

化定律^[3]知

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} = C \quad (14)$$

式中 C 为常数。根据式(10)即得天体沿圆锥曲线轨道运行的统一的能量方程

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} = \frac{GMm(e^2 - 1)}{2p} \quad (15)$$

由式(15)可得：对于椭圆轨道

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} = -\frac{GMm}{2a} \quad (16)$$

对于抛物线轨道

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} = 0 \quad (17)$$

对于双曲线轨道

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} = \frac{GMm}{2a} \quad (18)$$

应用式(16)可求出第一宇宙速度公式,对于圆轨道 $a=r$, 得 $v_1 = \sqrt{GM/r}$. 应用式(17)可求出第二宇宙速度公式 $v_{II} = \sqrt{2GM/r}$.

由式(8), (9), (15)即得通常需解微分方程的天体沿圆锥曲线轨道运行的离心率公式^[4]

$$e = \sqrt{1 - \frac{r^2 v^2 \sin^2 \alpha}{G^2 M^2} \left(\frac{v}{r} - v^2 \right)} \quad (19)$$

将 v_1 和 v_{II} 代入式(19)即得

$$e = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha \left(\frac{v}{v_1} \right)^2 \left[2 - \left(\frac{v}{v_1} \right)^2 \right]} \quad (20)$$

$$e = \sqrt{1 - 4 \sin^2 \alpha \left(\frac{v}{v_{II}} \right)^2 \left[1 - \left(\frac{v}{v_{II}} \right)^2 \right]} \quad (21)$$

根据式(19), (20), (21)即可讨论发射人造地球卫星时的各类轨道。在地面上, 以速度 v ($v < v_{II}$), 角度 α ($\alpha \neq 0$) 发射一洲际弹道火箭。假定地球是球对称, 半径为 R , 且忽略地球自转的影响和空气阻力。根据式(19)即可求出洲际弹道火箭轨道的离心率 $e < 1$, 轨道为一椭圆。根据式(16)即可求出轨道的长半径 a , 于是可求出弹道高 H 和射程 L (图2):

$$H = a(1 + e) - R \quad (22)$$

$$L = 2R \arcsin \left[\frac{1}{e} \left(\frac{v}{v_{II}} \right)^2 \sin 2\alpha \right] \quad (23)$$

以什么速度 v_0 和角度 α_0 发射一洲际弹道火箭, 使之能从 K_1 点击中 K_2 点, 且使所用的能量最小呢? 根据式(16)知, 最小能量轨道是通过 K_1 和 K_2 两点的诸椭圆轨道中, 长半径 a 为最小的轨道。由图2可知 $a = (R + D)/2$, 欲使 a 最小, 即应使 D 最小。 D 的最小值 D_0 应是从 K_1 到 AB 的垂直距离(图3)。如果 K_1 和 K_2 已定, 则角度 β 即可求得。根据几何关系可求得

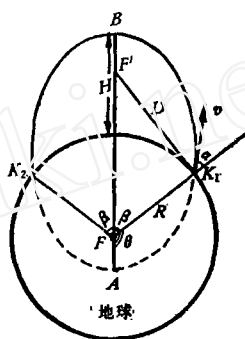


图 2

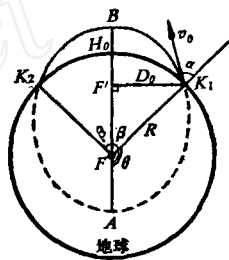


图 3

$$\alpha_0 = 45^\circ + (\beta/2) \quad (24)$$

$$D_0 = R \sin \beta \quad (25)$$

$$a_0 = R(1 + \sin \beta)/2 \quad (26)$$

将式(26)代入能量方程(16)即得

$$v_0 = v_{II} \sqrt{\sin \beta / (1 + \sin \beta)} \quad (27)$$

参 考 文 献

- [1] Livesey, D. L., *Am. J. Phys.*, **30** (1962), 629.
- [2] 易照华, 天体力学教程, 上海科学技术出版社 (1961).
- [3] 周衍柏, 理论力学, 江苏人民出版社 (1961), 117-118.
- [4] 钱学森, 星际航行概论, 科学出版社 (1963), 125.

(1978年6月5日收到)

一个数学红细胞

彭 荣 葵

(中国科学院力学研究所)

红细胞几何形状是一个历史较久的基本研究题目。由于观测方法的改进, 目前它的真实面貌已经比较清楚地被揭示了出来^[1]。在此基

基础上,研究工作也逐渐深入了。

本文从卡西尼卵形线^[2]出发,引入特征半径 a , 形状系数 K 和厚度系数 L 这三个参数,得到了一个新的数学红细胞,经与文献[1]的数学红细胞比较,结果相近。我们得到的一般方程为

$$(x^2 + Lz^2)^2 - 2a^2(x^2 - L^2z^2) - a^4(K^4 - 1) = 0 \quad (1)$$

由方程(1)可以确定: 曲线与 x 轴交于点 $(\pm a\sqrt{K^2 + 1}, 0)$; 与 z 轴交于(极小值)点

$$(0, \pm \frac{a}{L}\sqrt{K^2 - 1}); \text{极大值点} \left(\pm \frac{a}{2}\sqrt{4 - K^4}, \pm \frac{aK^2}{2L} \right); \text{拐点} \left(\pm a\sqrt{\frac{\sqrt{2}\lambda - \lambda^2}{2}}, \pm \frac{a}{L}\sqrt{\frac{\sqrt{2}\lambda + \lambda^2}{2}} \right), \lambda = \sqrt{\frac{K^4 - 1}{6}}$$

我们的数学红细胞即上述平面曲线绕 z 轴旋转而成的迴转面。由此不难得到其体积 V 和表面积 S :

$$V = \frac{2\pi a^3}{L} \left[\frac{4 - K^2}{3} \sqrt{K^2 - 1} + \frac{\pi}{4} K^4 - \sqrt{K^2 - 1} \cdot \sqrt{\frac{K^4}{4} - (K^2 - 1)} - \frac{K^4}{4} \arcsin \frac{2\sqrt{K^2 - 1}}{K^2} \right] \quad (2)$$

$$S = \frac{4\pi a^2}{L} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \theta (\cos 2\theta + \sqrt{\cos^2 2\theta + K^4 - 1})}{\sqrt{\sin^2 \theta + L^2 \cos^4 \theta}} \sqrt{L^2 + \left[\frac{\sin 2\theta (\sin^2 \theta + L^2 \cos^4 \theta)}{\sqrt{\cos^2 2\theta + K^4 - 1}} + (L^2 - 1) \sin \theta \cos \theta \right]^2} d\theta \quad (3)$$

目前国外已能较准确地测得红细胞的直径 D , 最小厚度 δ_{\min} 和最大厚度 δ_{\max} 。由此即可简捷地确定三个参数

$$K = \sqrt{2\Delta(\Delta - \sqrt{\Delta^2 - 1})} \quad (\Delta = \delta_{\max}/\delta_{\min})$$

$$a = \frac{D}{2\sqrt{K^2 + 1}} \quad L = \frac{aK^2}{\delta_{\max}} \text{ 或 } \frac{2a\sqrt{K^2 - 1}}{\delta_{\min}}$$

这样,数学红细胞的全部几何学问题就确定了。结果见表1和图1—3。

表1 本文值与文献值的比较

		D (μm)	δ_{\max} (μm)	δ_{\min} (μm)	S (μm^2)	V (μm^3)	K	a (μm)	L
1	文 [1] 值	7.82	2.58	0.81	135±16	94±14	1.01	2.75	1.09
	本文值				131.72	98.2			
2	文 [1] 值	7.59	3.30	2.10	135±13	116±16	1.06	2.60	0.89
	本文值				132.15	120.34			
3	文 [3] 值	9.083	2.367	0.751	175.34±20	119.87±17	1.01	3.19	1.38
	本文值				166.18	121.61			
4	文 [3] 值	9.372	2.449	1.086	184.42	129.08	1.03	3.27	1.41
	本文值				177.29	134.86			
5	文 [3] 值	9.386	2.456	0.9716	182.00	132.38	1.02	3.28	1.39
	本文值				177.75	135.30			
6	文 [3] 值	9.168	2.510	1.0281	178.01	130.03	1.02	3.20	1.34
	本文值				171.59	132.02			
7	文 [4] 值	7.3	1.7	1.0			1.05	2.52	1.64
	本文值				105.53	57.23			
8	文 [4] 值	5.2	1.9	1.0			1.04	1.80	1.02
	本文值				59.51	32.36			

注: 文[1]值——人的红细胞平均值; 文[3]值——人的红细胞极值; 文[4]值——兔、羊的红细胞平均值。

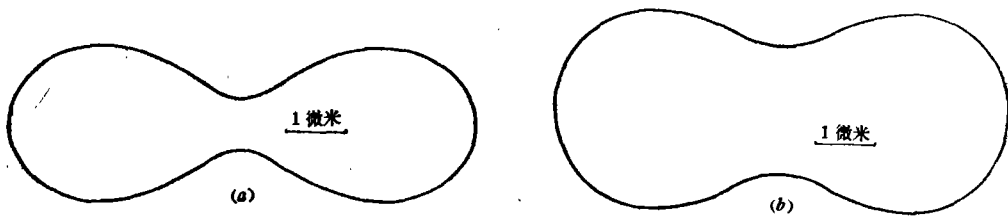


图1 人体(平均)红细胞模型^[1]

(a) $K = 1.01, a = 2.75, L = 1.09$ (b) $K = 1.06, a = 2.60, L = 0.89$

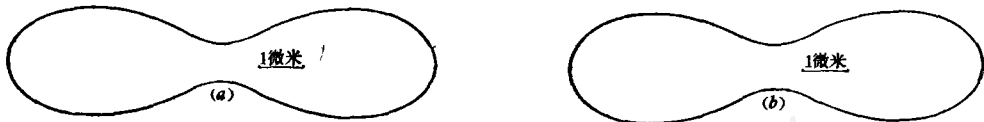


图2 人体(极值)红细胞模型^[2]

(a) $K = 1.02, a = 3.28, L = 1.39$ (b) $K = 1.02, a = 3.33, L = 1.45$



图3 动物(平均)红细胞模型^[4]

(a) 兔: $K = 1.05, a = 2.52, L = 1.64$ (b) 羊: $K = 1.04, a = 1.80, L = 1.02$

参 考 文 献

- [1] Evans, E. A. and Fung, Y. C. (冯元祯), *Microvasc. Res.*, 4(1972), 335—347.
 [2] 斯米尔诺夫著(孙念增译), 高等数学教程, 第一卷第一分册, 商务印书馆, p.200.
 [3] Peter, C. Y. Chen and Fung, Y. C. (冯元祯),

- Microvasc. Res.*, 6(1973), 32—43.
 [4] Ponder, E., *Quart. J. Exp. Physiol.*, 20(1930), 29—39.

(1978年9月1日收到)