-\nabla\tilde{P}-\nabla\cdot(\rho_0\boldsymbol{\xi})\frac{\nabla P_0}{\rho_0}\\&\quad+\rho_0\nabla_{\boldsymbol{x}}\left\{\iiint\limits_V G\rho_0(\boldsymbol{x}')(\boldsymbol{\xi}\cdot\nabla)_{\boldsymbol{x}'}\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}d\boldsymbol{x}\right\},\end{aligned} \tag{5}$$

$$\nabla\cdot\left(\frac{\partial\boldsymbol{\xi}}{\partial t}\right)=0. \tag{6}$$

扰动边界条件：在 S 上满足

$$[\tilde{P}+(\boldsymbol{\xi}\cdot\nabla)P_0]\cdot n_i-\mu\left[\frac{\partial^2\xi_i}{\partial x_j\partial t}+\frac{\partial^2\xi_j}{\partial x_i\partial t}\right]\cdot n_j=0. \tag{7}$$

2. 假设

$$\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x},t)=\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x})e^{\sigma t}, \tag{8}$$

其余扰动量用 $\boldsymbol{\xi}$ 表示，由此导出 σ 的本征值问题．然后按文献[1] 的非自伴算子变分方法处理．

$$\begin{cases}\rho_0\sigma^2\boldsymbol{\xi}+\sigma[2\rho_0\boldsymbol{\Omega}_0\times\boldsymbol{\xi}-\mu\nabla^2\boldsymbol{\xi}]=-\nabla\tilde{P}(\boldsymbol{\xi})-\dfrac{(\boldsymbol{\xi}\cdot\nabla)\rho_0}{\rho_0}\nabla P_0\\ \qquad+\rho_0\nabla_{\boldsymbol{x}}\left\{\iiint\limits_V G\rho_0(\boldsymbol{x}')(\boldsymbol{\xi}\cdot\nabla)_{\boldsymbol{x}'}\dfrac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}d\boldsymbol{x}'\right\}, & (9)\\ \nabla\cdot\boldsymbol{\xi}=0, & (10)\\ \text{在 } S \text{ 上}, \quad [\tilde{P}(\boldsymbol{\xi})+(\boldsymbol{\xi}\cdot\nabla)P_0]n_i-\sigma\mu\left[\dfrac{\partial\xi_i}{\partial x_j}+\dfrac{\partial\xi_j}{\partial x_i}\right]\cdot n_j=0. & (11)\end{cases}$$

由 (9)—(10) 式构成的本征值问题记为 A，如果 $\sigma, \boldsymbol{\xi}, \tilde{P}(\boldsymbol{\xi})$ 是 A 的解，则 $\sigma^*, \boldsymbol{\xi}^*, \tilde{P}^*(\boldsymbol{\xi})$ 亦是解。

本征值问题 A 的伴随本征值问题 A^+ 为：

$$\begin{cases} \rho_0\omega^2\boldsymbol{\eta} - \omega[2\rho_0\boldsymbol{\Omega}_0 \times \boldsymbol{\eta} + \mu\nabla^2\boldsymbol{\eta}] = -\nabla\tilde{P}(\boldsymbol{\eta}) - \dfrac{(\boldsymbol{\eta}\cdot\nabla)\rho_0}{\rho_0}\nabla P_0 \\ \qquad\qquad + \rho_0\nabla_x\left\{\iiint\limits_V G\rho_0(\boldsymbol{x}')(\boldsymbol{\eta}\cdot\nabla)_{x'}\dfrac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}d\boldsymbol{x}'\right\}, & (12) \\ \nabla\cdot\boldsymbol{\eta} = 0, & (13) \\ \text{在 } S \text{ 上}, \quad [\tilde{P}(\boldsymbol{\eta}) + (\boldsymbol{\eta}\cdot\nabla)P_0]\cdot n_i - \omega\mu\left(\dfrac{\partial\eta_i}{\partial x_j} + \dfrac{\partial\eta_j}{\partial x_i}\right)\cdot n_j = 0. & (14) \end{cases}$$

如果 $\omega, \boldsymbol{\eta}, P(\boldsymbol{\eta})$ 是 A^+ 的解，则 $\omega^*, \boldsymbol{\eta}^*, \tilde{P}^*(\boldsymbol{\eta})$ 也是解。两个本征值问题具有明确的物理意义：如果 A 对应右旋情形，则 A^+ 对应左旋情形。

3. 变分方程和变分原理的证明

1. 按照和文献[1]相同的方式，可以证明本征值问题 A 和伴随本征值问题 A^+ 具有相同的本征值序列，即 $\sigma_i = \omega_i$。类似文献[1]，以 A^+ 的解 $\boldsymbol{\eta}$（对应本征值为 σ）标乘方程(9)两边，再对体积 V 积分，利用 (10)，(11)，(13) 经分部积分后可导得变分方程：

$$\sigma(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) = \frac{1}{I(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})}\left\{-\left[\Psi(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) + \frac{\Phi(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})}{2}\right] \pm \sqrt{\left[\Psi(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) + \frac{\Phi(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})}{2}\right]^2 - I(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})\cdot\delta^2U(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})}\right\}, \tag{15}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} I(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) &= \iiint\limits_V \rho_0\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\eta}d\boldsymbol{x}, \\ \Psi(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) &= \iiint\limits_V \rho_0(\boldsymbol{\Omega}_0\times\boldsymbol{\xi})\cdot\boldsymbol{\eta}d\boldsymbol{x}, \\ \Phi(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) &= \iiint\limits_V \frac{\mu}{2}\left(\frac{\partial\xi_i}{\partial x_j} + \frac{\partial\xi_j}{\partial x_i}\right)\cdot\left(\frac{\partial\eta_i}{\partial x_j} + \frac{\partial\eta_j}{\partial x_i}\right)d\boldsymbol{x}, \\ \delta^2U(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) &= \iiint\limits_V \boldsymbol{\eta}\cdot T\boldsymbol{\xi}d\boldsymbol{x} \\ &= -\iint\limits_S \frac{dP_0}{dn}\eta_n\cdot\xi_n ds + \iiint\limits_V \frac{\frac{d\rho_0}{dU}\frac{dP_0}{dU}(\boldsymbol{\xi}\cdot\nabla)U(\boldsymbol{\eta}\cdot\nabla)U}{\rho_0}d\boldsymbol{x} \\ &\quad - \iiint\limits_V\iiint\limits_V G\rho_0(\boldsymbol{x})\rho_0(\boldsymbol{x}')(\boldsymbol{\eta}\cdot\nabla)_x(\boldsymbol{\xi}\cdot\nabla)_{x'}\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}d\boldsymbol{x}'d\boldsymbol{x}. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

这样，我们就将本征值问题 A 和 A^+ 变为泛函 $\sigma(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})$ 的变分问题。设 $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}$ 是在区域 V 上任意连续可微的函数，并满足附加条件 $\nabla\cdot\boldsymbol{\xi} = 0$，$\nabla\cdot\boldsymbol{\eta} = 0$，这样 $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}$ 的全体构成函数空间 M，则 $\sigma(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})$ 为定义在 M 上的泛函。

2. 设 $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}$ 的变分为 $\delta\boldsymbol{\xi}, \delta\boldsymbol{\eta}$ 满足 $\boldsymbol{\xi} + \delta\boldsymbol{\xi} \in M$，$\boldsymbol{\eta} + \delta\boldsymbol{\eta} \in M$；由泛函 $\sigma(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})$ 取极值条件导得：

$$-\{2\sigma I(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})+2\Psi(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})+\Phi(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})\}\delta\sigma$$

$$=\iiint_V\Big\{\rho_0\sigma^2\boldsymbol{\xi}+\sigma[2\rho_0\boldsymbol{\Omega}_0\times\boldsymbol{\xi}-\mu\nabla^2\boldsymbol{\xi}]+\nabla\tilde{P}(\boldsymbol{\xi})+\frac{(\boldsymbol{\xi}\cdot\nabla)\rho_0}{\rho_0}\nabla P_0$$

$$-\rho_0\nabla_{\boldsymbol{x}}\Big[\iiint_V G\rho_0(\boldsymbol{x}')(\boldsymbol{\xi}\cdot\nabla)_{\boldsymbol{x}'}\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}d\boldsymbol{x}'\Big]\Big\}\delta\boldsymbol{\eta}d\boldsymbol{x}$$

$$+\iint_s\Big\{-[\tilde{P}(\boldsymbol{\xi})+(\boldsymbol{\xi}\cdot\nabla)P_0]\cdot n_i+\sigma\mu\Big(\frac{\partial\xi_i}{\partial x_j}+\frac{\partial\xi_j}{\partial x_i}\Big)\cdot n_j\Big\}\delta\eta_i ds$$

$$+\iiint_V\Big\{\rho_0\sigma^2\boldsymbol{\eta}-\sigma[2\rho_0\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{\eta}+\mu\nabla^2\boldsymbol{\eta}]+\nabla\tilde{P}(\boldsymbol{\eta})+\frac{(\boldsymbol{\eta}\cdot\nabla)\rho_0}{\rho_0}\nabla P_0$$

$$-\rho_0G\nabla_{\boldsymbol{x}'}\Big[\iiint_V\rho_0(\boldsymbol{x}')(\boldsymbol{\eta}\cdot\nabla)_{\boldsymbol{x}'}\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}d'\boldsymbol{x}\Big]\Big\}\delta\boldsymbol{\xi}d\boldsymbol{x}$$

$$+\iint_s\Big\{-[\tilde{P}(\boldsymbol{\eta})+(\boldsymbol{\eta}\cdot\nabla)P_0]\cdot n_i+\sigma\mu\Big(\frac{\partial\eta_i}{\partial x_j}+\frac{\partial\eta_j}{\partial x_i}\Big)\cdot n_j\Big\}\delta\xi_i ds=0。\tag{17}$$

利用变分法基本引理(文献[25],卷 1,第四章，§3)由(17)式能得出结论：由泛函 $\sigma(\boldsymbol{\xi},\eta)$ 取极值条件能得到本征值问题 A 和 A^+ 的解；反之,问题 A 和 A^+ 的解使泛函 $\sigma(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})$ 取极值。这是一个非线性泛函的自然边界变分问题．变分方程(15)提供近似计算本征值和本征函数的变分基础,同时也是分析本征值实部符号的出发点.

4. 旋转液体星的稳定判据

在变分方程(15)中,以 $\boldsymbol{\xi}^*$ 代替 $\boldsymbol{\eta}$ 得到本征值积分关系式:

$$\sigma=\frac{1}{I}\Big\{-\Big(\Psi+\frac{\Phi}{2}\Big)\pm\sqrt{\Big(\Psi+\frac{\Phi}{2}\Big)^2-I\cdot\delta^2U}\Big\},\tag{18}$$

其中

$$I=I(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi}^*)=\iiint_V\rho_0\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\xi}^*d\boldsymbol{x},\tag{19}$$

$$\Psi=\Psi(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi}^*)=\iiint_V\rho_0(\boldsymbol{\Omega}_0\times\boldsymbol{\xi})\cdot\boldsymbol{\xi}^*d\boldsymbol{x},\tag{20}$$

$$\Phi=\Phi(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi}^*)=\iiint_V\frac{\mu}{2}\Big|\frac{\partial\xi_i}{\partial x_j}+\frac{\partial\xi_j}{\partial x_i}\Big|^2d\boldsymbol{x},\tag{21}$$

$$\delta^2U=\delta^2U(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi}^*)=\iiint_V\boldsymbol{\xi}^*T\boldsymbol{\xi}d\boldsymbol{x}$$

$$=-\iint_s\frac{\partial P_0}{\partial n}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\xi})^2ds+\iiint_V\iiint_V\frac{(\boldsymbol{\xi}\cdot\nabla)U(\boldsymbol{\xi}^*\cdot\nabla)U\dfrac{dP_0}{dU}\dfrac{d\rho_0}{dU}}{\rho_0}d\boldsymbol{x}$$

$$-\iiint_V\iiint_V G\rho_0(\boldsymbol{x})\rho_0(\boldsymbol{x}')(\boldsymbol{\xi}^*\cdot\nabla)_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{\xi}\cdot\nabla)_{\boldsymbol{x}'}\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}d\boldsymbol{x}d\boldsymbol{x}'。\tag{22}$$

类似文献[1],可以证明由变分方程 (15) 和 (18) 确定的本征值具有一、一对应的关系。

在方程 (18) 中的各项具有明确物理意义： I 表示扰动动能，2Ψ 形式上对应 Coriolis 力做功 ($\Psi^2\leqslant 0$)，$\Phi>0$ 是粘滞力耗散功，δ^2U 相应液体星总势能变化，这在下节中将具体证

明．根据(18)式，利用

引理 1. 设 $z = e + if(e > 0)$ 和任意实数 a，则

(1) $$\mathrm{Re}\{-z \pm \sqrt{z^2 - a^2}\} < 0, \tag{23}$$

(2) $$0 < \max\{\mathrm{Re}[-z \pm \sqrt{z^2 + a^2}]\} < a, \tag{24}$$

可以得到如下稳定判据：

定理 1. 如果对所有本征函数 $\boldsymbol{\xi}$ 满足

$$\delta^2 U(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}^*) = \iiint_V \boldsymbol{\xi}^* T \boldsymbol{\xi} d\boldsymbol{x} > 0, \tag{25}$$

则旋转液体星是稳定的．

证. 按粘性流体运动稳定理论规定，所有本征值实部小于零，运动是稳定的．用反证法，设存在某本征函数 $\boldsymbol{\xi}_k$，使 $\delta^2 U(\boldsymbol{\xi}_k, \boldsymbol{\xi}_k^*) < 0$，在引理 1 中可令 $e = \dfrac{\Phi(\boldsymbol{\xi}_k, \boldsymbol{\xi}_k^*)}{2} > 0$，

$$if = \Psi(\boldsymbol{\xi}_k, \boldsymbol{\xi}_k^*), \quad a^2 = -I(\boldsymbol{\xi}_k, \boldsymbol{\xi}_k^*) \cdot \delta^2 U(\boldsymbol{\xi}_k, \boldsymbol{\xi}_k^*) > 0$$

根据(24)式可知，相应的本征值满足 $\mathrm{Re}\,\sigma > 0$，这和稳定假设矛盾．

定理 2. 如果至少存在一个本征函数 $\boldsymbol{\xi}$，使

$$\delta^2 U(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}^*) = \iiint_V \boldsymbol{\xi}^* T \boldsymbol{\xi} < 0, \tag{26}$$

则旋转液体星是不稳定的．

综合定理 1 和定理 2 得到：

定理 3. 假设旋转液体星作为整体旋转的自吸引、不可压粘性液体处理，则其稳定临界条件是：

$$\delta^2 U(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}^*) = \iiint_V \boldsymbol{\xi}^* T \boldsymbol{\xi} d\boldsymbol{x} = 0. \tag{27}$$

二、长期稳定和动力稳定

1. $\delta^2 U$ 是总势能二次变分的证明

为了求出旋转液体星总势能的二次变分，我们考虑以下系统静平衡的稳定问题：它和旋转液体星具有相同有势力(引力势和离心力势)，除了不计粘滞力和 Coriolis 力外，其余条件相同。由(9)—(11)式得到决定此系统稳定的本征值问题：

$$\left.\begin{aligned}
&\rho_0 \sigma^2 \boldsymbol{\xi} = -\nabla \tilde{P} - \frac{(\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla)\rho_0}{\rho_0} \nabla P_0 + \rho_0 \nabla_{\boldsymbol{x}} \left\{ \iiint_V G \rho_0(\boldsymbol{x}')(\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla)_{\boldsymbol{x}'} \frac{1}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} d\boldsymbol{x} \right\}, \\
&\nabla \cdot \boldsymbol{\xi} = 0, \\
&\tilde{P}(\boldsymbol{\xi}) + (\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla) P_0 = 0, \qquad \text{在 } S \text{ 上}.
\end{aligned}\right\} \tag{28}$$

容易证明这是一个自伴本征值问题，对应的变分方程为：

$$\sigma^2 = -\frac{\delta^2 U(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}^*)}{I(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}^*)} = -\frac{\iiint \boldsymbol{\xi}^* T \boldsymbol{\xi} d\boldsymbol{x}}{\iiint_V \rho_0 \boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\xi}^* d\boldsymbol{x}}. \tag{29}$$

满足 Rayleigh 原理，所以此系统稳定充要条件是

$$\delta^2 U(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}^*) = \iiint_V \boldsymbol{\xi}^* T \boldsymbol{\xi} d\boldsymbol{x} > 0. \tag{30}$$

众所周知，有势力作用下的保守系统静平衡的稳定的充要条件是势能取极小值，故可知 $\delta^2 U$ 就是势能的二次变分。再根据定理 3 即得：

定理 4. 当旋转液体星作为整体旋转的自吸引、不可压粘滞液体处理，则由所有振动本征模决定的稳定临界和按总势能(引力势和离心力势)取极小的长期稳定临界是一致的.

2. 长期稳定和动力稳定的关系

旋转系统所以存在长期稳定和动力稳定的区别，是由于存在 Coriolis 力（或迴旋力）的缘故. 对静平衡系统，两者就完全一致.

对于旋转液体系统，Coriolis 力具有如下性质：

a. 在不考虑粘性影响时，Coriolis 力具有稳定作用. 事实上，由（18）式令 $\Phi = 0$ 得到：

$$\sigma = \frac{1}{I}\{-\Psi \pm \sqrt{\Psi^2 - I \cdot \delta^2 U}\}. \tag{31}$$

此时，稳定的充要条件是 $\Psi^2 - I \cdot \delta^2 U < 0$，$\delta^2 U > 0$，这只是稳定的充分条件(因为 $\Psi^2 \leqslant 0$). 在 $\frac{\Psi^2}{I} < \delta^2 U < 0$ 区域，Coriolis 具有稳定作用. 这是一个长期不稳定的，而是动力稳定的区域.

b. 在考虑粘性影响后，Coriolis 力对旋转系统就不起稳定作用，稳定临界条件取决于系统总势能取极小. 这个性质是定理 4 的直接推论.

c. 当液体系统绕其对称轴旋转，则对于轴对称扰动无论有没有粘性作用，Coriolis 力均不起稳定作用. 事实上，对于轴对称扰动，$\boldsymbol{\xi}(r, z) = (\xi_r(r, z), i\xi_r(r, z), \xi_z(r, z))$，易证此时满足 $\Psi = \iiint_V \rho_0(\boldsymbol{\Omega}_0 \times \boldsymbol{\xi}) \cdot \boldsymbol{\xi}^* d\boldsymbol{x} = 0$，即 Coriolis 力不起稳定作用.

根据 Coriolis 力上述性质容易得到 Lyttleton 列举的长期稳定和动力稳定的四项关系（文献[5] p. 22）. 他特别强调的两种稳定同时消失的情形，就对应 Coriolis 力稳定作用消失的情形. 这些关系都是非实质性的. 实际上，不考虑粘性，相应于 Coriolis 力稳定作用的动力稳定条件是虚假的，考虑粘性进行简正模分析就能将两种稳定概念统一起来.

3. 长期不稳定的性质

由于直接从总势能取极小只能得到长期稳定条件，得不到不稳定发展率. 因此，有人怀疑，出现长期不稳定是否必然出现小扰动随时间指数发展[16]？ 有些研究者认为只有动力不稳定是随时间指数发展，而长期不稳定是随时间线性增长，发展率依赖粘滞力的量级，随粘性消失而消失[5].

我们根据（18）式来计算长期不稳定发展率，利用引理 2.

引理 2. 设 $z = e + if (e > 0)$ 和 a 为任意实数，则

（1） 当 $f = 0$，$-z + \sqrt{z^2 + a^2} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + e^2} + e}$； (32)

$$(2)\quad 当\ e \ll 1,\ -z+\sqrt{z^2+a^2}=\begin{cases}\dfrac{a^2}{f^2-a^2}e+i(-f+\sqrt{f^2-a^2}), & 当\ a^2<f^2, \quad (33)\\ \sqrt{a^2-f^2}-if, & 当\ a^2>f^2, \quad (34)\\ \sqrt{\dfrac{e^2}{2}+\dfrac{1}{2}\sqrt{e^4+4e^2f^2}}-e-if, & 当\ a^2=f^2, \quad (35)\end{cases}$$

其中 $e=\dfrac{\Phi}{2I}$, $if=\dfrac{\Psi}{I}$, $a^2=-\dfrac{\delta^2U}{I}$.

首先，当 $\Psi=0$，即动力稳定和长期稳定同时消失的情形．利用(32)式得到：

$$\sigma=\sigma_r=\frac{-\dfrac{\delta^2U}{I}}{\sqrt{-\dfrac{\delta^2U}{I}+\dfrac{\Phi^2}{4I^2}}+\dfrac{\Phi}{2I}}>0. \tag{36}$$

此时不再是过稳定情形，即使存在粘性，小扰动也是按指数形式发展，粘性只是使不稳定发展率减小．这和以前的看法大不相同，长期不稳定也能出现按指数形式单调发展的情形．看来这是一种最危险的不稳定，只要 $\delta^2U<0$，小扰动随时间以

$$\exp\sigma_r t=\exp\left\{-\frac{\delta^2U}{I}t\Big/\left[\sqrt{-\frac{\delta^2U}{I}+\frac{\Phi^2}{4I^2}}+\frac{\Phi}{2I}\right]\right\}$$

的形式发展．在小粘性情形，粘性对不稳定发展率影响很小，近似有

$$\exp\sigma_r t=\exp\left\{t\sqrt{-\frac{\delta^2U}{I}}\right\},$$

它并不随粘性消失而消失．

当 $\Psi\neq0$，在小粘性情形即 $\Phi\ll1$，由(18)式并利用引理 2 可以得到：

$$\sigma=\sigma_r+i\sigma_i=\begin{cases}\dfrac{-\dfrac{1}{2}\Phi\cdot\delta^2U}{-\Psi^2+I\cdot\delta^2U}-\dfrac{\Psi}{I}+i\dfrac{\sqrt{-\Psi^2+I\cdot\delta^2U}}{I}, & 当\ -\Psi^2+I\cdot\delta^2U>0, \quad (37)\\ \dfrac{1}{I}\sqrt{\Psi^2-I\cdot\delta^2U}-\dfrac{\Psi}{I}, & 当\ -\Psi^2+I\cdot\delta^2U<0. \quad (38)\end{cases}$$

当 $0>\delta^2U>\dfrac{\Psi^2}{I}$，这个区域是长期不稳定的，而是动力稳定的．这时长期不稳定是一种过稳定情形，而不稳定发展率

$$\sigma_r=\frac{-\dfrac{1}{2}\Phi\cdot\delta^2U}{-\Psi^2+I\cdot\delta^2U}$$

依赖粘性的量级．当

$$\delta^2U<\frac{\Psi^2}{I}<0,$$

这个区域既出现长期不稳定，又出现动力不稳定，也是一种过稳定情形．在小粘性假设下的近似表达式(38)中，σ 与 Φ 无关，因此，不稳定发展率 σ_r 不依赖粘性大小，不随粘性消失而消失．

这里我们不仅给出各种情形下计算长期不稳定发展率的表达式，也澄清以前对长期不稳

定的一些错误看法.

4. 粘性不稳定作用的物理本质

在运动稳定性问题中，粘性有双重作用：一方面粘性具有通常衰减扰动的作用、另外，又和运动稳定因素相互作用间接起不稳定作用. 对于旋转液体系统，粘性使 Coriolis 力稳定作用消失，这种现象称为粘性的不稳定作用. 我们运用“涡丝稳定概念”来解释粘性和 Coriolis 力相互作用的物理本质.

根据 Taylor-Proudman 定理可知[26]：(1) 绕定轴整体旋转的液体系统具有涡量 $2\boldsymbol{\Omega}_0$，(2) 相对旋转参考系，正压(包括不可压)旋转液体系统的总涡量为 $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}+2\boldsymbol{\Omega}_0$，而且在运动过程中，涡管强度 $\iint_S(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}+2\boldsymbol{\Omega}_0)d\boldsymbol{s}$ 守恒(这里 S 是以任意封闭曲线所围绕的曲面)。从定理证明不难看出：$2\boldsymbol{\Omega}_0$ 涡量和 Coriolis 力相对应.

对于旋转液体星，未扰前具有均匀涡量 $2\boldsymbol{\Omega}_0$ 在扰动过程中涡量 $2\boldsymbol{\Omega}_0$ 始终保持不变。此时可以设想：流体微团像穿在涡丝上环绕涡丝以 $2\boldsymbol{\Omega}_0$ 角速度旋转的小球，整个系统可看为一串串穿在涡丝上的流体微团所组成. 流场涡量就象冻结在流体微团上一样，扰动始终保持不变。未扰前组成涡丝的微团，在扰动过程中仍构成涡丝，即组成涡丝的微团作为一串整体被扰动. 这时涡丝可类比磁冻结情形下的磁力线，具有限制扰动的稳定作用. 因此，Coriolis 力的稳定作用就是涡冻结的效应.

一旦考虑粘性后，涡冻结效应消失了，涡丝稳定作用也就不存在了，因而，Coriolis 力就不起稳定作用了.

5. 评长期稳定和动力稳定关系的争论

历史上出现这场近百年的争论，有双方面的原因. 一方面，由于处理动力稳定时，人为的忽略粘性得出不真实的临界稳定条件. 在流体运动稳定理论中已有事例表明，不考虑粘性会出现虚假的结果. 两平行板间流的稳定，在忽略粘性时流动总是稳定的，永远也不会出现层流的不稳定，只在考虑粘性才得出临界雷诺数. 这也是发生过一场长期争论的问题[24,27]. 这些争论和关于阻力的“D'Alembert 疑难”之争都极相似，只有考虑粘性才能符合实际.

另一方面，处理长期稳定时直接从总势能取极小，只能得出临界条件，给不出长期不稳定发展率. 致使旋转液体星准稳态演化过程被苛求处处稳定.

在考虑了粘性并用小扰动理论处理旋转液体星后，两种稳定概念就统一起来了，另外给出长期不稳定发展率赋予准稳态过程动力属性，使准稳演化过程免受处处稳定的苛求。

三、讨论与结论

1. 长期稳定是真实稳定的实验依据. 对旋转液体星无法直接实验模拟，但把天体情形的自引力场变换为均匀引力场就可进行实验. Columbus 问题恰好为此提供了实验依据，Kelvin 实验正验证了 Coriolis 力稳定作用是虚假的结论[2]. 将 Maclaurin 椭球和 Kelvin 实验的理论模型、本征方程和稳定条件比较一下就一目了然，参看表 1. Kelvin 实验和理论的一致结果恰是 Maclaurin 椭球长期稳定条件真实性的实验依据.

表 1 中 I, Ψ 由 (19), (20) 式给出，δ^2U, δ^2W_2 分别表示两种情形势能的二次变分。a 为赤道半径，c 为极半径，e 为偏心率.

表 1　旋转液体星和 Columbus 问题稳定条件的比较

		无粘性情形		粘性情形	
		动力稳定条件	动力不稳定条件	长期稳定条件	长期不稳定条件
旋转液体星	一般情形	$\Psi^2 - I\cdot\delta^2 U<0$	$\Psi^2 - I\cdot\delta^2 U>0$	$\delta^2 U>0$	$\delta^2 U<0$
	Maclaurin 椭球	$0<e<0.8127$ $0.8127<e<0.9125$	$0.9125<e<1$	$0<e<0.8127$	$0.8127<e<1$
Columbus 问题	一般情形	$\Psi^2 - I\cdot\delta^2 W_2<0$	$\Psi^2 - I\cdot\delta^2 W_2>0$	$\delta^2 W_2>0$	$\delta^2 W_2<0$
	迴转椭球型液体陀螺	$a>c$ $3a<c$	$a<c<3a$	$a>c$	$a<c$
	Kelvin 实验	—	—	$a>c$	$a<c$

2. 旋转液体星准稳态演化过程必须按长期稳定条件判断．本文证明的旋转液体星由所有振动本征模决定的稳定临界条件和长期稳定临界条件是一致的结论，从理论上证明 Coriolis 力的稳定作用是虚假的．引入“涡丝稳定概念”进一步从物理上解释了这一现象，最后还用 Kelvin 实验证明了这个结论．所以，我们可以重新肯定：旋转液体星准稳过程必须按长期稳定条件判断．

3. 对“Jeans-Darwin 双星分裂理论”必须重新评价．以前长期稳定条件直接从势能取极小得到，给不出不稳定发展率，使准稳演化过程被苛求处处稳定才能实现．正由于这个弱点，使其被否定[5]．建立了长期不稳定随时间指数增长的关系，赋予准稳过程以动力属性，只要长期不稳定特征时间大于过程演化特征时间，过程就能实现．基于这一观点，可重新讨论 Jeans-Darwin 双星分裂过程的现实性，并对其重作结论．

4. 本文结论同样适用于旋转磁星．对于旋转磁流体系统，作者得到和本文相同结论，Coriolis 力稳定作用是虚假的[28]．本文的方法和结论对于旋转磁星的应用，以后将专门讨论．

作者对谈镐生教授的指导和鼓励表示衷心的感谢．

参　考　文　献

[1] 徐硕昌，中国科学，1979，9，857—865．
[2] 徐硕昌，关于 Columbus 问题，力学学报（1980 年即将发表）．
[3] Jeans, J. H., *Astronomy and Cosmogong*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1929.
[4] Lamb, H., *Hydrodynamics*, 6th ed, Cambride Univ. press, Cambridge, 1929, Chap. XII.
[5] Lyttleton, R. A., *The Stability of Rotating Liquid Masses*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1953.
[6] Ledoux, P., *Handb. d Phys.*, **51**(1958), 605(LW).
[7] Ledoux, P., In *Star and Stellar System*, Vol 8, Stellar Structure (ed Aller, L. H. & Mclaughlin, D. B.), Chicago University of Chicago Press, 1965, 499.
[8] Chandraserkhar, S., *Elipsoidal Figures of Equlibrium*, Yale University Press, New York, 1969.
[9] 荒木俊马，现代天文事典，恒星社版，昭和 46 年．
[10] Struve, O., *Steller Evolution*, Princeton Univ. press, 1950, chap4.
[11] Ostriker, J. P., In *Steller Rotation* (ed Stettebak, A.), D. Reidel, Dordrecht, 1970.
[12] Lebovitz, M. R., *Mémoires De La Société Royale Des Sciences De Liége*, **VIII**(1975), 47—53.

[13] Roxburgh, Z. W., *ibed.*, **VIII**(1975), 15—24.
[14] Batten, A. H., *Binary and Systems of Stars*, Oxford Pergamon, 1973.
[15] Thomson, W. & Tait, P. G., *Treatise on Natural Philosophy*, 2d ed. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1912, §778.
[16] Roberts, P. H. & Stewartson, K., *A. P. J.*, **137**(1963), 977.
[17] Kopal, Z., *Astrophys. and space Scien.*, **24**(1973), 145—170.
[18] Аппель, П., *фигуры равновесия вращающейя однородной жидкости* (перев. с франк), ОНТИ, 1936,
[19] Poincaré, H., *Figures d'Equilibre d'une Masse Fluide*, Paris, 1902.
[20] Лихтенштейн, Л., *фигуры равновесия вращающейя жидкости* (перев. с немец.), «Наука», 1965.
[21] Jardetzky, W. S., *Theory of Fiqures of Celestrial Bodies Interscience*, New York, 1958.
[22] Kopal, Z, *Fiqures of Equilibrum of Celestrial Bodies Univ. of Wisconsin*, Madism, 1960,
[23] Антоов, В. А., *Астрон.*, **10**(1975), 7—60.
[24] Lin, C. C., *Theory of Hydrodynamics Stability*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1955.
[25] Courout, R., Hilbert, D., *Methods of Mathematical Physics*, Vol.1, Intersience Pub., New York, 1953.
[26] Chandrasekhar, S., *Hydrodynamics Stability and Hydromagnetic Stability*, Oxford Univ. Press, 1961.
[27] 谷一郎,粘性流体力学,上海科学技术出版社,1962.
[28] 徐硕昌,科学通报,**20**(1975),372—378.