

# 部分电极结构单极机的磁流体 力学一维流动理论\*

中国科学院力学研究所 胡文瑞

**提要** 本文提出了用待定电极壁边值并分区衔接的方法,完整地求解了环管中部分电极单极机的磁流体力学一维流动问题。做为两个特例,研究了环线电极和通常的全电极结构的单极机。对一些典型参数下的流场和感应磁场的分布进行了数值计算。与差分计算的结果比较,在数值和分布两方面都相当符合。着重研究了弥散效应及哈特曼边界层这些磁流体力学的特征现象,并用这些概念去讨论单极机的内部流动现象。结果表明,部分电极结构可以增加环管的流量,改善哈特曼边界层,控制二次流的发展。这些作用对具体的单极机应用有一定实用价值。

## 一、前言

磁流体力学环管流动通常讨论交叉电磁场作用下矩形截面环管中流体的旋转运动。外加轴向均匀磁场时就得到单极机模型。这种流动中没有转动部件,因此对新技术有很大吸引力。开始主要探讨旋涡型磁流体力学直接发电机、磁流体力学马达和离心机等。近来的大量研究则主要是为气态核反应堆和核火箭中的磁流体力学约束,以及磁流体力学离心分离器(特别是用于分离重元素的同位素分离器)等原子能新技术服务的。

部分电极单极机的示意结构见图1。当 $a=l$ 时,就得到通常的全电极单极机。一维流动模型认为,单极机中速度场和感应磁场的主要量是切向速度 $v_\theta$ 和切向感应磁场 $B_\theta$ ,它们通过切向运动方程和切向磁感应方程耦合在一起,即

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r^2} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} + \frac{B_0}{\mu_0 \eta} \frac{\partial B_\theta}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial^2 B_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial B_\theta}{\partial r} - \frac{B_\theta}{r^2} + \frac{\partial^2 B_\theta}{\partial z^2} + \sigma \mu_0 B_0 \frac{\partial v_\theta}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

其中 $\sigma$ ,  $\eta$ ,  $B_0$ ,  $\mu_0$ 分别是流体的电导率、粘性系数,外加均匀的轴向磁感应强度和真空导磁率。速度的边界条件是无滑移条件

$$v_\theta(r_1, z) = v_\theta(r_2, z) = v_\theta(r, \pm l) = 0 \quad (1.2)$$

电极壁面的理想导体条件要求

$$\left. \frac{\partial(rB_\theta)}{\partial r} \right|_{\substack{r=r_i \\ b+a < z < b-a}} = 0 \quad (i=1, 2) \quad (1.3)$$

不失一般性,将绝缘壁面的理想绝缘体条件写成柱坐标的原点取在对称中心。外回路将

\* 1974年7月8日收到。

两个同心电极环连接,环面中心线距  $r$  轴为  $b$ :

$$\left. \begin{aligned} B_{\theta}(r, \pm l) &= \mp \mu_0 I / 4\pi r \\ B_{\theta}(r_i, b+a < z < l) &= -\mu_0 I / 4\pi r_i \quad (i=1, 2) \\ B_{\theta}(r_i, -l < z < b-a) &= \mu_0 I / 4\pi r_i \quad (i=1, 2) \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

其中  $I$  为回路中的总电流。

由于求解式 (1.1)–(1.4) 这组椭圆型方程的混合边值问题在数学上遇到的困难, 十几年来, 基本是作各种近似处理。当磁流体的相互作用较弱时可以将磁场与速度场退耦<sup>[1,2]</sup>; 对于大哈特曼数<sup>[3,4]</sup>和小哈特曼数<sup>[5]</sup>, 可做渐近处理; 当环管的截面长宽比很小<sup>[6-8]</sup>和很大<sup>[9]</sup>时, 可略去一对边界的影响而求解; 还可以给定电极面上  $B_{\theta}$  的分布(如令  $B_{\theta}$  呈

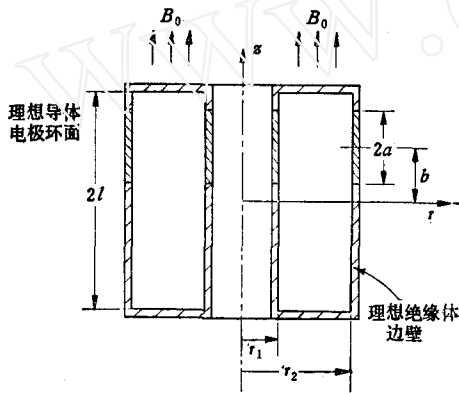


图1 部分电极单极机的结构

线性分布<sup>[10,11]</sup>而求解。理论上比较成功的是 Schweitzer 和 Soler 的工作<sup>[12,13]</sup>, 他们用伽辽金逼近法求出了全电极时一维流问题的近似解, 计算了零级近似的结果。完整的解与零级近似显然有较大的差异。

本文给出一种完整地求解部分电极单极机的方法, 所得结果与差分方法结果相当吻合。部分电极的解除在数学上更具一般性外, 在物理上可用来研究由于边壁上的电势间断引起流场中相应量的弥散变化过程, 以及存在弥散效应时哈特曼边界层的结构; 在实用上可改进电流分布, 使电流不过分集中于哈特曼边界层, 这就能控制二次流; 并且对同样截面的环管(特别是长管)可获得更大的流量。利用与本文类似的方法, 可以讨论直管的流动情况<sup>[22]</sup>。

## 二、数学处理方法

为使式 (1.1)–(1.4) 无量纲化, 令

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{r}{r_2 - r_1}, \quad \zeta = \frac{z}{r_2 - r_1}, \quad \lambda = \frac{a}{r_2 - r_1}, \quad L = \frac{l}{r_2 - r_1} \\ V(\xi, \zeta) &= v_{\theta}(r, z) / \frac{I}{4\pi(r_2 - r_1)\sqrt{\sigma\eta}}, \quad B(\xi, \zeta) = B_{\theta}(r, z) / \frac{\mu_0 I}{4\pi(r_2 - r_1)} \\ M &= B_0(r_2 - r_1)\sqrt{\sigma/\eta}, \quad R_1 = \frac{r_1}{r_2 - r_1}, \quad R_2 = \frac{r_2}{r_2 - r_1}, \quad R = \frac{r_2}{r_1} \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

本节中假设  $b = 0$ , 将电极边值化为函数边值

$$\left. \begin{aligned} B(R_1, |\zeta| < \lambda) &= A_1(\zeta) = \sum_{m=0}^{\infty} D_m^i \sin(\delta_m \zeta) \\ B(R_2, |\zeta| < \lambda) &= A_2(\zeta) = \sum_{m=0}^{\infty} D_m^e \sin(\delta_m \zeta) \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

其中  $A_1(\zeta)$ ,  $A_2(\zeta)$ , 或者  $D_m^i$ ,  $D_m^e$  是由式 (1.3) 确定的待求函数和系数, 而

$$\delta_m = \frac{2m+1}{2} \frac{\pi}{\lambda}.$$

这样,就把问题化为求解包含待定系数的迪利赫勒问题.

不难导出无量纲的方程和边界条件为:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{L}(V, B) &= \frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial V}{\partial \xi} - \frac{V}{\xi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \zeta^2} + M \frac{\partial B}{\partial \zeta} = 0, \mathfrak{L}(B, V) = 0 \\ V(R_1, \zeta) &= V(R_2, \zeta) = V(\xi, \pm L) = 0, B(\xi, \pm L) = \mp \frac{1}{\xi} \\ B(R_1, \lambda < \zeta \leq L) &= -\frac{1}{R_1}, B(R_2, \lambda < \zeta \leq L) = -\frac{1}{R_2} \\ B(R_1, |\zeta| < \lambda) &= \sum_{m=0}^{\infty} D_m^i \sin(\delta_m \zeta), B(R_2, |\zeta| < \lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} D_m^e \sin(\delta_m \zeta) \\ B(R_1, -L \leq \zeta < -\lambda) &= \frac{1}{R_1}, B(R_2, -L \leq \zeta < -\lambda) = \frac{1}{R_2} \end{aligned} \right\} (2.3)$$

其中  $\mathfrak{L}$  是一个微分算符,  $D_m^i, D_m^e$  应满足式 (1.3),

$$\left. \frac{\partial}{\partial \xi} (\xi B) \right|_{\substack{\xi=R_i \\ |\zeta|<\lambda}} = 0 \quad (i=1, 2) \quad (2.4)$$

$b=0$  时问题有对称性,故可只求上半平面环管 ( $\zeta \geq 0$ ) 中的解. 这时补充的对称条件是

$$B(\xi, 0) = 0, \quad \frac{\partial V(\xi, 0)}{\partial \zeta} = 0 \quad (2.5)$$

可以指出,算符  $\mathfrak{L}$  存在着几何相似性. 令

$$x = M\xi, \quad y = M\zeta \quad (2.6)$$

则变换后的算符与  $M$  无关. 这个相似关系对环管的一维流动问题具有一般性.

将上半平面环管划分为两个区域,即区域 I:  $R_1 \leq \xi \leq R_2, \lambda \leq \zeta \leq L$ ; 区域 II:  $R_1 \leq \xi \leq R_2, 0 \leq \zeta \leq \lambda$ . 先分别求出两个区域的解,然后用衔接条件和电极边条件定出环管内完整的解.

### 1. 区域 I 中的解 作变换

$$A^I(\xi, \zeta) = B^I(\xi, \zeta) + \frac{1}{\xi} \quad (2.7)$$

其中上标 I 标记区域,可得方程和边界条件为

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{L}(V^I, A^I) &= 0, \quad \mathfrak{L}(A^I, V^I) = 0 \\ V^I(R_1, \zeta) &= V^I(R_2, \zeta) = V^I(\xi, L) = 0 \\ A^I(R_1, \zeta) &= A^I(R_2, \zeta) = A^I(\xi, L) = 0 \end{aligned} \right\} (2.8)$$

为求解式 (2.8), 做有限亨克变换<sup>[15,16]</sup>. 令

$$f_n^I(\zeta) = \int_{R_1}^{R_2} V^I(\xi, \zeta) \xi \varphi_n(\xi) d\xi, \quad g_n^I(\zeta) = \int_{R_1}^{R_2} A^I(\xi, \zeta) \xi \varphi_n(\xi) d\xi \quad (2.9)$$

其中

$$\varphi_n(\xi) = J_1(\gamma_n \xi) Y_1(\gamma_n R_1) - J_1(\gamma_n R_1) Y_1(\gamma_n \xi)$$

$J_1(x), Y_1(x)$  分别是第一类和第二类贝塞耳函数,  $\gamma_n$  为满足  $\varphi_n(R_2) = 0$  的特征根. 于是

可得

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 f_n^1}{d\zeta^2} + M \frac{d g_n^1}{d\zeta} - \gamma_n^2 f_n^1 &= 0 \\ \frac{d^2 g_n^1}{d\zeta^2} + M \frac{d f_n^1}{d\zeta} - \gamma_n^2 g_n^1 &= 0 \\ f_n^1(L) = g_n^1(L) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

经过一些繁杂的运算以后,可以得出式(2.10)的解为

$$\left. \begin{aligned} f_n^1(\zeta) &= C_{n1}^1(e^{\alpha_{n1}\zeta} - e^{\beta_n L + \alpha_{n2}\zeta}) + C_{n2}^1(e^{-\alpha_{n2}\zeta} - e^{\beta_n L - \alpha_{n1}\zeta}) \\ g_n^1(\zeta) &= -C_{n1}^1(e^{\alpha_{n1}\zeta} - e^{\beta_n L + \alpha_{n2}\zeta}) + C_{n2}^1(e^{-\alpha_{n2}\zeta} - e^{\beta_n L - \alpha_{n1}\zeta}) \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

其中  $C_{n1}^1, C_{n2}^1$ , 为待定系数,而

$$\alpha_{n1} = \frac{M + \beta_n}{2}, \quad \alpha_{n2} = \frac{M - \beta_n}{2}, \quad \beta_n = \sqrt{M^2 + 4\gamma_n^2} \quad (2.12)$$

考虑到

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} k_n a_n \varphi_n(\xi)$$

$$k_n = \frac{\pi^2}{2} \frac{\gamma_n^2 J_1^2(\gamma_n R_2)}{J_1^2(\gamma_n R_1) - J_2^2(\gamma_n R_2)}, \quad a_n = \frac{2}{\pi} \frac{J_1(\gamma_n R_1)/R_1 - J_1(\gamma_n R_2)/R_2}{\gamma_n^2 J_1(\gamma_n R_2)}$$

由亨克变换的反演及式(2.7),就可求解出

$$\left. \begin{aligned} V^1(\xi, \zeta) &= \sum_{n=1}^{\infty} k_n f_n^1(\zeta) \varphi_n(\xi) \\ B^1(\xi, \zeta) &= \sum_{n=1}^{\infty} k_n [-a_n + g_n^1(\zeta)] \varphi_n(\xi) \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

## 2. 区域 II 中的解 做变换

$$B^{II}(\xi, \zeta) = A^{II}(\xi, \zeta) + \frac{R_1}{R_2^2 - R_1^2} \frac{R_2^2 - \xi^2}{\xi} A_1(\zeta) + \frac{R_2}{R_2^2 - R_1^2} \frac{\xi^2 - R_1^2}{\xi} A_2(\zeta) \quad (2.14)$$

可以导出区域 II 中的方程和边条件为:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L}(V^{II}, A^{II}) + M \left[ \frac{R_1}{R_2^2 - R_1^2} \frac{R_2^2 - \xi^2}{\xi} A_1'(\zeta) + \frac{R_2}{R_2^2 - R_1^2} \frac{\xi^2 - R_1^2}{\xi} A_2'(\zeta) \right] &= 0 \\ \mathcal{L}(A^{II}, V^{II}) + \frac{R_1}{R_2^2 - R_1^2} \frac{R_2^2 - \xi^2}{\xi} A_1''(\zeta) + \frac{R_2}{R_2^2 - R_1^2} \frac{\xi^2 - R_1^2}{\xi} A_2''(\zeta) &= 0 \\ V^{II}(R_1, \zeta) = V^{II}(R_2, \zeta) = \frac{\partial V^{II}(\xi, 0)}{\partial \zeta} &= 0 \\ A^{II}(R_1, \zeta) = A^{II}(R_2, \zeta) = A^{II}(\xi, 0) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.15)$$

不难推导出

$$\left. \begin{aligned} \frac{R_1}{R_2^2 - R_1^2} \frac{R_2^2 - \xi^2}{\xi} &= \sum_{n=1}^{\infty} k_n b_n \varphi_n(\xi) \\ \frac{R_2}{R_2^2 - R_1^2} \frac{\xi^2 - R_1^2}{\xi} &= \sum_{n=1}^{\infty} k_n d_n \varphi_n(\xi) \\ b_n &= -\frac{2}{\pi} \frac{1}{\gamma_n^2}, \quad d_n = \frac{2}{\pi} \frac{1}{\gamma_n^2} \frac{J_1(\gamma_n R_1)}{J_1(\gamma_n R_2)} \end{aligned} \right\}$$

类似地,对式(2.15)做有限亨克变换. 记

$$f_n^{II}(\zeta) = \int_{R_1}^{R_2} V^{II}(\xi, \zeta) \xi \varphi_n(\xi) d\xi, \quad g_n^{II}(\zeta) = \int_{R_1}^{R_2} A^{II}(\xi, \zeta) \xi \varphi_n(\xi) d\xi$$

可得到  $f_n^{II}(\zeta)$  和  $g_n^{II}(\zeta)$  的方程及边值为

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 f_n^{II}}{d\zeta^2} + M \frac{d g_n^{II}}{d\zeta} - \gamma_n^2 f_n^{II} &= -M [b_n A_1'(\zeta) + d_n A_2'(\zeta)] \\ \frac{d^2 g_n^{II}}{d\zeta^2} + M \frac{d f_n^{II}}{d\zeta} - \gamma_n^2 g_n^{II} &= -[b_n A_1''(\zeta) + d_n A_2''(\zeta)] \\ \frac{d f_n^{II}(0)}{d\zeta} &= g_n^{II}(0) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

经过一些繁杂的运算,就可导出式(2.16)的解为

$$\left. \begin{aligned} f_n^{II}(\zeta) &= 2C_{n1}^{II} \text{ch}(\alpha_{n1}\zeta) + 2C_{n2}^{II} \text{ch}(\alpha_{n2}\zeta) + f_n^*(\zeta) \\ g_n^{II}(\zeta) &= -2C_{n1}^{II} \text{sh}(\alpha_{n1}\zeta) - 2C_{n2}^{II} \text{sh}(\alpha_{n2}\zeta) + g_n^*(\zeta) \end{aligned} \right\} \quad (2.17)$$

其中  $f_n^*(\zeta)$  和  $g_n^*(\zeta)$  是式(2.16)中方程组的特解,它们等于

$$\left. \begin{aligned} f_n^*(\zeta) &= \sum_{m=0}^{\infty} \omega_{nm} \cos(\delta_m \zeta) \\ g_n^*(\zeta) &= \sum_{m=0}^{\infty} \tau_{nm} \sin(\delta_m \zeta) \end{aligned} \right\} \quad (2.18)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \omega_{nm} &= \frac{M \gamma_n^2 \delta_m}{(\gamma_n^2 + \delta_m^2)^2 + M^2 \delta_m^2} (b_n D_m^i + d_n D_m^c) \\ \tau_{nm} &= -\frac{\delta_m^2 (M^2 + \gamma_n^2 + \delta_m^2)}{(\gamma_n^2 + \delta_m^2)^2 + M^2 \delta_m^2} (b_n D_m^i + d_n D_m^c) \end{aligned} \right\} \quad (2.19)$$

利用式(2.14),由亨克变换的反演即可得到

$$\left. \begin{aligned} V^{II}(\xi, \zeta) &= \sum_{n=1}^{\infty} k_n f_n^{II}(\zeta) \varphi_n(\xi) \\ B^{II}(\xi, \zeta) &= \sum_{n=1}^{\infty} k_n [b_n A_1(\zeta) + d_n A_2(\zeta) + g_n^{II}(\zeta)] \varphi_n(\xi) \end{aligned} \right\} \quad (2.20)$$

**3. 衔接条件** 为确定  $C_{ni}^I$  和  $C_{ni}^{II}$  ( $i=1, 2$ ), 可在  $\zeta = \lambda$  处要求

$$\left. \begin{aligned} f_n^I(\lambda) &= f_n^{II}(\lambda), \quad \frac{d f_n^I(\lambda)}{d\zeta} = \frac{d f_n^{II}(\lambda)}{d\zeta} \\ g_n^I(\lambda) &= g_n^{II}(\lambda) + a_n + b_n A_1(\lambda) + d_n A_2(\lambda), \quad \frac{d g_n^I(\lambda)}{d\zeta} = \frac{d g_n^{II}(\lambda)}{d\zeta} \end{aligned} \right\} \quad (2.21)$$

这些条件的物理意义是,速度及其导数,感应磁场及电流密度在  $\zeta = \lambda$  处应连续. 利用式(2.11)和(2.17),由式(2.21)的第一式和第四式可以导出

$$\left. \begin{aligned} C_{n1}^I &= \frac{2e^{-(\alpha_{n2}\lambda)} \text{ch}(\alpha_{n1}\lambda) C_{n1}^{II} + 2e^{(\beta_n L - \alpha_{n1}\lambda)} \text{ch}(\alpha_{n2}\lambda) C_{n2}^{II}}{e^{(\beta_n \lambda)} [1 - e^{2\beta_n(L-\lambda)}]} \quad (L \neq \lambda) \\ C_{n2}^I &= \frac{2e^{(\beta_n L + \alpha_{n2}\lambda)} \text{ch}(\alpha_{n1}\lambda) C_{n1}^{II} + 2e^{(\alpha_{n1}\lambda)} \text{ch}(\alpha_{n2}\lambda) C_{n2}^{II}}{e^{(\beta_n \lambda)} [1 - e^{2\beta_n(L-\lambda)}]} \quad (L \neq \lambda) \end{aligned} \right\} \quad (2.22)$$

代入式(2.21)的第二式和第三式,可以得到

$$\begin{aligned} & \left[ \operatorname{sh}(\alpha_{n1}\lambda) - \frac{1 - e^{\beta_n(L-\lambda)}}{1 + e^{\beta_n(L-\lambda)}} \operatorname{ch}(\alpha_{n1}\lambda) \right] C_{n1}^{\text{II}} \\ & + \left[ \operatorname{sh}(\alpha_{n2}\lambda) + \frac{1 - e^{\beta_n(L-\lambda)}}{1 + e^{\beta_n(L-\lambda)}} \operatorname{ch}(\alpha_{n2}\lambda) \right] C_{n2}^{\text{II}} \\ & = \frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \gamma_n^2 (\gamma_n^2 + \delta_m^2)}{(\gamma_n^2 + \delta_m^2)^2 + M^2 \delta_m^2} D_m^i \\ & + \frac{d_n}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \gamma_n^2 (\gamma_n^2 + \delta_m^2)}{(\gamma_n^2 + \delta_m^2)^2 + M^2 \delta_m^2} D_m^e \end{aligned} \quad (2.23a)$$

$$\begin{aligned} & \left\{ -\alpha_{n1} \operatorname{sh}(\alpha_{n1}\lambda) + \frac{\alpha_{n1} [1 + e^{2\beta_n(L-\lambda)}] - 2\alpha_{n1} e^{\beta_n(L-\lambda)}}{1 - e^{2\beta_n(L-\lambda)}} \operatorname{ch}(\alpha_{n1}\lambda) \right\} C_{n1}^{\text{II}} \\ & + \left\{ -\alpha_{n2} \operatorname{sh}(\alpha_{n2}\lambda) + \frac{2\alpha_{n1} e^{\beta_n(L-\lambda)} - \alpha_{n2} [1 + e^{2\beta_n(L-\lambda)}]}{1 - e^{2\beta_n(L-\lambda)}} \operatorname{ch}(\alpha_{n2}\lambda) \right\} C_{n2}^{\text{II}} \\ & = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{m+1} \delta_m \omega_{nm} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned} \quad (2.23b)$$

式(2.23)是 $2n$ 个线性代数方程,它与 $2n$ 个关系式(2.22)一起,用来确定 $C_{ni}^{\text{I}}$ 和 $C_{ni}^{\text{II}}$ ( $i=1, 2$ )这 $4n$ 个系数.

**4. 电极边界条件** 系数 $D_m^i, D_m^e$ 由式(2.4)确定,即

$$\left. \frac{\partial(\xi B^{\text{II}})}{\partial \xi} \right|_{\xi=R_i} = A_i(\xi) + R_i \frac{\partial B^{\text{II}}(R_i, \zeta)}{\partial \zeta} = 0 \quad (i = 1, 2) \quad (2.24)$$

将式(2.20)第二式代入式(2.24);将 $B^{\text{II}}(\xi, \zeta)$ 中的双曲函数 $\operatorname{sh}(\alpha_{ni}\zeta)$ 作福利叶展开,并注意到

$$R_1 \varphi'_n(R_1) = -\frac{2}{\pi}, \quad R_2 \varphi'_n(R_2) = -\frac{2}{\pi} \frac{J_1(\gamma_n R_1)}{J_1(\gamma_n R_2)}$$

就可由式(2.24)导出确定 $D_m^i$ 和 $D_m^e$ ( $m=0, 1, 2, \dots$ )的 $2m+2$ 个线性代数方程:

$$\begin{aligned} & \left[ -\frac{\pi R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} + \delta_m^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n k_n (M^2 + \gamma_n^2 + \delta_m^2)}{(\gamma_n^2 + \delta_m^2)^2 + M^2 \delta_m^2} \right] D_m^i \\ & + \left[ \frac{\pi R_1 R_2}{R_2^2 - R_1^2} + \delta_m^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n k_n (M^2 + \gamma_n^2 + \delta_m^2)}{(\gamma_n^2 + \delta_m^2)^2 + M^2 \delta_m^2} \right] D_m^e \\ & = (-1)^{m+1} \frac{4}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{k_n \alpha_{n1}}{\alpha_{n1}^2 + \delta_m^2} \operatorname{ch}(\alpha_{n1}\lambda) \cdot C_{n1}^{\text{II}} \right] \\ & + (-1)^{m+1} \frac{4}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{k_n \alpha_{n2}}{\alpha_{n2}^2 + \delta_m^2} \operatorname{ch}(\alpha_{n2}\lambda) C_{n2}^{\text{II}} \right] \quad (2.25a) \\ & \left[ -\frac{\pi R_1 R_2}{R_2^2 - R_1^2} + \delta_m^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(\gamma_n R_1)}{J_1(\gamma_n R_2)} \frac{b_n k_n (M^2 + \gamma_n^2 + \delta_m^2)}{(\gamma_n^2 + \delta_m^2)^2 + M^2 \delta_m^2} \right] D_m^i \\ & + \left[ \frac{\pi R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} + \delta_m^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(\gamma_n R_1)}{J_1(\gamma_n R_2)} \frac{d_n k_n (M^2 + \gamma_n^2 + \delta_m^2)}{(\gamma_n^2 + \delta_m^2)^2 + M^2 \delta_m^2} \right] D_m^e \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (-1)^{m+1} \frac{4}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{k_n \alpha_{n1}}{\alpha_{n1}^2 + \delta_m^2} \frac{J_1(\gamma_n R_1)}{J_1(\gamma_n R_2)} \operatorname{ch}(\alpha_{n1} \lambda) C_{n1}^{\text{II}} \right] \\
&+ (-1)^{m+1} \frac{4}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{k_n \alpha_{n2}}{\alpha_{n2}^2 + \delta_m^2} \frac{J_1(\gamma_n R_1)}{J_1(\gamma_n R_2)} \operatorname{ch}(\alpha_{n2} \lambda) C_{n2}^{\text{II}} \right] \\
&\quad (m = 0, 1, 2, \dots) \tag{2.25b}
\end{aligned}$$

式(2.22), (2.23), (2.25)总计有  $2(n+m+1)$  个线性代数方程, 可以唯一地确定  $C_{ni}^{\text{I}}$ ,  $C_{ni}^{\text{II}}$  ( $i = 1, 2; n = 1, 2, \dots$ );  $D_m^i$ ,  $D_m^e$  ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ) 这  $2(n+m+1)$  个待定系数. 将这些求出的系数代回式(2.13)和(2.20)中, 我们就完整地求解了部分电极单极机的一维流动问题.

为了使系数  $C_{ni}^{\text{II}}$  具有合适的量级, 我们引用

$$E_{n1} = \gamma_n^3 \operatorname{ch}(\alpha_{n1} \lambda) C_{n1}^{\text{II}}, \quad E_{n2} = \gamma_n^2 \operatorname{ch}(\alpha_{n2} \lambda) C_{n2}^{\text{II}} \tag{2.26}$$

将式(2.26)代入式(2.13)和(2.20), 考虑到式(2.22), 就有

$$\begin{aligned}
V^{\text{I}}(\xi, \zeta) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2k_n}{\gamma_n^2} \left\{ e^{\alpha_{n2}(\zeta-\lambda)} \frac{1 - e^{-\beta_n(L-\zeta)}}{1 - e^{-\beta_n(L-\lambda)}} \left[ \frac{E_{n1}}{1 + e^{\beta_n(L-\lambda)}} \right. \right. \\
&+ \left. \left. \frac{E_{n2}}{1 + e^{-\beta_n(L-\lambda)}} \right] + e^{-\alpha_{n1}(\zeta-\lambda)} \frac{1 - e^{-\beta_n(L-\zeta)}}{1 - e^{-\beta_n(L-\lambda)}} \left[ \frac{E_{n1}}{1 + e^{-\beta_n(L-\lambda)}} \right. \right. \\
&+ \left. \left. \frac{E_{n2}}{1 + e^{\beta_n(L-\lambda)}} \right] \right\} \varphi_n(\xi) \\
B^{\text{I}}(\xi, \zeta) &= -\frac{1}{\xi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2k_n}{\gamma_n^2} \left\{ -e^{\alpha_{n2}(\zeta-\lambda)} \frac{1 - e^{-\beta_n(L-\zeta)}}{1 - e^{-\beta_n(L-\lambda)}} \right. \\
&\cdot \left[ \frac{E_{n1}}{1 + e^{\beta_n(L-\lambda)}} + \frac{E_{n2}}{1 + e^{-\beta_n(L-\lambda)}} \right] + e^{-\alpha_{n1}(\zeta-\lambda)} \\
&\cdot \left. \frac{1 - e^{-\beta_n(L-\zeta)}}{1 - e^{-\beta_n(L-\lambda)}} \left[ \frac{E_{n1}}{1 + e^{-\beta_n(L-\lambda)}} + \frac{E_{n2}}{1 + e^{\beta_n(L-\lambda)}} \right] \right\} \varphi_n(\xi)
\end{aligned} \tag{2.27}$$

$$\begin{aligned}
V^{\text{II}}(\xi, \zeta) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2k_n}{\gamma_n^2} \left[ \frac{\operatorname{ch}(\alpha_{n1} \zeta)}{\operatorname{ch}(\alpha_{n1} \lambda)} E_{n1} + \frac{\operatorname{ch}(\alpha_{n2} \zeta)}{\operatorname{ch}(\alpha_{n2} \lambda)} E_{n2} \right. \\
&+ \left. \frac{\gamma_n^2}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \omega_{nm} \cos(\delta_m \zeta) \right] \varphi_n(\xi) \\
B^{\text{II}}(\xi, \zeta) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2k_n}{\gamma_n^2} \left\{ -\frac{\operatorname{sh}(\alpha_{n1} \zeta)}{\operatorname{ch}(\alpha_{n1} \lambda)} E_{n1} - \frac{\operatorname{sh}(\alpha_{n2} \zeta)}{\operatorname{ch}(\alpha_{n2} \lambda)} E_{n2} \right. \\
&+ \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\gamma_n^2 (\gamma_n^2 + \delta_m^2)}{(\gamma_n^2 + \delta_m^2)^2 + M^2 \delta_m^2} \left[ -D_m^i \right. \\
&+ \left. \frac{J_1(\gamma_n R_1)}{J_1(\gamma_n R_2)} D_m^e \right] \sin(\delta_m \zeta) \left. \right\} \varphi_n(\xi)
\end{aligned} \tag{2.28}$$

考虑到式(2.23)和(2.25)都是无穷阶线性代数方程, 具体计算时必须做截断处理. 我们取  $n = 1, 2, \dots, N$ ,  $m = 0, 1, \dots, N$ , 求  $4N+2$  个系数; 然后将这些系数代入式(2.27), (2.28), 称这样的解为第  $N$  级近似解. 用 109 乙机进行了数值计算, 求出了第 1 至第 12 级解. 计算中, 我们选择  $R_1 = 1$ ,  $R_2 = 2$ . 计算结果表明, 这种截断处理的

表 1 系数  $E_{n2}$ ,  $D_m^i$  的各阶近似解 ( $R_1 = 1$ ,  $R_2 = 2$ ,  $L = \lambda = 0.5$ ,  $M = 30$ )

系数	N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$E_{12}$		0.4652											
$E_{22}$			0.4648										
$E_{32}$			0.0551										
$E_{42}$				0.4633									
$E_{52}$				0.0545									
$E_{62}$				0.2316									
$E_{72}$					0.4631								
$E_{82}$					0.0537								
$E_{92}$					0.2309								
$E_{102}$					0.0290								
$E_{112}$						0.4625							
$E_{122}$						0.0536							
$D_6^i$						0.2225							
$D_7^i$						0.0284							
$D_8^i$						0.1481							
$D_9^i$							0.4624						
$D_{10}^i$							0.0532						
$D_{11}^i$							0.2223						
$D_{12}^i$							0.0273						
$D_6^i$							0.1485						
$D_7^i$							0.0195						
$D_8^i$								0.4621					
$D_9^i$								0.0531					
$D_{10}^i$								0.2180					
$D_{11}^i$								0.0264					
$D_{12}^i$								0.1411					
$D_6^i$								0.0184					
$D_7^i$								0.1106					
$D_8^i$								0.0146					
$D_9^i$								0.1110					
$D_{10}^i$									0.4619				
$D_{11}^i$									0.0529				
$D_{12}^i$									0.2155				
$D_6^i$									0.0263				
$D_7^i$									0.1369				
$D_8^i$									0.0177				
$D_9^i$									0.1082				
$D_{10}^i$									0.1057				
$D_{11}^i$									0.0134				
$D_{12}^i$									0.0875				
$D_6^i$									0.0116				
$D_7^i$									0.4619				
$D_8^i$									0.0528				
$D_9^i$									0.2157				
$D_{10}^i$									0.0260				
$D_{11}^i$									0.1368				
$D_{12}^i$									0.0176				
$D_6^i$									0.1024				
$D_7^i$									0.1038				
$D_8^i$									0.0842				
$D_9^i$									0.0115				
$D_{10}^i$									0.0721				
$D_{11}^i$									0.0723				
$D_{12}^i$									0.0096				
$D_6^i$									0.4617				
$D_7^i$									0.0528				
$D_8^i$									0.2142				
$D_9^i$									0.0259				
$D_{10}^i$									0.1342				
$D_{11}^i$									0.0173				
$D_{12}^i$									0.1023				
$D_6^i$									0.0138				
$D_7^i$									0.0840				
$D_8^i$									0.0111				
$D_9^i$									0.0721				
$D_{10}^i$									0.0087				
$D_{11}^i$									0.0087				
$D_{12}^i$									0.0075				
$D_6^i$									0.4617				
$D_7^i$									0.1325				
$D_8^i$									0.0749				
$D_9^i$									0.0507				
$D_{10}^i$									0.0371				
$D_{11}^i$									0.0282				
$D_{12}^i$									0.0221				
$D_6^i$									0.0178				
$D_7^i$									0.0146				
$D_8^i$									0.0121				
$D_9^i$									0.0102				
$D_{10}^i$									0.0087				
$D_{11}^i$									0.0087				
$D_{12}^i$									0.0075				
$D_6^i$									0.4643				
$D_7^i$									0.1356				
$D_8^i$									0.0782				
$D_9^i$									0.0534				
$D_{10}^i$									0.0391				
$D_{11}^i$									0.0299				
$D_{12}^i$									0.0246				
$D_6^i$									0.0199				
$D_7^i$									0.0164				
$D_8^i$									0.0135				
$D_9^i$									0.0108				
$D_{10}^i$									0.0092				
$D_{11}^i$									0.0087				
$D_{12}^i$									0.0075				



逼近性能良好。

### 三、全电极单极机模型

$L = \lambda$  时, 由前面的分析就得到全电极的结果, 这时区域 I 消失. 式 (2.23) 第二式可导出

$$E_{n1} + E_{n2} = 0 \tag{3.1}$$

将式 (3.1) 代入式 (2.23) 第一式, 再与式 (2.25) 一起共有  $2m + n + 2$  个线性代数方程, 可以唯一地求出系数  $E_{n2}$ ,  $D_m^i$  和  $D_m^c$ . 表 1 列出了  $M = 30, N = 1, 2, \dots, 12$  的计算结果. 可以看出, 级数的收敛性是较好的, 当哈特曼数小时收敛性还有所改善; 对长管的收敛性好一些, 短管差一些. 将这些系数代入式 (2.28) 就求出了解

$$\left. \begin{aligned} V(\xi, \zeta) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2k_n}{\gamma_n^2} \left\{ \left[ -\frac{\text{ch}(\alpha_{n1}\zeta)}{\text{ch}(\alpha_{n1}\lambda)} + \frac{\text{ch}(\alpha_{n2}\zeta)}{\text{ch}(\alpha_{n2}\lambda)} \right] E_{n2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\gamma_n^2}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \omega_{nm} \cos(\delta_m \zeta) \right\} \varphi_n(\xi) \\ B(\xi, \zeta) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2k_n}{\gamma_n^2} \left\{ \left[ \frac{\text{sh}(\alpha_{n1}\zeta)}{\text{ch}(\alpha_{n1}\lambda)} - \frac{\text{sh}(\alpha_{n2}\zeta)}{\text{ch}(\alpha_{n2}\lambda)} \right] E_{n2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\gamma_n^2}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\gamma_n^2(\gamma_n^2 + \delta_m^2)(b_n D_m^i + d_n D_m^c)}{(\gamma_n^2 + \delta_m^2)^2 + M^2 \delta_m^2} \sin(\delta_m \zeta) \right\} \varphi_n(\xi) \end{aligned} \right\} \tag{3.2}$$

由式 (3.2) 不难求出环管的总流量  $Q$ :

$$\begin{aligned} Q / \left[ \frac{I(r_2 - r_1)}{\pi \sqrt{\sigma \eta}} \right] &= \left| \int_{r_1}^{r_2} dr \int_{-l}^l \frac{v_{\theta}(r, z)}{\left[ \frac{I(r_2 - r_1)}{\pi \sqrt{\sigma \eta}} \right]} dz \right| \\ &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n k_n}{\gamma_n^2} \left\{ \left[ -\frac{\text{th}(\alpha_{n1}\lambda)}{\alpha_{n1}} + \frac{\text{th}(\alpha_{n2}\lambda)}{\alpha_{n2}} \right] E_{n2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{M \gamma_n^2}{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{-D_m^i + \frac{J_1(\gamma_n R_1)}{J_1(\gamma_n R_2)} D_m^c}{(\gamma_n^2 + \delta_m^2)^2 + M^2 \delta_m^2} \right\} \right| \end{aligned} \tag{3.3}$$

环管中的总流量是各种效应综合度量的一个参数. 表 2 列出了  $N = 12$  时的一些计算结果. 另外, 对欧姆定律积分可得到电极电势差为

表 2 环管中的流量  $Q / \left[ \frac{I(r_2 - r_1)}{\pi \sqrt{\sigma \eta}} \right]$  ( $R_1 = 1, R_2 = 2, L = 0.5$ )

$M \backslash \lambda$	5.0	2.5	0.5	0.1	0.05
0.1	0.00256	0.00239	0.00117	0.00010	0.00003
1.0	0.02557	0.02381	0.00100	0.00100	0.00027
10.0	0.22924	0.19550	0.00940	0.00940	0.00263
30.0	0.52873	0.38804	0.02068	0.02068	0.00705

$$\Delta\varphi = \frac{B_0 Q}{2l} - \frac{I}{4\pi\sigma l} \ln R \quad (3.4)$$

本文方法算出的速度与差分方法算出的相当吻合(图 2)。还可以和 [4] 中的结果比较。对  $R = 2$  的方截面环管,  $M = 30$  时 [4] 中的无量纲流量为  $0.135 \pm O(0.002)$ ,  $N = 12$  时计算的结果是 0.120, 量级上是符合的。

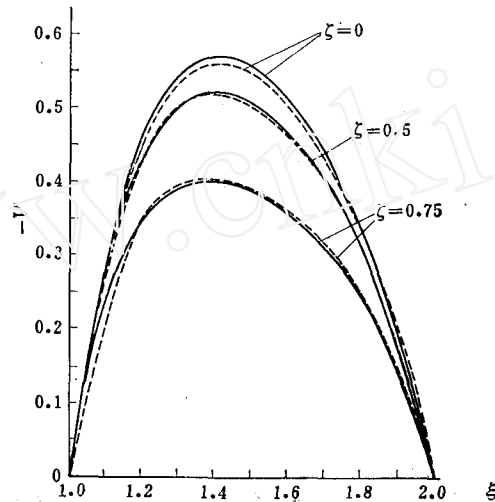


图 2 本文方法计算结果与差分计算结果(荣陞, 1973)的比较  
(虚线是差分结果) ( $R_1 = 1, R_2 = 2, \lambda = L, M = 10$ )

#### 四、环线电极对单极机模型

$\lambda \rightarrow 0$  时就得到中心环线电极对的单极机模型。我们讨论不一定要要求  $b = 0$  的更一般的情况。定义电极的位置为

$$\zeta = \tilde{\lambda} = b/(r_2 - r_1) \quad (4.1)$$

这时,问题的方程和速度边条件与式(2.3)中的一样,而感应磁场的边条件为

$$\left. \begin{aligned} B(\xi, \pm L) &= \mp \frac{1}{\xi} \\ B(R_1, \tilde{\lambda} < \zeta \leq L) &= -\frac{1}{R_1}, \quad B(R_2, \tilde{\lambda} < \zeta \leq L) = -\frac{1}{R_2} \\ B(R_1, -L \leq \zeta \leq \tilde{\lambda}) &= \frac{1}{R_1}, \quad B(R_2, -L \leq \zeta < \tilde{\lambda}) = \frac{1}{R_2} \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

对环线电极情况电极边界条件自动消失,可以求出严格的分析解。用与前边类同的方法对问题做有限亨克变换,经过一些运算就可求出环线电极对单极机模型的分析解为

$$\begin{aligned} V(\xi, \zeta) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n k_n}{1 - e^{-2\beta_n L}} \left\{ \frac{\alpha_{n1}}{\beta_n} [e^{-\alpha_{n1}(L-\zeta)+\alpha_{n2}(L-\tilde{\lambda})} + e^{-\alpha_{n1}(L+\zeta)+\alpha_{n2}(L+\tilde{\lambda})}] \right. \\ &\quad - e^{-2\beta_n L - \alpha_{n2}|\zeta-\tilde{\lambda}|} - e^{\alpha_{n2}|\zeta-\tilde{\lambda}|} \left. \right\} + \frac{\alpha_{n2}}{\beta_n} [e^{-\alpha_{n1}(L-\tilde{\lambda})+\alpha_{n2}(L-\zeta)} \\ &\quad + e^{-\alpha_{n1}(L+\tilde{\lambda})+\alpha_{n2}(L+\zeta)} - e^{-\alpha_{n1}|\zeta-\tilde{\lambda}|} - e^{-2\beta_n L + \alpha_{n1}|\zeta-\tilde{\lambda}|}] \left. \right\} \varphi_n(\xi) \quad (4.3a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B(\xi, \zeta) = & -\frac{1}{\xi} \operatorname{sign}(\zeta - \tilde{\lambda}) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n k_n}{1 - e^{-2\beta_n L}} \left\{ \frac{\alpha_{n1}}{\beta_n} [-e^{-\alpha_{n1}(L-\zeta)+\alpha_{n2}(L-\tilde{\lambda})} \right. \\
 & + e^{-\alpha_{n1}(L+\zeta)+\alpha_{n2}(L+\tilde{\lambda})} + \operatorname{sign}(\zeta - \tilde{\lambda}) e^{\alpha_{n1}\zeta - \tilde{\lambda}} \\
 & - \operatorname{sign}(\zeta - \lambda) e^{-2\beta_n L - \alpha_{n2}(\zeta - \tilde{\lambda})}] \\
 & + \frac{\alpha_{n2}}{\beta_n} [e^{-\alpha_{n1}(L-\tilde{\lambda})+\alpha_{n2}(L-\zeta)} - e^{-\alpha_{n1}(L+\lambda)+\alpha_{n2}(L+\zeta)} - \operatorname{sign}(\zeta - \tilde{\lambda}) e^{-\alpha_{n1}\zeta - \tilde{\lambda}} \\
 & \left. + \operatorname{sign}(\zeta - \tilde{\lambda}) e^{-2\beta_n L + \alpha_{n1}(\zeta - \tilde{\lambda})}] \right\} \varphi_n(\xi) \quad (4.3b)
 \end{aligned}$$

其中定义

$$\operatorname{sign}(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

不难导出, 环线电极的环管中总流量为

$$\begin{aligned}
 Q / \frac{I(r_2 - r_1)}{\pi\sqrt{\sigma\eta}} = & \left| \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 k_n \left[ -\frac{M}{\gamma_n^2} - \frac{1}{2\alpha_{n2}} \frac{1 - e^{-2\alpha_{n1}L}}{1 - e^{-2\beta_n L}} e^{\alpha_{n2}(L-\tilde{\lambda})} \right. \right. \\
 & \left. \left. \cdot (1 + e^{2\alpha_{n2}\tilde{\lambda}}) + \frac{1}{2\alpha_{n1}} \frac{e^{2\alpha_{n2}L} - 1}{1 - e^{-2\beta_n L}} e^{-\alpha_{n1}(L-\tilde{\lambda})} (1 + e^{-2\alpha_{n1}\tilde{\lambda}}) \right] \right| \quad (4.4)
 \end{aligned}$$

环线电极间的电势差为

$$\begin{aligned}
 \Delta\varphi / \frac{I}{2\pi\sigma(r_2 - r_1)} = & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2 k_n}{\beta_n} \left[ -\gamma_n^2 e^{-\beta_n(L-\tilde{\lambda})} \frac{1 - e^{-2\beta_n\tilde{\lambda}}}{1 - e^{-2\beta_n L}} \right. \\
 & \left. - \left( \frac{M^2}{2} + \gamma_n^2 \right) \frac{1 + e^{-2\beta_n L}}{1 - e^{-2\beta_n L}} \right] \quad (4.5)
 \end{aligned}$$

表 3 列出了方形截面的环管中, 不同的电极位置对流量的影响。结果表明, 在同样的  $M$  数下, 中心环线电极 ( $\tilde{\lambda} = 0$ ) 时的流量最大。

由于方程和边界条件都是线性的, 因此解 (4.3) 具有基本解的性质。任意  $s$  对环线

表 3 方形截面环线电极环管中的流量  $Q / \left[ \frac{I(r_2 - r_1)}{\pi\sqrt{\sigma\eta}} \right]$  ( $R_1 = 1, R_2 = 2, L = 0.5$ )

$M \backslash \tilde{\lambda}$	0	$\pm 1/6$	$\pm 1/4$	$\pm 1/3$
0.1	0.00130	0.00125	0.00119	0.00111
1.0	0.01294	0.01241	0.01180	0.01108
10	0.08881	0.08653	0.08376	0.08011
30	0.12770	0.12622	0.12435	0.12165

电极的解, 就是分别求解  $s$  个单对极时的解 (4.3) 式的叠加, 即对迴路总电流  $I \left( = \sum_{i=1}^s I_i \right)$  有

$$V_{\text{总}}(\xi, \zeta) = \sum_{i=1}^s \left( \frac{I_i}{I} \right) V_i(\xi, \zeta), \quad B_{\text{总}}(\xi, \zeta) = \sum_{i=1}^s \left( \frac{I_i}{I} \right) B_i(\xi, \zeta) \quad (4.6)$$

其中  $V_i, B_i$  即式 (4.3) 中  $\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}_i$  时的表达式,  $I_i$  是第  $i$  对电极环的迴路电流。 ( $I_i/I$ ) 相

当于权函数。如果引进连续分布的权函数,将式(4.6)的求和换成对 $\tilde{\lambda}$ 的积分,就可以讨论连续电极时的解,权重函数由电极边条件(2.5)确定。这时,问题化为解权函数的积分方程。从解的叠加性考虑可估计到,部分电极时,对称情况( $b=0$ )具有较大的流量。

## 五、讨 论

**1. 弥散效应** 在磁流体力学中,电流有沿外磁场取向的趋势,随着 $M$ 数的增加,这种趋势将会增强。Moffatt<sup>[14]</sup>通过一个简单的问题,比较明确地提出了在电势间断的壁面附近这种趋势在流场中产生的层状结构和弥散效应。层状特征已有清楚的研究<sup>[17,18]</sup>,我们将着重讨论弥散效应。

令 $L \rightarrow \infty$ ,由式(2.27),对部分电极的情况有

$$\left. \begin{aligned} V_{\infty}^1(\xi, \zeta) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2k_n}{\gamma_n^2} [e^{-\alpha_{n1}(\zeta-\lambda)} E_{n1} + e^{\alpha_{n2}(\zeta-\lambda)} E_{n2}] \varphi_n(\xi) \\ B_{\infty}^1(\xi, \zeta) &= -\frac{1}{\xi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2k_n}{\gamma_n^2} [e^{-\alpha_{n1}(\zeta-\lambda)} E_{n1} - e^{\alpha_{n2}(\zeta-\lambda)} E_{n2}] \varphi_n(\xi) \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

由式(4.3),对中心环线电极( $\tilde{\lambda}=0$ )的情况有

$$\left. \begin{aligned} V_{\infty}(\xi, \zeta) &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n k_n}{\beta_n} (\alpha_{n1} e^{\alpha_{n1}|\zeta|} + \alpha_{n2} e^{-\alpha_{n1}|\zeta|}) \varphi_n(\xi) \\ B_{\infty}(\xi, \zeta) &= \text{sign}(\zeta) \left[ -\frac{1}{\xi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n k_n}{\beta_n} (\alpha_{n1} e^{\alpha_{n1}|\zeta|} - \alpha_{n2} e^{-\alpha_{n1}|\zeta|}) \varphi_n(\xi) \right] \end{aligned} \right\} \quad (5.2)$$

公式(5.1)和(5.2)都表示,速度和电流要向电极面外( $\zeta > \lambda$ )弥散一段距离而逐渐衰减到零。如果定义弥散距离 $d$ 为速度和电流衰减 $e^{-1}$ 倍的距离,则其量级为

$$d/(r_2 - r_1) = \max [O(\alpha_{n1}^{-1}), O(\alpha_{n2}^{-1})] \quad (5.3)$$

对式(2.12)作渐近展开,在大 $M$ 数时就可以得到

$$d/(r_2 - r_1) = O(M/2\gamma_1^2) \quad (5.4)$$

在小 $M$ 数时可导出

$$d/(r_2 - r_1) = O(\gamma_1^{-1}) \quad (5.5)$$

计算结果与式(5.4), (5.5)是一致的,图3计算了速度分布的弥散特征。

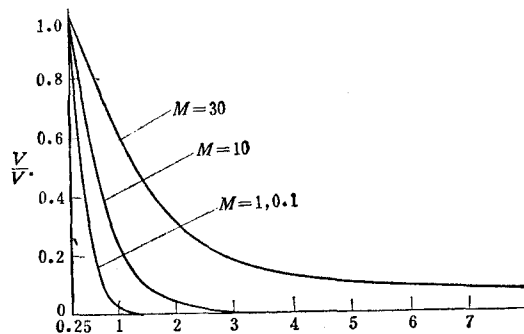


图3 速度的弥散特征  
 $R_1 = 1, R_2 = 2, \lambda = 0.25, L \rightarrow \infty, N = 12$   
 $\xi = 1.4, V^* = V(1.4, 0.25)$

如果 $L$ 有限,当 $L - \lambda < d/(r_2 - r_1)$ 时,就会形成明显的哈特曼边界层。

**2. 哈特曼边界层** 当 $M$ 数很大时,电流有很强的趋势不与外磁场交叉。如果有端壁阻止电流沿外磁场方向流动(即弥散效应不充分时),电流就会集中在靠近壁面的薄层中产生很大的洛伦茨力来克服粘性力,从而形成明显的哈特曼边界层,边界层内有很大的速度梯度。在式(2.27)中,每一项都包含有因子 $[1 - e^{-\beta_n \lambda(L-\zeta)}]$ ,它表示会有边界层存

在；每一项还含有因子  $e^{-\alpha n_1(\xi-\lambda)}$  或  $e^{\alpha n_2(\xi-\lambda)}$ ，它表示弥散效应使哈特曼边界层的厚度增加。如果不考虑弥散效应的影响，可以给出边界层厚度  $\delta$  的量级为

$$\frac{\delta}{r_2 - r_1} = O(\beta^{-1}) = O\left(\frac{1}{M} \frac{1}{\sqrt{1 + (2r_1/M)^2}}\right) \quad (5.6)$$

它与全电极管道中估计的  $O(1/M)$  差不多。但要指出的是，哈特曼边界层的厚度是以环管间隙度量的，而弥散效应可能极大地改变哈特曼边界层的结构。在图 4 中，我们给出了方形截面环管中几个典型参数下的速度轴向分布形状，它们都明显地表明有哈特曼边界层。可以看出，当  $L - \lambda > d/(r_2 - r_1)$  时，哈特曼边界层就消失了。

**3. 环管内的流动特征** 1) 部分电极结构对环管流量的影响：流量是一个总合效应的参数。我们先讨论方形环管中部分电极结构（这时弥散效应还不充分）对流量的影响。表 4 列出了一些计算结果，其中  $\lambda = 0$  相当于环线电极， $\lambda = 0.5$  相当于全电极的情形。结果表明，对于同样几何截面， $M$  数和  $I$ ，部分电极结构使流量增加。小  $M$  数时，最多可比全电极时增加 11%； $M = 30$  时，可增加 7%。

当环管中存在比较充分的弥散效应时就达到了饱和流量，这时流量不再随  $L$  的增加而增大。对于  $L = 5, M = 30$ ，部分电极结构最多可使流量增大 26%，这时电极电势差亦有所增加。

2) 部分电极结构对于二次流的控制：全电极单极机中常出现二次流<sup>[19-21]</sup>（[21] 中将三个独立参数取成四个，其结果有错误），而许多应用问题中都希望控制二次流。在部分电极单极机中，如果弥散作用很充分，哈特曼边界层就消失了，这时就不会出现二次流。一般地，部分电极时存在着的弥散效应可以改善哈特曼边界层的结构，从而改善单极机中的二次流。当然，强磁场对二次流也有一定的抑制作用<sup>[4]</sup>。

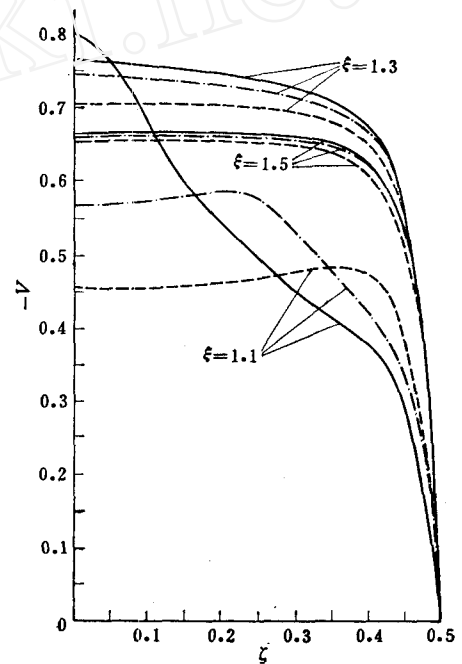


图 4 方形环管中的速度分布  
 $R_1 = 1, R_2 = 2, M = 30, L = 0.5$   
---全电极, —线电极, -·-部分电极 ( $\lambda = 0.25$ )

表 4 方形环管中的流量  $Q / \left[ \frac{I(r_2 - r_1)}{\pi \sqrt{\sigma \eta}} \right]$  ( $R_1 = 1, R_2 = 2, L = 0.5$ )

$M \backslash \lambda$	0	0.10	0.25	0.40	0.50	$\frac{Q_{\lambda=0}}{Q_{\lambda=0.5}} - 1$
0.1	0.00130	0.00129	0.00124	0.00118	0.00117	0.11
1.0	0.01294	0.01281	0.01232	0.01177	0.01166	0.11
10	0.0888	0.0882	0.0856	0.0817	0.0805	0.10
30	0.1277	0.1272	0.1253	0.1217	0.1197	0.07

3) 关于电极边界层: 在电极面与绝缘面交界附近的流体区域中, 局部电流密度较大, 速度就有较大的值。速度径向分布的峰值随 $M$ 数的增加而逐渐地向内电极附近移动。这时, 电极面附近有很明显的电极边界层存在。电极边界层在整个径向边壁附近是不均匀的, 部分电极时更是不均匀, 环线电极时最不均匀。

4) 环管截面长宽比的影响: 在同样的 $M$ ,  $I$ 值和相似的电极结构下, 速度随 $L$ 的增大而减小, 但其减少速率比线性变化要缓慢, 因此总流量将随 $L$ 的增加而增大。这主要是因为 $L$ 增大以后, 哈特曼边界层的结构发生了一些改变。当弥散效应很充分以后,  $L$ 增大时流量基本不变。利用相似关系(2.6), 可讨论许多相似特征。

5) 小 $M$ 数时( $M \ll 1$ ), 用渐近展开的方法可得到转速与 $M$ 成正比的结论(全电极分析见[5])。我们的计算结果表明, 这种线性关系一直保持到 $M \sim 1$ 。  $M$ 再继续增加, 速度的增加速率变缓。这个结论在表2—4中都可看出。

4. 关于截断处理的物理含意 在数学上, 由衔接条件得到 $2n$ 个方程(2.23), 由电极边界条件得到 $(2m+1)$ 个方程(2.25)。对这 $2n+2m+1$ 个方程作截断处理, 也就包含对衔接条件导出的线性代数方程作截断处理和对电极边界条件导出的方程作截断处理。如果对电极边界条件作截断处理, 在物理上相当于将准确的无穷电导的电极边界条件(2.4)或(2.24)代换成一个有限电导率的电极边界条件。或者说, 式(2.3)中 $B(R_i, |\zeta| < \lambda)$ 的电极边界条件当级数为无穷项时恰好满足了无穷电导率的边界条件, 而截断处理后得到的有限项级数就不再严格满足无穷电导的边界条件了。但是, 计算表明这个级数的收敛性还比较好, 所以截断处理的电极边界条件基本上是很接近无穷电导率的, 或者说电极电导率是很大的。一旦电极边界条件给定了, 亨克变换实际上就是对函数作贝塞耳-福利叶展开, 其余项的误差在数学上是可以分析的。

我们通过一些具体实例的数值实验, 可以大致估计出不同的截断项数对于电极边值的影响。作为一个总的校验, 从图2可以看出, 我们选用12项作截断处理的结果, 与无穷电导率的电极边值的结果相差甚微。当然, 项数再多一些, 截断的结果一定会更好一些。

在实际的装置中, 电极材料当然都是有限电导率而不是无限电导率。无穷电导率的电极边值是一种理想的条件。通过研究这类问题, 比较便于研究单极机内部的物理机制。作截断处理所得到的有限的、大电导率电极边界条件是实际问题的很好近似。

本文讨论的部分电极单极机的性质表明, 它对于增大单极机的总流量, 改进哈特曼边界层, 控制二次流都有一定的好处。理论的分析可以进一步理解单极机的机理, 对于单极机的实际应用也有一定的价值。

陈允明、荣陞、徐方源等同志给予许多帮助, 谨致谢意。

## 参 考 文 献

- [1] Гордеев, Г. В., Ж. Т. Ф., 28, 9 (1958), 2046.
- [2] Lewellen, W. S., Proceedings of the Heat Transfer and Fluid Mech. Inst. (Mason, D. M., Reynolds, W. C., & Vincenti, W. G., ed), Stanford Univ. Press (1960), 1.
- [3] Брагинский, С. И., Ж. Э. Т. Ф., 37, 5 (1959), 1417.
- [4] Baylis, J. A., Hunt, J. C. R., J. Fluid Mech., 48, 3 (1971), 423.
- [5] Яргин, В. С., Ж. Т. Ф., 32, 7 (1962), 883.
- [6] 张捷迁, Lundgren, T. S., Phys. Fluid, 2, 6 (1959), 627.

- [7] Kessey, K. O., *AIAA J.*, **2**, 5 (1964), 864.  
[8] Alpher, R. A., Hurwitz, H., *Rev. Mod. Phys.*, **32**, 4 (1960), 758.  
[9] Lewellen, W. S., *Phys. Fluid*, **5**, 12 (1962), 1663.  
[10] Гордеев, Г. В., *Ж. Т. Ф.*, **31**, 3 (1961), 271.  
[11] Hsueh, P. C., Altman, M., *AIAA paper*, 69-726 (1969).  
[12] Schwertzer, S., Soler, A. I., *AIAA paper*, 69-725 (1969).  
[13] Schwertzer, S., Soler, A. I., *J. Franklin Inst.*, **289**, 6 (1970), 445.  
[14] Moffatt, H. K., 引自 “*Appl. Mech.*”, Proceedings 11th Intern. Cong. (Görtler, H. 编), Berlin, Springer (1966).  
[15] Sneddon, I. N., 富利叶变换, 科学出版社(1958).  
[16] Tranter, C. J., 数学物理中的积分变换, 高等教育出版社(1959).  
[17] Hunt, J. C. R., Williams, W. E., *J. Fluid Mech.*, **31**, 4 (1968), 705.  
[18] Stewartson, K., 引自 “*La Magnétohydrodynamique Classique et Relativiste*” (Lille 编, 1969).  
[19] Hanson, J. P., Cohen, I. M., NASA-CR-109 (1970).  
[20] Ганницкий, А. И., Дробышевский, Э. М., Резец, С. И., *Ж. Т. Ф.*, **38**, 12 (1968), 2070.  
[21] Ганницкий, А. И., Чекирезов, И. Б., *Ж. Т. Ф.*, **41**, 1 (1971), 207.  
[22] 胡文瑞, *力学*, 4 (1977), 283.

## THE THEORY OF ONE-DIMENSIONAL MAGNETOHYDRO-DYNAMIC FLOW FOR HOMOPOLAR WITH INCOMPLETE ELECTRODES

Hu Wen-rui

(*Institute of Mechanics, Academia Sinica*)

### Abstract

Using the methods of undetermined boundary value of electrode wall and smooth conjunction with solutions of different regions, the solution of one-dimensional magnetohydrodynamic flow for the homopolar with incomplete electrodes is given. The homopolar with the annular wire electrodes and with complete electrodes are studied as examples. The flow field and induced magnetic field are calculated for some typical parameters, and all results agree with those obtained by finite difference method both in magnitude and in distribution of the fields. The typical magnetohydrodynamic phenomena of the effect of current dispersion and the Hartmann boundary layer are analysed with some emphasis, and the flow behavior in homopolar is discussed by using above concepts. The results show that, the use of electrode of incomplete structure can increase the flow quantity, modify the Hartmann boundary layer, and control the secondary flow. These effects can be utilized in practical applications.