

# 共焦不稳定光学谐振腔的解析解

刘建邦

(中国科学院力学研究所)

1980年1月16日收到

## 提 要

本文将 Kirchhoff-Fresnel 积分方程变换到 Fourier 空间, 求解后得到共焦不稳定腔解析形式的本征函数、本征值、共振条件与远场分布. 本文所得 Fourier 空间中的本征函数形式很简单, 可为进一步研究不稳定腔提供一个简便的出发点.

## 一、引 言

近年来, 不稳定光学谐振腔(以下简称不稳定腔)受到广泛的注意. 在气动、电激励、染料及固体激光器等方面, 不稳定腔已获得广泛的应用. 共焦腔是不稳定腔中一种重要形式, 它可以输出准直的激光束, 这对许多实际应用是很重要的. 不稳定腔的理论研究也得到了深入的发展, 但由于数学上的复杂性, 大多数理论研究都是采用数值解的方法. 关于不稳定腔的解析解, 最初, Siegman<sup>[1]</sup> 曾在理想球面波的假定下研究了不稳定腔的几何光学理论. 随后, Siegman 等<sup>[2]</sup> 在对称的光学结构的假定下, 对本征函数作展开并只保留第一项, 求得了对称不稳定腔的本征函数与本征值. Streifer<sup>[3]</sup> 则仍在对称光学结构的假定下, 保留了展开式的全部项, 他的结果比 Siegman 进了一步. 本文将 Kirchhoff-Fresnel 积分方程变换到 Fourier 空间, 求解后, 得到共焦不稳定腔解析形式的本征函数、本征值、共振条件与远场分布, 此结果与文献 [2—4] 的结果相符. 用此结果, 讨论了 Siegman<sup>[2]</sup> 结果的适用性.

## 二、共焦不稳定腔的解析解

不稳定共焦腔光学结构如图 1 所示(此外只画出了正支共焦不稳定腔, 但本文讨论并不限于正支共焦不稳定腔). 假定所用的反射镜都是“薄”反射镜, 即反射镜厚度为零, 它对光场的影响可用函数

$$p_i(x, y) = \exp\left(j \frac{(x^2 + y^2)}{R_i} k\right) \quad (1)$$

表示, 其中下标  $i = A, B$  代表 A 镜与 B 镜;  $x, y$  是反射镜所在平面上的坐标, 其原点在光

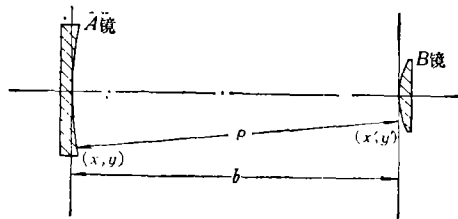


图 1 共焦不稳定腔的光学结构

轴上;  $R_i$  是镜  $i$  的曲率半径, 对凹反射镜  $R_i > 0$ , 对凸反射镜  $R_i < 0$ ;  $k = 2\pi/\lambda$ ,  $\lambda$  是光波长. 以下我们将使用“镜前”与“镜上”光场分布的概念. Siegman<sup>[2]</sup> 曾指出, 使用上述概念可使积分方程的解析推理更为简洁. 令镜  $i$  的镜前与镜上光场分布分别是  $v_i(x, y)$ 、 $v_{ia}(x, y)$ , 其中, 镜前光场分布  $v_i(x, y)$  是指光传播到镜  $i$  所在平面, 但还未受函数  $p_i(x, y)$  作用时的光场分布. 上述两种分布之间关系是

$$v_{ia}(x, y) = \exp\left(j \frac{x^2 + y^2}{2R_i} k\right) v_i(x, y). \quad (2)$$

假定一束光由  $A$  镜前出发, 先经  $A$  镜反射, 再传播至  $B$  镜, 经  $B$  镜反射后回到  $A$  镜前, 用 Kirchhoff-Fresnel 积分, 对于正方形反射镜可以得到积分方程

$$v_B(x', y') = \iint_{-\infty}^{+\infty} g(x' - x, y' - y) p_A(x, y) v_A(x, y) dx dy, \quad (3)$$

$$\gamma v_A(x'', y'') = \iint_{-\infty}^{+\infty} g(x'' - x', y'' - y') p_B(x', y') v_B(x', y') dx' dy', \quad (4)$$

其中

$$g(x' - x, y' - y) = j \frac{e^{-ik\rho}}{2\lambda\rho} \left(1 + \frac{b}{\rho}\right), \quad (5)$$

而

$$\rho = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + b^2} \quad (6)$$

是  $(x, y)$  点与  $(x', y')$  点间的距离,  $b$  是光轴上两反射镜间距. 在 (3), (4) 式中, 我们假定镜面边长为  $\infty$ . 对方程 (3), (4) 两端作 Fourier 变换, 并用记号

$$\mathcal{F}\{g(x, y)\} \equiv G(f_x, f_y), \quad \mathcal{F}\{v(x, y)\} \equiv V(f_x, f_y)$$

分别表示  $g(x, y)$ ,  $v(x, y)$  的 Fourier 变换<sup>[5]</sup>

$$\mathcal{F}\{h(x, y)\} \equiv H(f_x, f_y) \equiv \iint_{-\infty}^{+\infty} h(x, y) e^{-j2\pi(f_x x + f_y y)} dx dy, \quad (7)$$

Fourier 逆变换为

$$\mathcal{F}^{-1}\{H(f_x, f_y)\} \equiv h(x, y) \equiv \iint_{-\infty}^{+\infty} H(f_x, f_y) e^{j2\pi(f_x x + f_y y)} df_x df_y. \quad (8)$$

注意方程 (3), (4) 中等号右方的积分是卷积形式, 所以可以使用二维卷积定理<sup>[5]</sup>, 得到

$$V_B(f_x', f_y') = G(f_x', f_y') \mathcal{F}\{p_A(x, y) v_A(x, y)\}, \quad (9)$$

$$\gamma V_A(f_x'', f_y'') = G(f_x'', f_y'') \mathcal{F}\{p_B(x', y') v_B(x', y')\}, \quad (10)$$

其中

$$G(f_x, f_y) = \exp\left\{-j\left[kb - \frac{2b\pi^2}{k}(f_x^2 + f_y^2)\right]\right\}. \quad (11)$$

这里用了旁轴近似  $\sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{b^2}} \cong 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{b}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{y}{b}\right)^2$  及  $\frac{1}{\rho} \left(1 + \frac{b}{\rho}\right) \cong \frac{2}{b}$ .

这两个近似对大多数实用的不稳定腔来说是适用的. 由 Fourier 变换的性质<sup>[6]</sup> 可以求得

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{p_i(x, y) v_i(x, y)\} &= \iint_{-\infty}^{+\infty} V_i(f_x, f_y) \frac{|R_i| \pi}{k} \\ &\times \exp\left\{-j\left[\frac{R_i \pi^2}{k} [(f_x' - f_x)^2 + (f_y' - f_y)^2] \pm \frac{\pi}{2}\right]\right\} df_x df_y, \end{aligned} \quad (12)$$

其中  $\pm \frac{\pi}{2}$  项当  $R_i < 0$  时取  $+\frac{\pi}{2}$ , 当  $R_i > 0$  时取  $-\frac{\pi}{2}$ . 由 (11), (12), (9) 式可以得到

$$\mathcal{F}\{p_A(x, y)v_A(x, y)\} = \iint_{-\infty}^{+\infty} V_A(f_x, f_y) \frac{|R_A|\pi}{k} \times \exp\left\{-j\left[\frac{R_A\pi}{k}[(f_{x'} - f_x)^2 + (f_{y'} - f_y)^2] \pm \frac{\pi}{2}\right]\right\} df_x df_y, \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{p_B(x', y')v_B(x', y')\} &= \pi^2 \frac{|R_A||R_B|}{k^2} e^{-i(kb+\Delta)} \\ &\times \iiint_{-\infty}^{+\infty} V_A(f_x, f_y) \exp\left\{-j\frac{\pi^2}{k}(R_B - 2b + R_A)(f_x^2 + f_y^2)\right\} \\ &\times \exp\left\{j\frac{2\pi^2}{k}[(R_B f_{x''} + R_A f_x)f_{x'} + (R_B f_{y''} + R_A f_y)f_{y'}]\right\} \\ &\times \exp\left\{-j\frac{\pi^2}{k}[R_B(f_{x''}^2 + f_{y''}^2) + R_A(f_x^2 + f_y^2)]\right\} df_{x'} df_{y'} df_x df_y, \quad (14) \end{aligned}$$

其中

$$\Delta \equiv \begin{cases} +\pi & \text{当 } R_A < 0, R_B < 0 & \text{共焦不稳定腔中不存在这种情况;} \\ -\pi & \text{当 } R_A > 0, R_B > 0 & \text{相应于负支共焦不稳定腔;} \\ 0 & \text{当 } R_A, R_B \text{ 异号} & \text{相应于正支共焦不稳定腔.} \end{cases}$$

由共焦腔定义, 有

$$R_A + R_B = 2b, \quad (15)$$

所以

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{p_B(x', y')v_B(x', y')\} &= \pi^2 \frac{|R_A||R_B|}{k^2} e^{-i(kb+\Delta)} \\ &\times \iiint_{-\infty}^{+\infty} V_A(f_x, f_y) \exp\left\{j\frac{2\pi^2}{k}[(R_B f_{x''} + R_A f_x)f_{x'} + (R_B f_{y''} + R_A f_y)f_{y'}]\right\} \\ &\times \exp\left\{-j\frac{\pi^2}{k}[R_B(f_{x''}^2 + f_{y''}^2) + R_A(f_x^2 + f_y^2)]\right\} df_{x'} df_{y'} df_x df_y. \quad (16) \end{aligned}$$

如所周知, 从  $g_A g_B$  平面图<sup>[7]</sup>来看(其中  $g_A \equiv 1 - (b/R_A)$ ,  $g_B \equiv 1 - (b/R_B)$ )满足(15)式的共焦腔, 除  $(0, 0)$ ,  $(1, 1)$  两点是在稳定腔与不稳定腔边界上以外, 都在不稳定腔范围内, 所以本文涉及的基本上都是不稳定腔. 由(16)与(10)式可得

$$\begin{aligned} \gamma V_A(f_{x''}, f_{y''}) &= \exp\left\{-j\left[kb - \frac{2b\pi^2}{k}(f_{x''}^2 + f_{y''}^2)\right]\right\} \\ &\times \frac{\pi^2 |R_A||R_B|}{k^2} e^{-i(kb+\Delta)} \iiint_{-\infty}^{+\infty} V_A(f_x, f_y) \\ &\times \exp\left\{j\frac{2\pi^2}{k}[(R_B f_{x''} + R_A f_x)f_{x'} + (R_B f_{y''} + R_A f_y)f_{y'}]\right\} \\ &\times \exp\left\{-j\frac{\pi^2}{k}[R_B(f_{x''}^2 + f_{y''}^2) + R_A(f_x^2 + f_y^2)]\right\} df_{x'} df_{y'} df_x df_y. \quad (17) \end{aligned}$$

再次用共焦条件(15)式及  $\delta$  函数的积分形式

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{j\frac{2\pi^2}{k}[(R_B f_{x''} + R_A f_x)f_{x'} + (R_B f_{y''} + R_A f_y)f_{y'}]\right\} df_{x'} df_{y'}$$

$$= \frac{k^2}{\pi^2 |R_A|^2} \delta \left( \frac{R_B}{R_A} f_{x''} + f_x, \frac{R_B}{R_A} f_{y''} + f_y \right), \quad (18)$$

可得

$$\begin{aligned} \gamma V_A(f_{x''}, f_{y''}) \exp \left\{ -j \frac{\pi^2}{k} R_A (f_{x''}^2 + f_{y''}^2) \right\} &= \frac{|R_B|}{|R_A|} e^{-j(2bk+\Delta)} \\ &\times V_A \left( -\frac{R_B}{R_A} f_{x''}, -\frac{R_B}{R_A} f_{y''} \right) \\ &\times \exp \left\{ -j \frac{\pi^2}{k} R_A \left[ \left( -\frac{R_B}{R_A} f_{x''} \right)^2 + \left( -\frac{R_B}{R_A} f_{y''} \right)^2 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (19)$$

定义

$$W_A(f_{x''}, f_{y''}) = V_A(f_{x''}, f_{y''}) \exp \left\{ -j \frac{\pi^2}{k} R_A (f_{x''}^2 + f_{y''}^2) \right\}, \quad (20)$$

得

$$\gamma W_A(f_{x''}, f_{y''}) = \frac{|R_B|}{|R_A|} e^{-j(2bk+\Delta)} W_A \left( -\frac{R_B}{R_A} f_{x''}, -\frac{R_B}{R_A} f_{y''} \right). \quad (21)$$

方程(21)形式上与 Siegman<sup>[2]</sup>得到的方程很相似,但注意方程(21)是在 Fourier 频率  $f_{x''}f_{y''}$  空间中的方程.容易求得方程(21)的本征函数、本征值以及相应的共振条件是

1) 当  $R_A, R_B$  同号,此时  $R_B/R_A > 0$ , 相应于负支共焦不稳定腔.

本征值:

$$\gamma_{n,m} = \left| \frac{R_B}{R_A} \right|^{n+m+1} e^{-j[2bk-(n+m+1)\pi]}, \quad (22)$$

本征函数:

$$(W_A)_{n,m} = f_{x''}^n f_{y''}^m, \quad (23)$$

共振条件:

$$\frac{4b}{\lambda} = 2l + n + m + 1. \quad (24)$$

2) 当  $R_A, R_B$  异号,此时  $R_B/R_A < 0$ , 相应于共焦正支不稳定腔.

本征值:

$$\gamma_{n,m} = \left| \frac{R_B}{R_A} \right|^{n+m+1} e^{-j2bk}, \quad (25)$$

本征函数:

$$(W_A)_{n,m} = f_{x''}^n f_{y''}^m, \quad (26)$$

共振条件:

$$\frac{4b}{\lambda} = 2l. \quad (27)$$

以上各式中  $n, m, l = 0, 1, 2, \dots$ . 由(27)式可知,对于共焦正支不稳定腔,激光波长  $\lambda$  与横模指数  $n, m$  无关. 由(22),(25)式得  $|\gamma_{n,m}| = \left| \frac{R_B}{R_A} \right|^{n+m+1}$ , 这与 Siegman<sup>[2]</sup>, Streifer<sup>[3]</sup> 相符,  $\gamma_{n,m}$  及共振条件与 Barone<sup>[4]</sup> 相符(注意文献[4]只给出圆反射镜的结果,但是不难把它推广到正方形反射镜的情形).

用(23),(26),(20),(8)式可求得坐标空间中的本征函数

$$\begin{aligned} (v_A)_{n,m}(x'', y'') &= \iint_{-\infty}^{+\infty} f_{x''}^n f_{y''}^m \exp \left\{ j \frac{\pi^2}{k} R_A (f_{x''}^2 + f_{y''}^2) \right\} \\ &\times \exp \{ 2\pi j (f_{x''} x'' + f_{y''} y'') \} df_{x''} df_{y''} \\ &= (c_A)_{n,m} \exp \left\{ -j \frac{k}{R_A} (x''^2 + y''^2) \right\} \\ &\times H_n \left( \sqrt{j} \frac{x''}{\sqrt{\frac{R_A}{k}}} \right) H_m \left( \sqrt{j} \frac{y''}{\sqrt{\frac{R_A}{k}}} \right), \end{aligned} \quad (28)$$

其中  $H_n$  是第  $n$  阶 Hermite 函数,  $(c_A)_{n,m}$  是归一化常数. 此结果与 Streifer<sup>[3]</sup> 相符. 用类似的方法, 可以求得  $B$  镜前的光场分布.

由(28)式可得若干低阶模在  $A$  镜面上的光场分布是

$$n = m = 0 \quad (v_{A\alpha})_{0,0} = (c_{A\alpha})_{0,0} \exp\left\{-j \frac{k}{2R_A} (x^2 + y^2)\right\}, \quad (29)$$

$$n = m = 1 \quad (v_{A\alpha})_{1,1} = (c_{A\alpha})_{1,1} 4j \frac{xy}{R_A} \exp\left\{-j \frac{k}{2R_A} (x^2 + y^2)\right\}, \quad (30)$$

$$n = m = 2 \quad (v_{A\alpha})_{2,2} = (c_{A\alpha})_{2,2} 4 \sqrt{\left(1 + \frac{4k^2 x^4}{R_A^2}\right) \left(1 + \frac{4k^2 y^4}{R_A^2}\right)} \\ \times \exp\left\{-j \left[\frac{k}{2R_A} (x^2 + y^2) + \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{2ky^2}{R_A}\right) + \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{2kx^2}{R_A}\right)\right]\right\}. \quad (31)$$

(29),(30)式与 Siegman<sup>[2]</sup> 结果一致, 即镜面为等相面, 光场振幅与坐标的若干次方成正比. 但从  $n = m = 2$  开始, Siegman 结果一般来说不再适用, 但在离光轴足够远的地方, 例如当  $\frac{2kx^2}{R_A} > 60$ ,  $\frac{2ky^2}{R_A} > 60$ , 易得

$$(v_{A\alpha})_{2,2} \cong (c_{A\alpha})_{2,2} \left(\frac{4kxy}{R_A}\right)^2 \exp\left\{-j \left[\frac{k}{2R_A} (x^2 + y^2) + \pi\right]\right\}. \quad (32)$$

此式与 Siegman 的结果一致, 所以对二阶以上高阶模 Siegman 的结果可在离光轴足够的地方近似适用.

不难求得远场分布为

$$U_f(x_f, y_f) = \frac{\exp\left\{j \frac{k}{2f} (x_f^2 + y_f^2)\right\}}{j\lambda f}$$

$$\times (c_B)_{n,m} [I_n(x_f, a) I_m(y_f, a) - I_n(x_f, b) I_m(y_f, b)],$$

其中  $f$  为聚焦镜焦距,  $x_f, y_f$  为焦平面上的坐标, 输出孔径形状如图 2 所示. 对于  $n = 0, 1, 2$  阶模,  $I_n(x, a)$  的具体形式为

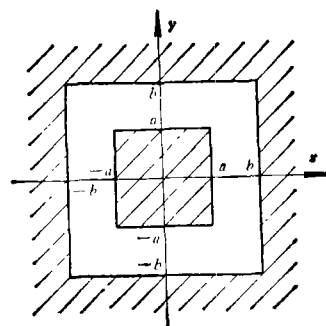


图 2 输出光阑的几何形状

$$I_0(x_f, a) = 2 \frac{\sin\left(\frac{k}{f} x_f a\right)}{\frac{k}{f} x_f},$$

$$I_1(x_f, a) = \sqrt{j} \frac{1}{\sqrt{\frac{R_B}{k}}} \left\{ \frac{2a}{-j \frac{k}{f} x_f} \cos\left(\frac{k}{f} x_f a\right) - \frac{2j}{\frac{k^2}{f^2} x_f^2} \sin\left(\frac{k}{f} x_f a\right) \right\},$$

$$I_2(x_f, a) = \frac{8}{\frac{R_B}{k}} \left( \frac{a^2}{-j \frac{k}{f} x_f} + \frac{2}{j \left(\frac{k}{f} x_f\right)^3} - \frac{R_B}{2 \frac{x_f}{f} k^2} \right) \sin\left(\frac{k}{f} x_f a\right)$$

$$-\frac{16ja}{\frac{R_B}{k} \left(\frac{k}{f} x_f\right)^2} \cos\left(\frac{k}{f} x_f a\right).$$

本文没有讨论有限镜面, 镜面倾斜及有增益介质等情形, 但是本文证明了在  $f, f$  空间中本征函数形式非常简单(见(23), (26)式), 因此本文的结果有可能为进一步研究不稳定腔提供一个简便的出发点.

本文承周光地先生审阅, 特此致谢.

### 参 考 文 献

- [ 1 ] A. E. Siegman, *Laser Focus*, 7(5) (1971), 42.
- [ 2 ] A. E. Siegman and R. Arrathoon, *IEEE Journal of Quantum Electronics*, **QE-3**(4) (1967), 156.
- [ 3 ] W. Streifer, *IEEE Journal of Quantum Electronics*, **QE-4**(4) (1968), 229.
- [ 4 ] S. R. Barone, *Appl. Opt.*, 6(5) (1967), 861.
- [ 5 ] J. W. Goodman, "Introduction to Fourier Optics", McGraw-Hill Book Company, New York, (1968).
- [ 6 ] G. A. Campbell and R. M. Foster, "Fourier Integrals for Practical Application", D. Van Nostrand Company, Inc., New York (1954).
- [ 7 ] 固体激光编写组, 固体激光导论, 上海人民出版社, (1975).

## AN ANALYTICAL SOLUTION OF CONFOCAL UNSTABLE OPTICAL RESONATOR

LIU JIAN-BANG

(*Institute of Mechanics, Academia Sinica*)

### ABSTRACT

The Kirchhoff-Fresnel integral equation is transformed into Fourier space and the analytical eigenfunctions, eigenvalues, resonance conditions and far field distributions are obtained. The form of eigenfunctions obtained in the Fourier space are very simple, this result might be used as a convenient start point for further investigation of the unstable optical resonator.