

电磁离心分离装置的三元流理论

胡文瑞

(中国科学院力学研究所)

电磁离心分离装置利用外加电磁场驱动混合气体,产生有利于分离效应的高速旋转流场。这种原理可应用于气态核反应堆、气态核火箭的燃料约束,以及同位素(特别是重同位素)的分离。过去的分析都限于二元轴对称流动,流动进出口的条件未很好处理。本文分析三元流场,用小磁雷诺数展开得到了渐近解,求出了零阶量的分布。本文计算了分离系数,并一般地讨论了这种分离装置的基本性质。

一、前言

利用旋转流体制冷或分离是很早的想法。近来,人们提出用旋转流体的方法约束气态反应堆和核火箭中的核燃料^[1]。早期的方案采用切向喷注混合气体的方法^[2,3,4]。为克服被动的喷注,进而提出用外加电磁场驱动的原理^[5~8]。

另一方面,机械离心分离同位素的装置有不少优点^[9],已建成中间工厂,受到广泛重视^[10]。由于材料强度的限制,机械离心装置中转筒的强度难于提高。为了克服转速的限制,人们提出用电磁场加速导电介质的离心式分离同位素的方法,并进行了一些理论和实验的探讨^[11~16]。这种方法没有转动部件,结构比较简单。

电磁场驱动等离子体旋转的理论基础是磁流体力学环管流动理论,研究得比较多的是不可压缩导电流体的单极机流动。由于考虑了粘性效应,可以提出完整的边值问题解^[17]。在混合气体的分离问题中,旋转流体是等离子体。无粘性假设不能满足边壁处的无滑移条件,只能看成是一种近似处理。分析工作大多限于二维轴对称流场,没有讨论轴向流动的变化。本文分析三维轴对称问题,特别讨论轴向进口条件对流场的影响。它相当于某种同流式的分离装置。根据流场分布,还讨论了单级分离系数的分布,以及对电磁离心分离装置的设想。

二、方程组和基本假设

讨论三元轴对称模型。气体从轴向流进、流出,进出口都是多孔的绝缘壁。半径方向是两个同心的柱形电极边界,电极面看成是理想导体。两个电极面与外电阻和电源相联结。外加均匀的轴向磁场。图1是示意的结构。

我们假设:气体流动是定常轴对称的,即 $\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \theta} = 0$;导电介质为二组元混合气体;不考虑粘性和热传导效应,电导率 σ 假设为标量常数;气体是连续介质,等离子体迴旋频

率远小于碰撞频率；磁雷诺数不大；无化学反应，各组元的生成率为零。在这些假设下，柱坐标系中的基本方程组表示为：

$$\nabla \cdot (\rho^* \vec{v}^*) = 0, \quad (2.1)$$

$$\rho^* \vec{v}^* \cdot \nabla \vec{v}^* = -\nabla^* p^* + \vec{j}^* \times \vec{B}^*, \quad (2.2)$$

$$\rho^* \frac{dh^*}{dt^*} + \nabla^* \cdot \vec{q}^* = \sum_{i=1}^2 \nabla^* \cdot [\rho_i^* h_i^* (\vec{v}^* + \vec{v}_i^*)], \quad (2.3)$$

$$\nabla^* \times (\vec{v}^* \times \vec{B}^*) + \frac{1}{\sigma \mu_e} \Delta^* \vec{B}^* = 0, \quad (2.4)$$

$$\vec{j}^* = \sigma (\vec{E}^* + \vec{v}^* \times \vec{B}^*), \quad (2.5)$$

$$\nabla^* \cdot [\rho_i^* (\vec{v}^* + \vec{v}_i^*)] = 0, \quad i=1,2, \quad (2.6)$$

$$\vec{v}_1^* - \vec{v}_2^* = -\frac{n^*}{n_1^* n_2^*} D_{12} \left[\nabla^* \left(\frac{n^*}{n^*} \right) + \frac{n_1^* n_2^* (m_2^* - m_1^*)}{n^* \rho^* p^*} \nabla^* p^* \right]. \quad (2.7)$$

它们分别是连续方程，运动方程，能量方程，磁感应方程，欧姆定律，组元连续方程和扩散关系。方程组中的 $\rho^*, n^*, p^*, T^*, h^*$ 为密度，数密度，压力、温度和焓值； $\vec{v}^*, \vec{E}^*, \vec{B}^*, \vec{j}^*$ 为速度，电场，磁场和电流矢量。在推导能量方程(2.3)时，要利用 $\vec{q}^* = \sum_{i=1}^2 \rho_i^* h_i^* \vec{v}_i^*$ 。

扩散系数 D_{12} 可取为^[18]：

$$D_{12} = \frac{3}{8 n^* \sigma_{12}} \left[\frac{kT^* (m_1^* + m_2^*)}{2 \pi m_1^* m_2^*} \right]^{1/2}. \quad (2.8)$$

上标 * 表示有量纲量，下标 0 代表进口值或典型值。将方程无量纲化，取

$$\left\{ \begin{aligned} \rho &= \frac{\rho^*}{\rho_0^*}, & p &= \frac{p^*}{\rho_0^* U_e^2}, & T &= \frac{T^*}{T_0^*}, & u &= \frac{u^*}{u_0^*}, & v &= \frac{v^*}{U_e}, & w &= \frac{w^*}{w_0^*}, \\ \vec{v}_i &= \frac{\vec{v}_i^*}{w_0}, & \vec{E} &= \frac{\vec{E}^*}{E_0^*}, & \vec{B} &= \frac{\vec{B}^*}{B_0^*}, & \vec{j} &= \frac{\vec{j}^*}{\sigma E_0^*}, & n &= \frac{n^*}{n_0^*}, & n_i &= \frac{n_i^*}{n_0^*}, \\ m &= \frac{m_i^* n_0^*}{\rho_0^*}, & \gamma &= \frac{C_p}{C_v}, & r &= \frac{r^*}{r_0^*}, & z &= \frac{z^*}{r_0^*}, & U_e &= \frac{E_0^*}{B_0^*}, & \alpha &= \frac{w_0^*}{U_e}, \\ \beta &= \frac{u_0}{U_e}, & R_m &= \sigma \mu_e r_0^* U_e, & \delta &= \frac{\sigma r_0^* B_0^{*2}}{\rho_0^* w_0^*}, & M_{e0}^2 &= \frac{U_e^2}{\gamma R T_0^*}, \\ M_{i0}^2 &= M_{e0}^2 \left(1 - \frac{m_2^* - m_1^*}{m_2^*} \frac{\rho_{20}^*}{\rho_0^*} \right), & D &= \frac{3}{8 r_0^2 n_0^* w_0^* \sigma_{12}^2} \left[\frac{kT_0^* (m_1^* + m_2^*)}{2 \pi m_1^* m_2^*} \right]^{1/2}. \end{aligned} \right. \quad (2.9)$$

把(2.9)代入(2.1)~(2.7)，就导出无量纲方程组为

$$\frac{\beta}{r} \frac{\partial(\rho u r)}{\partial r} + \alpha \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0, \quad (2.10)$$

$$\rho \left(\beta u \frac{\partial u}{\partial r} + \alpha \beta w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{v^2}{r} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \alpha \delta [B_z (E_\theta + \alpha w B_r - \beta u B_z) - B_\theta (E_z + \beta u B_\theta - v B_r)], \quad (2.11)$$

$$\rho \left(\beta u \frac{\partial v}{\partial r} + \alpha w \frac{\partial v}{\partial z} + \beta \frac{uv}{r} \right) = \alpha \delta [B_r (E_z + \beta u B_\theta - v B_r) - B_z (E_r + v B_z - \alpha w B_\theta)], \quad (2.12)$$

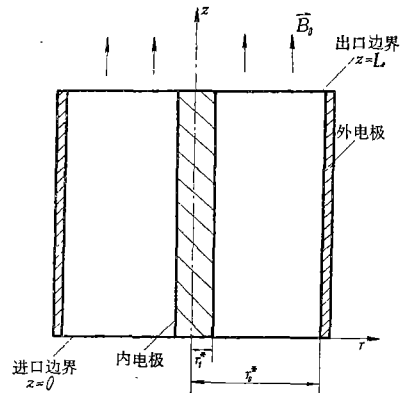


图1 电磁离心分离装置的原理示意图
取极坐标 (r, θ, z) 。

$$\rho \left(\alpha \beta u \frac{\partial w}{\partial r} + \alpha^2 w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \alpha \delta [B_\theta (E_r + v B_z - \alpha w B_\theta) - B_r (E_\theta + \alpha w B_r - \beta u B_z)], \quad (2.13)$$

$$\Delta B_r - \frac{B_r}{r^2} = -R_m \frac{\partial}{\partial z} (\alpha w B_r - \beta u B_z), \quad (2.14)$$

$$\Delta B_\theta - \frac{B_\theta}{r^2} = R_m \frac{\partial}{\partial z} (v B_z - \alpha w B_\theta) - R_m \frac{\partial}{\partial r} (\beta u B_\theta - v B_r), \quad (2.15)$$

$$\Delta B_z = R_m \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r (\alpha w B_r - \beta u B_z)], \quad (2.16)$$

$$\sum_{i=1}^2 \left(\frac{C_{pi} T_0^*}{U_e^2} \right) \left[\frac{1}{r} \frac{\partial r \rho_i (\beta u + \alpha u_i) T}{\partial r} + \alpha \frac{\partial \rho_i (w + w_i) T}{\partial z} \right] = \beta u \frac{\partial p}{\partial r} + \alpha w \frac{\partial p}{\partial z} + \alpha \delta [(E_r + v B_z - \alpha w B_\theta)^2 + (\alpha w B_r - \beta u B_\theta)^2 + (E_z + \alpha u B_\theta - v B_r)^2], \quad (2.17)$$

$$p = \frac{\rho T}{\gamma M_{10}^2} \left(1 - \frac{m_2 - m_1}{m_2} \frac{\rho_2}{\rho} \right), \quad (2.18)$$

$$\bar{v}_1 - \bar{v}_2 = -D \left[\frac{1}{n_2} \nabla \ln \left(\frac{n_1}{n} \right) + \frac{m_2 - m_1}{\rho} \nabla \ln p \right], \quad (2.19)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r \rho_i (\beta u + \alpha u_i)] + \alpha \frac{\partial}{\partial z} [\rho_i (w + w_i)] = 0, \quad (2.20)$$

$$\rho = \rho_1 + \rho_2 = m_1 n_1 + m_2 n_2. \quad (2.21)$$

无量纲方程(2.10)~(2.21)是完备的方程组,可以在适当边界条件下求解。要准确求解这12个方程是困难的,我们可以求渐近解。

三、磁场强度的分布

电流密度应同时满足安培定律和欧姆定律,它们的无量纲形式可分别表示为

$$\vec{j} = \frac{1}{R_m} \nabla \times \vec{B}, \quad (3.1)$$

$$\vec{j} = \vec{E} + \frac{1}{U_e} \vec{v}^* \times \vec{B}. \quad (3.2)$$

鉴于不太小的 U_e , (3.2)式给出量级关系 $j = O(1)$ 。这样,由(3.1)式可估计出:

$$|\nabla \times \vec{B}| = O(R_m). \quad (3.3)$$

在实验室条件,一般的磁雷诺数 $R_m \ll 1$ 。可以取 R_m 为小参数,将未知函数展开成 R_m 的级数:

$$f(r, z) = \sum_{i=0}^{\infty} f^{(i)}(r, z) R_m^i. \quad (3.4)$$

将(3.1)式展开,零阶磁场满足势场关系:

$$\nabla \times \vec{B}^{(0)} = 0. \quad (3.5)$$

在(2.9)式中有三个特征速度 U_e, w_0^*, u_0^* ,相应地有三个特征雷诺数 $R_m, \alpha R_m, \beta R_m$ 。将磁感应方程(2.14)~(2.16)对小磁雷诺数 R_m 展开,就推导出:

$$\sum_{i=0}^{\infty} R_m^i \left[\Delta B_r^{(i)} - \frac{B_r^{(i)}}{r^2} \right] = - \sum_{i=0}^{\infty} R_m^{i+1} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \sum_{l=0}^i [\alpha w^{(l)} B_r^{(i-l)} - \beta u^{(l)} B_z^{(i-l)}] \right\}, \quad (3.6)$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} R_m^i \left[\Delta B_{\theta}^{(i)} - \frac{B_{\theta}^{(i)}}{r^2} \right] = \sum_{i=0}^{\infty} R_m^{i+1} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \sum_{l=0}^i [v^{(l)} B_z^{(i-l)} - \alpha w^{(l)} B_{\theta}^{(i-l)}] \right\} - \sum_{i=0}^{\infty} R_m^{i+1} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \sum_{l=0}^i [\beta u^{(l)} B_{\theta}^{(i-l)} - v^{(l)} B_r^{(i-l)}] \right\}, \quad (3.7)$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} R_m^i \Delta B_z^{(i)} = \frac{1}{r} \sum_{i=0}^{\infty} R_m^{i+1} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r \sum_{l=0}^i [\alpha w^{(l)} B_r^{(i-l)} - \beta u^{(l)} B_z^{(i-l)}] \right\}. \quad (3.8)$$

求各阶感应方程(3.6)~(3.8)的解, 需给定适当的磁场边界条件。在本问题中, 边界条件可给为:

$$\vec{B} = \vec{e}_z, \quad \text{当 } |\vec{r}| \gg 1 \text{ 时}, \quad (3.9)$$

其中 \vec{e}_z 为单位轴向矢量。将(3.9)式展开, 就得到

$$\vec{B}^{(0)} = \vec{e}_z, \quad \vec{B}^{(i)} = 0 \quad (i \geq 1), \quad \text{当 } |\vec{r}| \gg 1 \text{ 时}. \quad (3.10)$$

再给出理想导体和理想绝缘体的磁场边界条件, 就能求出各阶磁场强度的解。

零阶方程(3.5)式中不包含流场, 即小磁雷诺数时流场不影响基态磁场。考虑到分离装置边界的磁场是连续的, 由(3.10)式就得到(3.5)式的解为:

$$B_z^{(0)} = 1, \quad B_r^{(0)} = B_{\theta}^{(0)} = 0. \quad (3.11)$$

这就是通常小磁雷诺数假设时磁场强度取外加的轴向均匀场。

由式(3.6)~(3.8)可类似地得到一阶磁场的方程为:

$$\Delta B_r^{(1)} - \frac{B_r^{(1)}}{r^2} = \beta \frac{\partial u^{(0)}}{\partial z}, \quad \Delta B_{\theta}^{(1)} - \frac{B_{\theta}^{(1)}}{r^2} = \frac{\partial v^{(0)}}{\partial z}, \quad \Delta B_z^{(1)} = \frac{\beta}{r} \frac{\partial r u^{(0)}}{\partial r}. \quad (3.12)$$

一般而言, $\vec{B}^{(1)}$ 不恒为零。在 $\beta \ll 1$ 时, 由式(3.10)得到:

$$B_r^{(1)} = B_z^{(1)} = 0. \quad (3.13)$$

但是, 除非 $\frac{\partial v^{(0)}}{\partial z} = 0$, $B_{\theta}^{(1)}$ 将不会为零。如果假设 $\frac{\partial w}{\partial z} = 0$, 又同时要求 $B_{\theta} \neq 0$, 这只能在特殊的边界条件下才有可能^[5]。一旦给定了零阶流场, 就可由一阶感应方程(3.12)和适当边界条件求 $\vec{B}^{(1)}$ 。

上述讨论同时满足了安培定律和欧姆定律。利用这种小参数展开方法可得到磁场量级为:

$$B_r = O(\beta R_m), \quad B_{\theta} = O(R_m), \quad B_z = 1 + O(\beta R_m). \quad (3.14)$$

四、流场分析

在我们分析的问题中, 可以假设 $\beta \ll 1$ 。这可以先对小参数 β 展开, 再对 R_m 展开。讨论 β 的零阶量的渐近解, 这使问题大为简化。

装置进口处的边界条件为:

$$\rho(r, 0) = 1, \quad w(r, 0) = 1, \quad v(r, 0) = 0, \quad p(r, 0) = \frac{1}{\gamma M_{\theta}^2}. \quad (4.1)$$

进口时转速为零, 流体在分离装置内被电磁力驱动而加速, 建立强的压力梯度使混合气体分离。将(4.1)式对 R_m 展开, 得到各阶边值为:

$$\begin{cases} \rho^{(0)}(r, 0)=1, w^{(0)}(r, 0)=1, p^{(0)}(r, 0)=\frac{1}{\gamma M_{e0}^2}, v^{(i)}(r, 0)=0, & (i \geq 0) \\ \rho^{(i)}(r, 0)=0, w^{(i)}(r, 0)=0, p^{(i)}(r, 0)=0. & (i \geq 1) \end{cases} \quad (4.2)$$

连续方程 (2.10) 满足进口条件 (4.2) 的解为:

$$\rho^{(0)}(r, z)w^{(0)}(r, z)=1. \quad (4.3)$$

轴对称时 $E_\theta=0$, 由切向运动方程 (2.12) 可得到:

$$\rho^{(0)}w^{(0)}\frac{\partial v^{(0)}}{\partial z}=-\delta(E_r^{(0)}+v^{(0)}). \quad (4.4)$$

利用解 (4.3), 由进口条件 (4.2) 可求出 (4.4) 式的解为

$$v^{(0)}(r, z)=-\delta e^{-\delta z} \int_0^z E_r^{(0)}(r, z) e^{\delta z} dz. \quad (4.5)$$

如果给出了 $E_r^{(0)}$ 的分布, 就得到 $v^{(0)}(r, z)$ 的分布。

轴向运动方程 (2.13) 的一阶关系为:

$$\alpha^2 \frac{\partial w^{(0)}}{\partial z} = -\frac{\partial p^{(0)}}{\partial z}. \quad (4.6)$$

上式对 z 积分, 就得到:

$$\alpha^2 w^{(0)}(r, z) + p^{(0)}(r, z) = \alpha^2 + \frac{1}{\gamma M_{e0}^2}. \quad (4.7)$$

把 (4.7) 式代入径向运动方程 (2.11), 可得到一阶关系:

$$\alpha^2 w^{(0)}(r, z) \frac{\partial w^{(0)}}{\partial r} + \delta^2 \frac{e^{-2\delta z}}{r} \left[\int_0^z E_r^{(0)}(r, z) e^{\delta z} dz \right]^2 = 0. \quad (4.8)$$

经过一些运算可给出:

$$\frac{\alpha^2}{2} [w^{(0)}(r, z)]^2 = -\delta^2 e^{-2\delta z} \int \frac{1}{r} \left[\int_0^z E_r^{(0)}(r, z) e^{\delta z} dz \right]^2 dr + f(z), \quad (4.9)$$

其中 $f(z)$ 为待定函数, 由能量和状态方程确定。

对于两种组分的混合同位素气体, 可假设

$$C_{p1} = C_{p2} = \text{常数}.$$

利用扩散关系 (2.19), 可将能量方程 (2.17) 左端化为

$$\sum_{i=1}^2 \left(\frac{C_{pi} T_0^*}{U_e^2} \right) \left[\frac{1}{r} \frac{\partial r \rho_i (\beta u + \alpha u_i) T}{\partial r} + \alpha \frac{\partial \rho_i (w + w_i) T}{\partial z} \right] = \frac{C_p T_0^*}{U_e^2} \left(\beta \rho u \frac{\partial T}{\partial r} + \rho w \frac{\partial T}{\partial z} \right). \quad (4.11)$$

这样, 零阶能量方程的关系式为

$$\frac{1}{(\gamma-1)M_{e0}^2} \frac{\partial T^{(0)}(r, z)}{\partial z} = w^{(0)} \frac{\partial p^{(0)}}{\partial z} + \delta (E_r^{(0)} + v^{(0)})^2. \quad (4.12)$$

利用 (4.5) 和 (4.6) 式, 由方程 (4.12) 不难求出温度分布:

$$\frac{T^{(0)}(r, z) - 1}{(\gamma-1)M_{e0}^2} = -\alpha^2 \left(\frac{w^{(0)2}}{2} - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{\delta} \int_0^z \left(\frac{\partial v^{(0)}}{\partial z} \right)^2 dz. \quad (4.13)$$

由 (4.9), (4.13) 和 (2.18) 式可确定 $f(z)$ 。这样, 只要求出电场 $E_r^{(0)}$, 流场的分布便完全确定了。

在定常问题中, 电场为势函数的梯度:

$$\vec{E} = -\nabla\varphi(r, z). \quad (4.14)$$

另外, 电流守恒要求:

$$\nabla \cdot \vec{j} = \nabla \cdot \left(\vec{E} + \frac{\vec{v}^*}{U_e} \times \vec{B} \right) = 0. \quad (4.15)$$

由(4.14)和(4.15)就推导出电势满足的关系:

$$\Delta\varphi = \nabla \cdot \left(\frac{\vec{v}^*}{U_e} \times \vec{B} \right). \quad (4.16)$$

考虑到 $v^{(0)}$ 的解(4.5)式, 可导出(4.16)式的零阶关系为:

$$\Delta\varphi^{(0)} = \frac{\delta}{r} e^{-\delta z} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \int_0^z \frac{\partial\varphi^{(0)}}{\partial r} e^{\delta z} dz \right]. \quad (4.17)$$

零阶电势的边界条件可以表示为:

$$\varphi(1, z) = \varphi_0, \quad \varphi(r_1, z) = 0, \quad \frac{\partial\varphi(r, 0)}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial\varphi(r, L)}{\partial z} = 0. \quad (4.18)$$

用分离变量法求解(4.17)式. 令

$$\varphi^{(0)}(r, z) = \sum_{s=0}^{\infty} \psi_s(r) \chi_s(z), \quad (4.19)$$

则可求本征值问题. $\chi_s(z)$ 的方程和边条件化为

$$\begin{cases} \frac{d^2\chi_s(z)}{dz^2} + \lambda_s^2\chi_s(z) - \lambda_s^2\delta e^{-\delta z} \int_0^z e^{\delta z}\chi_s(z) dz = 0, \\ \chi'_s(0) = \chi'_s(L) = 0. \end{cases} \quad (4.20)$$

$$\chi'_s(0) = \chi'_s(L) = 0. \quad (4.21)$$

(4.19)式在边条件(4.20)下的解为:

$$\chi_s(z) = \begin{cases} A_0, & (s=0) \\ A_s e^{-\frac{\delta}{2}z} \left[\cos\left(\frac{s\pi z}{L}\right) + \frac{2\pi s}{\delta L} \sin\left(\frac{s\pi z}{L}\right) \right], & (s \neq 0) \end{cases} \quad (4.22)$$

其中 $\lambda_s = \frac{\pi s}{L}$, A_s 为待定系数. 对 ψ_s 也能导出方程:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\psi_s}{dr} \right) - \left(\frac{\pi s}{L} \right)^2 \psi_s = 0, \quad (4.23)$$

其通解为:

$$\psi_s(r) = \begin{cases} C_0 + D_0 \ln r, & (s=0) \\ C_s I_0\left(\frac{s\pi r}{L}\right) + D_s K_0\left(\frac{s\pi r}{L}\right), & (s \neq 0) \end{cases} \quad (4.24)$$

其中 C_s, D_s 为待定系数, I_0 和 K_0 为虚宗量贝塞耳函数. 根据这些结果, (4.17) 式的通解为:

$$\begin{aligned} \varphi^{(0)}(r, z) = & A_0(C_0 + D_0 \ln r) + \sum_{s=1}^{\infty} A_s e^{-\frac{\delta}{2}z} \left[\cos\left(\frac{s\pi z}{L}\right) + \right. \\ & \left. + \frac{2\pi s}{\delta L} \sin\left(\frac{s\pi z}{L}\right) \right] \cdot \left[C_s I_0\left(\frac{s\pi r}{L}\right) + D_s K_0\left(\frac{s\pi r}{L}\right) \right]. \end{aligned} \quad (4.25)$$

利用边值(4.18), 则可确定(4.25)式中的系数为:

$$A_0 C_0 = \varphi_0, A_0 D_0 = -\frac{\varphi_0}{\ln r_1}, A_s C_s = A_s D_s = 0. (s \geq 1) \quad (4.26)$$

这样就求出零阶电势分布

$$\varphi^{(0)}(r, z) = -\varphi_0 \ln\left(\frac{r}{r_1}\right) / \ln r_1. \quad (4.27)$$

与(4.27)式相对应的电场分布为:

$$E_r^{(0)} = \frac{\varphi_0}{r \ln r_1}, E_\theta^{(0)} = 0, E_z^{(0)} = 0. \quad (4.28)$$

电场分布(4.28)与长度 L 无关, 这是在具体轴向边值(4.18)的条件下得到的。若上、下壁面不是理想体, 则(4.25)式中的 $s \geq 1$ 项不为零。

将电场分布(4.28)式代入(4.5)式, 就得到速度分布:

$$v^{(0)}(r, z) = -\frac{\varphi_0}{r \ln r_1} (1 - e^{-\delta z}). \quad (4.29)$$

气体转速从进口的零值被加速到最大值

$$v_{\max}^{(0)} = -\frac{\varphi_0}{r \ln r_1}. \quad (4.30)$$

$v_{\max}^{(0)}$ 就是局部飘移速度。图 2 是切向速度的分布, 转速在 r 较小时较大。这是因为轴向磁场均匀, 而径向电流在 r 较小时较大。沿轴向, 转速随 δz 的增加而增加。 δ 为电磁作用。 δ 较大时, 电磁场对流动有较强影响, 所以在较短的距离 z 内可加速到较高的转速, 反之亦然。转速沿轴向增加到最大值的特征长度是 $\frac{1}{\delta}$ 。

将电场分布(4.28)代入(4.9)式, 就可推导出

$$\frac{\alpha^2}{2} [w^{(0)}(r, z)]^2 = f(z) + \frac{1}{2} \left[\frac{\varphi_0}{r \ln r_1} (1 - e^{-\delta z}) \right]^2. \quad (4.31)$$

再将(4.28)式代入(4.13)式, 不难得到:

$$\frac{T^{(0)} - 1}{(\gamma - 1) M_{z_0}^2} = \frac{\alpha^2}{2} (1 - w^{(0)2}) + \frac{1}{2} \left(\frac{\varphi_0}{r \ln r_1} \right) (1 - e^{-2\delta z}). \quad (4.32)$$

把(4.32)式代入状态方程, 再用(4.3)和(4.7)式就导出:

$$\begin{aligned} & -\alpha^2 \left[1 - \frac{\gamma - 1}{2\gamma} \left(\frac{M_{e0}}{M_{i0}} \right)^2 \left(1 - \frac{m_2 - m_1}{m_2} \frac{\rho_2}{\rho} \right) \right] w^{(0)2} + \left(\alpha^2 + \frac{1}{\gamma M_{e0}^2} \right) w^{(0)} \\ & = \frac{1}{\gamma M_{i0}^2} \left(1 - \frac{m_2 - m_1}{m_2} \frac{\rho_2}{\rho} \right) \left\{ 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_{z_0}^2 \left[\alpha^2 + \left(\frac{\varphi_0}{r \ln r_1} \right) (1 - e^{-2\delta z}) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.33)$$

(4.33)式为 $w^{(0)}(r, z)$ 的二次代数方程, 可以解出:

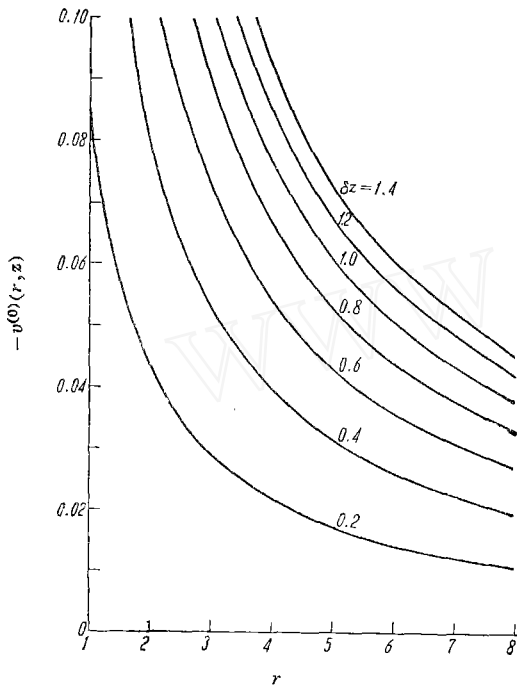


图 2 转速分布
取 $\varphi_0 = 1, \frac{r_0}{r_1} = 0.125$ 。

$$w^{(0)}(r, z) = \frac{\left(\alpha^2 + \frac{1}{\gamma M_{e0}^2}\right) \pm \sqrt{\left(\alpha^2 + \frac{1}{\gamma M_{e0}^2}\right)^2 - 2\alpha^2(\gamma-1)M_{e0}^2 \left[\alpha^2 + \frac{1}{2\alpha^2} \left[1 - \frac{\gamma-1}{2\gamma} \left(\frac{M_{e0}}{M_{10}}\right)^2\right]\right]}}{2\alpha^2 \left[1 - \frac{\gamma-1}{2\gamma} \left(\frac{M_{e0}}{M_{10}}\right)^2\right]} \rightarrow$$

$$\left[\frac{\left(\frac{\varphi_0}{r \ln r_1}\right)^2 (1-e^{-2\delta z}) \right] \left[1 - \frac{\gamma-1}{2\gamma} \left(\frac{M_{10}}{M_{e0}}\right)^2 \left(1 - \frac{m_2-m_1}{m_2} \frac{\rho_2}{\rho_1}\right) \right] \left[1 - \frac{m_2-m_1}{m_2} \frac{\rho_2}{\rho} \right] \quad (4.34)$$

为使 $w^{(0)}$ 为实数，要求上式中根号为正，即

$$\left(\alpha^2 + \frac{1}{\gamma M_{e0}^2}\right)^2 \geq 2\alpha^2(\gamma-1)M_{e0}^2 \left[\alpha^2 + \left(\frac{\varphi_0}{r \ln r_1}\right)^2 (1-e^{-2\delta z}) \right] \left[1 - \frac{\gamma-1}{2\gamma} \left(\frac{M_{10}}{M_{e0}}\right)^2 \left(1 - \frac{m_2-m_1}{m_2} \frac{\rho_2}{\rho} \right) \right]$$

这个限制条件是由进口的假设条件引出的。由连续方程求出的(4.3)式要求 $w^{(0)}$ 总是单向流动。若出现回流，则 $w^{(0)}$ 必须改变符号，就不会满足(4.3)式。相应地， $w^{(0)}$ 的分布可能出现奇异区域。这时必须考虑径向运动的影响。具体地，应选择适当管长，使流场对分离效果最佳。

将(4.34)式代入(4.31)式，能够确定 $f(z)$ 的分布。将(4.34)式代入(4.32)式可求出温度分布。利用温度和密度分布，由状态方程就求出了压力分布。图3和图4分别为温度和压力的分布，它们都沿轴向增加，随 δz 的增大而增大，并在较小半径时有较大的值。

五、混合气体的分离效应

将前节求出的流场代入(2.19)–(2.21)式，就可以讨论混合气体的分离。将(2.19)式变成

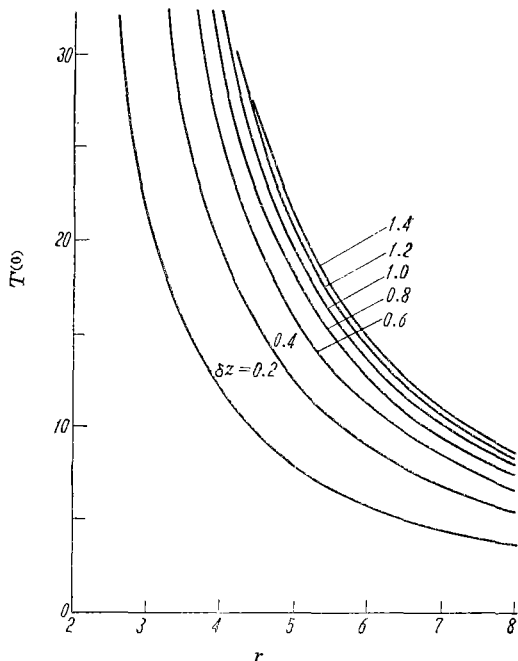


图3 温度分布
 $\varphi_0=1, \alpha=0.1, M_{e0}=100, r_1=0.125。$

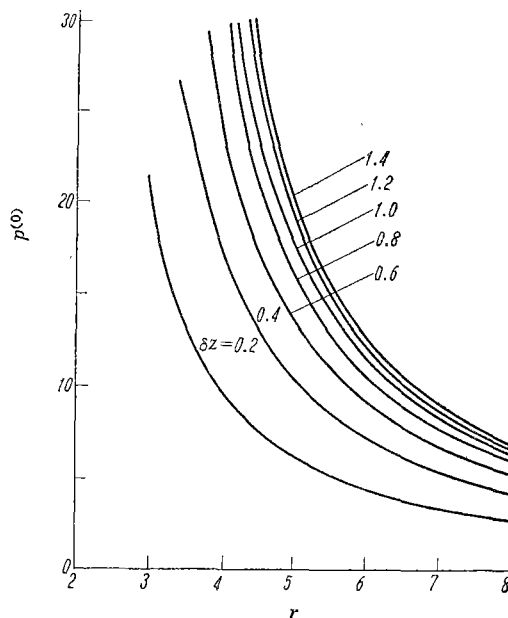


图4 压力分布
参数与图3同

分量形式:

$$\begin{cases} u_1 - u_2 = -D \left[\frac{1}{n_2} \frac{\partial}{\partial r} \ln \left(\frac{n_1}{n} \right) + \frac{m_2 - m_1}{\rho} \frac{\partial}{\partial r} \ln p \right], \\ v_1 - v_2 = 0, \\ w_1 - w_2 = -D \left[\frac{1}{n_2} \frac{\partial}{\partial z} \ln \left(\frac{n_1}{n} \right) + \frac{m_2 - m_1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \ln p \right]. \end{cases} \quad (5.1)$$

利用关系 $\rho_1 \bar{v}_1 + \rho_2 \bar{v}_2 = 0$, 把(5.1)式代入扩散方程(2.19), 经过适当整理就得到:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r \beta \rho_1 u - \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho} r \alpha D \left[\frac{1}{n_1} \frac{\partial}{\partial r} \ln \left(\frac{n_1}{n} \right) + \frac{m_2 - m_1}{\rho} \frac{\partial}{\partial r} \ln p \right] \right\} \\ & + \alpha \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \rho_1 w - \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho} D \left[\frac{1}{n_1} \frac{\partial}{\partial z} \ln \left(\frac{n_1}{n} \right) + \frac{m_2 - m_1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \ln p \right] \right\} = 0. \end{aligned} \quad (5.2)$$

我们要在已知流场下, 求解扩散方程(5.2)。

在实际的问题中, 混合气体的总流量是很小的。这种情形可看成是一般工况的首次近似。这时, 扩散方程(5.2)式化简为

$$\frac{1}{n_2} \frac{\partial}{\partial z} \ln \left(\frac{n_1}{n} \right) + \frac{m_2 - m_1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \ln p = 0. \quad (5.3)$$

引入混合气体的数密度比 n_{12} ,

$$n_{12} = \frac{n_1}{n_2}, \quad (5.4)$$

则单级分离系数就定义为

$$\alpha = \left(\frac{n_2}{n_1} \right) / \left(\frac{n_2}{n_1} \right)_0 = \frac{(n_{12})_0}{n_{12}}. \quad (5.5)$$

将(5.5)式代入(5.3)式, 不难求出单级分离系数为:

$$\begin{aligned} \alpha &= \exp \left\{ \frac{m_2 - m_1}{m_2} \left[\ln (\gamma M_{z_0}^2 p) - \ln \frac{1 + n_{12}}{1 + (n_{12})_0} \right] \right\}. \\ &\simeq \exp \left\{ \frac{m_2 - m_1}{m_2} \ln (\gamma M_{z_0}^2 p) \right\}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

这个结果与二维轴对称的结果^[12]很相似。

利用前节压力分布的结果, 可以由(5.7)式计算单级分离系数。讨论²³⁵U¹⁹F₆和²³⁸U¹⁹F₆同位素混合物的分离。图5是六氟化铀同位素的单级分离系数的分布图。这里的流场与机械离心分离装置不同, 压力在较小半径处较大, 分离系数也是里面较大。机械离心分离时把大部分气体都聚积在转筒附近, 使取样很困难。电磁离心分离时没有这个问题, 它在较小半径时就有显著分离效果, 有利于取样和级联。

机械离心分离器最吸引人的是, 其分离系数和分离功都只依赖于混合气体的绝对质量差, 这特别适合于分离重同位素。粗看起来, (5.6)式似乎表示电磁离心分离器的单级分离系数与相对质量差有关, 这是由于无量纲表达形式引起的。机械离心式分离器的单级分离系数为:

$$\alpha_0 = \exp \left[(m_2 - m_1) \frac{(\omega r_2)^2}{2 RT} \right]. \quad (5.7)$$

若引用声速 $a_0^2 = \gamma RT/m$, 则可将上式改写为

$$\alpha_0 = \exp\left[\frac{m_2 - m_1}{m} \frac{\gamma}{2} \left(\frac{\omega r_2}{a_0}\right)^2\right]. \quad (5.8)$$

径向运动方程 (2.11) 的零阶关系就是离心力与压力梯度平衡, 利用状态方程可将它写为:

$$\frac{\partial \ln p^{(0)}}{\partial r} = \frac{1}{\gamma M_{e0}^2} \frac{v^{(0)2}}{r T^{(0)}}, \quad (5.9)$$

利用 (5.9) 式就看出, (5.8) 和 (5.6) 是相似的, 两种离心分离器的分离效应都只与同位素的相对质量差有关。这两种离心分离的原理是相似的, 两者的主要不同在于驱动气体旋转的方式。电磁离心分离装置的主要缺点可能是焦耳热的耗散会使气体加热, 这对分离效果是不利的。为了减少焦耳耗散, 应提高等离子体的电导率, 采用非热致电离的方法。

本文未讨论气体的迴流, 而要求轴向速度恒正。这相当于某种同流式装置。同流式分离装置的特点是单级分离系数较低, 但流量大, 结构简单。与机械离心分离器相比, 这里有高得多的气体密度, 因而分离功也相应地较高。

在技术上要实现电磁离心分离的许多优越性, 需要寻求更有效的新技术, 诸如超导强磁场, 更有效的低温电导方法等。此外, 控制二次流和湍流的发展也是重要的问题。还有可能, 将这种原理与其他分离原理结合起来应用, 诸如与激光分离相结合, 利用激光的电离效应等, 进一步提高分离效果。

衷心感谢郭永怀教授的指导和帮助, 他提出并指导我们从事这方面的理论和实验研究。感谢荣陞同志帮助进行了数值计算。

参 考 文 献

- [1] R. G. Ragsdale, NASA TN D-288 (1960).
- [2] J. L. Kerrebrock & R. V. Meghreblian, *J. Aero/Space J.*, **28**, 710 (1961).
- [3] M. L. Rosenzweig et al., *ARS Journal*, **31**, 873 (1961).
- [4] W. S. Lewellen et al., *AIAA J.*, **4**, 396 (1966).
- [5] R. A. Gross & K. O. Kessey, *AIAA J.*, **2**, 295 (1964).
- [6] K. P. Johnson, *AIAA J.*, **4**, 635 (1966).
- [7] W. L. Love & C. Park, *AIAA J.*, **8**, 1377 (1970).
- [8] W. L. Love & C. Park, in Res. Uranium Plasma and Their Tech. Appl., Ed. K. Thorm & R. T. Schneider, NASA, 1971, p. 139.
- [9] H. Londen, Separation of Isotopes, Newnes, London, 1961, Ch. 6.
- [10] F. H. Theyse, *J. Mech. Eng. Sci.*, **13**, 168 (1971).
- [11] L. B. Ricks, AD-269423 (1961).
- [12] 胡文瑞, 电磁离心分离器的基本原理及其应用于分离同位素, 研究与学习, **4**, 74 (1964).
- [13] B. Bronnevier, *Ark. for Fysik*, **33**, 255 (1967).
- [14] B. Bronnevier, *Plasma Phys.*, **13**, 763 (1971).
- [15] B. Lehnert, *Phys. Scripta*, **2**, 106 (1970).
- [16] 胡文瑞, 力学学报, **1**, 27 (1979).
- [17] 胡文瑞, 力学学报, **2**, 189 (1979).
- [18] S. Chapman & T. G. Cowling, The Mathematical Theory of Nonuniform Gases, The University Press, Cambridge, 1953, Ch. 14.

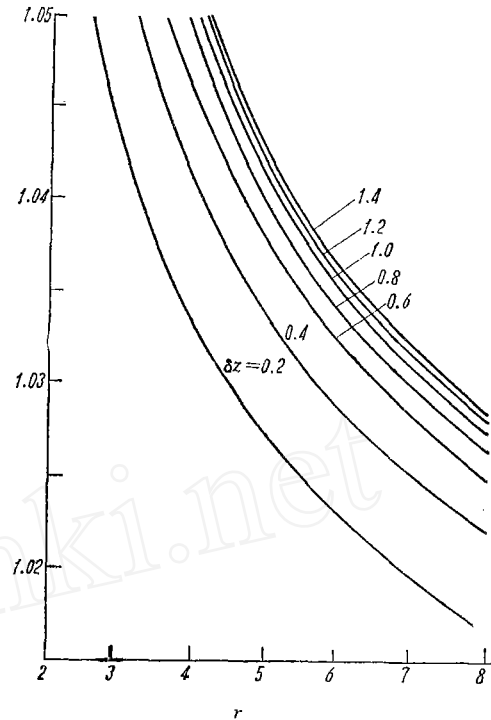


图 5 六氟化铀($^{235}\text{U}^{19}\text{F}_6$ 和 $^{238}\text{U}^{19}\text{F}_6$)的单级分离系数分布
参数与图 2 同, 图中结果是按 (5.7) 式计算的。