固体的动力学性质与非线性波动问题的研究

段 祝 平

（中国科学院力学研究所）

一、前 言

非线性介质是指描述物体的应力和变形（包括变形速率和变形历史）的本构关系是非线性的．这种非线性性质往往和物体的有限变形联系在一起．在高速变形条件下，金属、岩石、高分子聚合物、复合材料、土壤等表现出不同的力学性质，应力波的传播规律也各不相同．研究非线性介质中波动的一般理论；应力波在各种介质中发生、发展、相互作用和转化的规律以及通过各种测试手段，尤其是对各种波动讯号的测量来确定材料的动态力学性质，构作本构方程成为近代力学发展的一个十分重要领域，我们必须给予足够的重视．

早在十九世纪，经典的弹性动力学方法获得了充分的发展[1]．这是因为它受到电磁波理论发展的影响，实际上存在着像地震中提出的大量迫切要求解决的问题．同时，积分变换、复变函数、谐波分析等数学物理方法的广泛应用给求解弹性波理论提供了有力的工具．但在研究像爆炸效应、高速撞击现象、高能粒子束引起的物质破坏、震源近区的地震波效应等一大类工程问题时，因为构成弹性波理论基础的微小应变和广义 Hooke 定律假定不附合实际情况，因此，经典的弹性动力学方法就不能应用了．例如，对岩石中应力波的衰减规律的研究．按弹性波理论，一球面发散波，其波幅与离球心的距离 R 成反比，但实际测量的结果是波幅一般与 $R^{-2} \sim R^{-3}$ 成正比．换言之，实际上应力波的衰减要比弹性波理论预言的快得多．这表明在波的传播过程中有相当多的机械能以不可逆形式耗散为热能，但什么是引起能耗的机制？目前，提出了多种模型，认为粘性、塑性、内摩擦，剪胀、滞迴、裂隙的增殖与扩张、各向异性与不均匀性等都是引起应力波衰减的可能机制．这些效应，绝大多数都是非线性的．又如橡皮一类物质中应力波传播的研究．橡皮属于高弹性材料，即使变形量超过 100% 时仍显示出良好的弹性．但其弹性行为和金属不同，应力 σ 和应变 ε 关系 $\sigma = f(\varepsilon)$ 满足 $\frac{d\sigma}{d\varepsilon} > 0, \frac{d^2\sigma}{d\varepsilon^2} > 0$，即其强化模数随应力的增加而增加．研究表明，即使在渐加载荷下，橡皮中也可能出现定态激波．这自然是线弹性理论无法解释的．至于说到爆源或震源近区介质的动态反映，情况更复杂了，这时应力幅值远远超过材料的屈服极限，介质不但处于高温高压和大弹塑性高速变形状态，而且会出现崩落，碎裂、开裂和绝热剪切等多种效应，当然经典动力学方法就不能用以求解这类问题了．类似例子还很多，足见研究非线性介质中的波动问题远比弹性理论复杂，内容也更加丰富．目前，对这门学科的研究形成了几个不同的侧重面：

1. 非线性介质中波动的一般理论和方法．一般地讲，描写非线性介质的波动问题是异常复杂的非线性方程组，除少数简单情况，无法获得解析解．但目前由理性力学发展起来的奇异面理论在不必求得波动的总体解以前，对波传播的局部性质，如关于波幅的增殖与衰减规律、各种波的相互作用与转化、演化规律，稳态波甚至孤立波在固体介质中的生长条件等都可获得定性结论．因此对波动的数学理论的研究是十分重要的．

2. 波动理论与材料的动力学性质、本构关系的研究结合起来，形成了波动理论的十分重要的方面．波的传播引起了介质的高速变形，在高速变形下的材料动力学性质和静态性质有很大的不同，确定这些性质都是通过对各种力学参量的波动讯号的测量提出适当模型，进行理论分析建立本构方程来实现的．目前，在一维条件下发展了诸如 Lagrange 分析方法、冲击波技术建立介质的高压状态方程和研究介质的动态相变机制、通过对弹塑性波头讯号的测量确定材料的能耗机制等都是近来获得的重要进展．

3. 波动理论与计算力学的紧密结合，这是研究非线性介质中波动理论的又一重要环节．三维下的材料模型无法直接用实验建立起来，但大量需要解决的实际工程问题，几何结构较为复杂，为了处理这类复杂问题，需要近似确定三维下的本构关系且通过数值计算方法才能得到对这些具体结构中波动特性的认识以便确定结构的高速变形过程和实际抗载能力，这一点对研究各兵器的战斗性能甚为重要．

二、波动的理论和方法概要

1. 奇异面上的相容条件．波动一般指任何一物理量 $\Phi=\Phi(\mathbf{x},t)$ 随时间 t 在空间 $\mathbf{x}(x_1,x_2,x_3)$ 的传播．它有双重意义，一是指波阵面，即对 Φ 而言具有某种确定间断性质以一定实速度在空间或物体内运动着的曲面，称其为奇异面．二是波阵面前后物理量 Φ 的分布状态．这里，量 Φ 可指任何一个力学或热力学量如应力、应变、速度、加速度、温度等等．表征波阵面的波速、波矢及其内蕴几何性质与这些物理量的间断之间的相互联系总称为奇异面上相容条件．它又分为几何、运动学和动力学三大类．须知，这类相容条件并不涉及到物质的具体力学性质，因而是普遍适用不能违背的．Reimann、Stokes、Rankine 和 Hugoniot 等人早就建立了激波阵面的守恒关系，形成了气体与流体动力学关于激波理论的基础[2]．但真正应用于固体介质的是 1903 年 Hadamard 的工作[3]，他给出了一个著名引理："如果任一物理量 Φ 对某一奇异面 S 而言，若 Φ 的空间导数 $\Phi_{,i}=\dfrac{\partial\Phi}{\partial x_i}$ 出现间断但 Φ 本身连续，则间断矢量 $[\Phi_{,i}]=\Phi^+_{,i}-\Phi^-_{,i}$ 必然和 S 面法线方向 $\mathbf{n}$ 平行，其中 $\Phi^+_{,i}$ 和 $\Phi^-_{,i}$ 各自表示在奇异面二侧的逼近值．" Hadamard 以后，对非线性固体介质中的波动理论很少有人研究过，直到 50 年代，理性力学的复兴[4]—[5]，对奇异面理论重新研究，并把它和非线性本构关系联系起来，使之成为研究波动问题的一个有力方法．现简述如下：

设量 $\Phi(\mathbf{x},t)$ 定义在物体 $\mathscr{B}$ 内，在 $t=0$ 时刻，$\mathscr{B}$ 占有空间位置 V_0，由于运动和变形，在 $t=t$ 时刻，占有空间 V．物体 $\mathscr{B}$ 内某一点 P 由位置 $\mathbf{X}(X_1,X_2,X_3)$ 运动到位置 $\mathbf{x}(x_1,x_2,x_3)$，显然点 P 的运动可用下列函数表示：

$$\mathbf{x}=\hat{x}(\mathbf{X},t) \tag{2.1$_1$}$$

或

$$\mathbf{X}=\hat{X}(\mathbf{x},t) \tag{2.1$_2$}$$

如果空间的奇异面 $s(t)$ 用参数方程表示成

$$\mathbf{x}=\mathbf{x}(\beta_1,\beta_2,t)\quad \mathbf{x}\in s(t) \tag{2.2}$$

显然，$s(t)$ 通过变换 $(2.1)_2$ 映照到物质坐标 $\mathbf{X}$ 中去，即 $s(t)\to S(t)$，在物质坐标内 $S(t)$ 的曲面方程是

$$\mathbf{X}=\mathbf{X}(\mathbf{x}(\beta_1,\beta_2,t),t)=\mathbf{X}(\beta_1,\beta_2,t) \tag{2.3}$$

如果量 Φ 对曲面 $s(t)$ 或 $S(t)$ 而言，具有某种性质的间断，称 $s(t)$ 或 $S(t)$ 是量 Φ 的奇异面．几何相容条件是把 Φ 对空间或物质坐标 $\mathbf{X}$ 的导数的间断和 Φ 对曲面 $s(t)$ 或 $S(t)$ 的法向导数的间断，间断量 $[\Phi]$ 的切向导数以及奇异面的几何性质相联系的普遍关系式．我们以空间坐标 $\mathbf{X}$ 表

示的曲面 $S(t)$ 的一阶和二阶间断的几何相容条件为例，可证明[6]：

$$[\Phi_{,i}] = Bn_i + a^{kl}[\Phi]_{;k}x_{il} \tag{2.4}$$

$$[\Phi_{,ij}] = cn_in_j + a^{kl}(B_{;k} + a^{mn}\cdot b_{km}[\Phi]_{;n})(n_ix_{jl} + n_jx_{il}) + a^{kl}a^{mn}(A_{;km} - Bb_{km})x_{il}x_{jn} \tag{2.5}$$

这里采用了 Einstein 的总和约定，$B = \left[\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right]$，$c = [\Phi_{,ij}]n_in_j$，$A = [\Phi]$，$x_{il} = \frac{\partial x_i}{\partial\beta_l}$，$a^{kl}$ 是 $s(t)$ 度量张量 $a_{kl} = \mathbf{x}_{,k}\mathbf{x}_{,l}$ 的逆矩阵．$(\ )_{;k}$ 表示对 β_k 的协变导数，$b_{km} = -\mathbf{n}_{;k}\cdot\mathbf{x}_{;m}$ 是曲面 $s(t)$ 的第二基本形式中的对称度量张量．从(2.4)—(2.5)可知，在三维条件下，几何相容条件形式十分复杂．但若 $s(t)$ 只是量 Φ 的一阶间断面，则(2.4)可化为

$$[\Phi_{,i}] = Bn_i \tag{2.6}$$

这就是 Hadamard 引理．若 $s(t)$ 只是量 Φ 的二阶间断面，则(2.5)简化为

$$[\Phi_{,ij}] = cn_in_j \tag{2.7}$$

其次，奇异面上的运动相容条件是把 $[\Phi]$ 的时间变化率与间断 $[\partial\Phi/\partial t]$ 和奇异面的法向速度联系起来的关系式．Thomas 最早引进 δ—时间导数 $\delta\Phi/\delta t$ 的概念，他定义[7]

$$\frac{\delta\Phi}{\delta t} = \lim_{\substack{\Delta t\to 0\\ \mathbf{x}\in S(t)\\ \mathbf{x}+\Delta\mathbf{x}\in S(t+\Delta t)}} \frac{1}{\Delta t}\{\Phi(\mathbf{x}+\Delta\mathbf{x}, t+\Delta t) - \Phi(\mathbf{x}, t)\} = \frac{\partial\Phi}{\partial t} + u_n\Phi_{,i}n_i \tag{2.8}$$

其中，u_n 表示曲面 $s(t)$ 在空间运动的法向速度，则显然有

$$\frac{\delta[\Phi]}{\delta t} = \left[\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right] + u_n[\Phi_{,i}]n_i \tag{2.9}$$

这就是 Φ 沿奇异面 $s(t)$ 的一阶运动学相容条件，其中 Φ 是任意的．如把 Φ 看成是(2.1)$_1$ 所定义的运动，则把波的传播和物体的运动及变形联系起来．激波是关于运动的一阶间断面，而加速度波是关于运动的二阶间断面．在激波或加速度波波阵面二边必须满足质量、动量和能量守恒关系及热力学第二定律．在不计热传导效应下，用空间坐标形式可写成

$$[\rho(u_n - v_n)] = 0 \tag{2.10}$$

$$[\sigma_{ij}]n_j + [\rho v_i(u_n - v_n)] = 0 \tag{2.11}$$

$$\left[\rho\left(e + \frac{1}{2}V^2\right)(u_n - v_n)\right] + [\sigma_{ij}\cdot v_j]n_i = 0 \tag{2.12}$$

$$[\rho(u_n - v_n)\cdot\eta] \leqslant 0 \tag{2.13}$$

其中 ρ 表示密度，$v_i = \frac{dx_i}{dt}$ 为质点速度，σ_{ij} 是 Cauchy 应力张量，e 和 η 分别为比内能和比熵，$v_n = v_in_i$ 为质点沿波阵面法线方向 $\mathbf{n}$ 的速度，(2.10)～(2.13)称为动力相容条件．当然，在处理固体非线性波动问题时，往往采用物质坐标，其相容条件在形式上和上面不同，可详见[4—6]．

2. 波的增殖和衰减规律．确定非线性或线性固体介质中波在无限空间的传播性质，需要三个条件：(a) 奇异面上的相容条件；(b) 奇异面两侧场的方程；(c) 介质的本构方程．用这种方法，早就证明线弹性固体中只存在两种波速的波，即纵波与横波．而且，一个平面波在传播过程中，其幅值既不增加又不衰减．但对非线性弹性固体，情况并非如此．Truesdell[9] 和 Green 等人利用上述方法研究非线性弹性体中波的传播，获得了二个引人注目的结果．一是在有限变形下的热弹性材料，纵向平面加速度波满足

$$\{Q_{ij}(F, T, \mathbf{N}) - \rho_0U_N^2\delta_{ij}\}\cdot a_j = 0 \tag{2.14}$$

其中，Q_{ij} 称为声轴张量，它和位移梯度张量 $F_{ij} = \partial x_i/\partial X_j$，温度 T，波的法线么矢 $\mathbf{N}$ 及介质的弹性性质有关，U_N 是 Layrange 波速，δ_{ij} 是 Kronecker 符号，$\mathbf{a} = [\ddot{\mathbf{x}}] = (a_1, a_2, a_3)$ 是加速度波

的幅值向量，表示加速度的跳跃量．从(2.14)式可知，存在实加速度波的充分条件是声张量 Q_{ij} 对其本征向量 $\mathbf{a}$ 而言必须是正定的

$$Q_{ij}a_ia_j > 0 \tag{2.15}$$

而且局部声速 U_N 是 Q_{ij} 的本征值．在各向同性非线性弹性介质中，平面纵波与横波至少可三个主方向传播，称其为主波．在每个主方向有一个纵波，两个横波，故一般三维空间中，共有九个主波，局部声速各不相同，原则上利用局部声速测量可定出材料的高阶弹性模量．二是对平面加速度波稳定性的研究．1964 年 Green[8] 利用 δ-时间导数及运动学相容条件，计算了平面加速度波幅值 $a = |\mathbf{a}|$ 随时间的变化，得到一个类似的 Bernoulli 方程

$$\frac{\delta a}{\delta t} = -\mu(t)a + \beta(t)a^2 \tag{2.16}$$

其中，系数 $\mu(t)$ 和 $\beta(t)$ 由波前状态决定，如波前处于均匀状态，μ 和 β 均为常数．由(2.16)可知，初始幅值 a_0 决定了加速度波的增衰性质．即存在一个初始临界幅值 a_0^{cr}．当 $a_0 > a_0^{cr}$ 时，波是增殖的，其结果是可能引成激波．当 $a_0 < a_0^{cr}$ 时，波是衰减的．当 $a_0 = a_0^{cr}$ 时，其幅值在传播过程中不变．这正是非线性介质中波动传播的一个特点．

3. 非线性粘弹性介质中波的传播．线性粘弹性理论是由 Maxwell, Botzmann 等发展起来的．对于各种由弹性和粘性元件线性组合的介质中波的传播，已给予了充分研究．但直到 60 年代对高分子聚合物、复合材料等有限幅度波的研究却很少．关键是没有足够的理论去建立这类物质的本构关系．Coleman 和 Noll[9] 用近似泛函分析的方法，提出了一个具有减退记忆的物质的数学模型．所谓减退记忆材料，即指应力对变形历史的依赖在记忆上具有减退的性质，它较多地依赖当前的变形历史而较少地依赖于以前的历史．若应力对应变历史是线性依赖的，称这种材料是有限线性粘弹性材料．和线性粘弹性材料相类似，这类材料变形的一个特点是施加于物体的应力在瞬时只产生弹性变形，而粘性形变是一种非瞬态有时效的流动过程．如记 $\varepsilon_{ij}(t)$ 表示 t 时刻物体微元的 Green 应变张量 E．则变形的历史可用一逃逸时间参数 s 来表示:

$$\varepsilon^t_{ij}(s) = \varepsilon_{ij}(t-s) \quad 0 \leqslant s < \infty. \tag{2.17}$$

可证明，有限线性粘弹性材料的本构方程是线性 Boltzmann 体的推广:

$$\Sigma_{ij} = \Sigma^{(I)}_{ij}(\varepsilon_{kl}) + \int_0^\infty \frac{\partial Q_{ijkl}(E,s)}{\partial s} \cdot \varepsilon^t_{kl}(s)ds \tag{2.18}$$

其中 Σ_{ij} 和 $\Sigma^{(I)}_{ij}$ 分别表示总的和瞬态的 Piola-Kirchhoff 应力张量，四阶张量 Q_{ijkl} 表示应力松弛函数．原则上可通过超声测量来确定．在一维情形下，不少作者对具有减退记忆介质中激波和加速度波的传播规律进行了详细讨论，指出应力波在这类介质中传播时的一个特点是定态激波的存在，这是和线性粘弹性介质截然不同的．如前所述，非线性弹性效应可使波幅增殖，而粘性效应可使波幅衰减，这两种因素同时控制着波的传播．在某种组合条件下，却能出现定态的激波．Nunziato[10] 等人对有机玻璃一类物质中定态激波的传播给出了解析解，并很好地符合实验，这是理性力学促进材料科学发展的一个例子．

4. 固体介质中的非线性色散波．类似于对水波的研究，在固体动力学中，如果既考虑介质的非线性性质和粘性引起的耗散性质，又同时考虑结构的几何形状引起的色散效应，把物理现象简单化、典型化后可以得到某些具有色散项的非线性波动方程．对这类典型方程解的研究却十分重要，它不但可说明非线性材料中关于波动的特征而且可以用来研究材料的动力学性质．例如细长杆中一维非线性波的传播，如果考虑由于横向振动引起的色散效应，在一阶近似下，对某些材料可以化成类似于 K_dV 方程的一类模型方程，而在一维原子链模型中，如果存在缺陷而缺陷的传播可

以归结为 Sine-Gorden 方程．这两类方程已有完整的解法，证明了孤立波的存在性．值得指出，既使有耗散机制出现，仍可证明对某类非线性色散方程存在定态波解但很难证明定态波成为孤立波的条件．研究定态波结构及其发育过程对材料动力学性质的研究其意义是十分明显的．当然，由于固体的非线性性质十分复杂，寻求一类典型色散波动方程的解析解还比较困难，需要把计算机和实验工作很好结合起来，以便取得更大进展．

三、塑性波理论的若干课题

1. 塑性波理论发展概况．早在二次大战期间，对幅值超过材料屈服强度的应力脉冲在金属材料中传播的问题进行了大力的研究，利用流体动力学中关于拟线性方程组的特征理论，在大量实验基础上，导致了塑性动力学理论的诞生和发展．它是非线性介质中波动传播的一个十分重要的分支，在其发展过程中，经历了三个阶段：第一阶段，小应变弹塑性动力学理论的诞生和发展．这是从 Taylor[11]，Von-Karman[12] 等人的开创性工作开始的；第二阶段是固体的流体动力学理论的提出和发展，它主要针对超高速撞击现象开始研究的，这一理论目前比较成熟；第三阶段是有限变形下热弹塑性动力学理论的提出和发展，由于缺乏本构方程的完备知识，问题本身十分复杂，其进展是十分有限的．

2. 高应变率下的材料力学性质．在塑性波理论早期，人们用等温过程中的弹塑性应力应变关系，不论是应变理论还是增量理论，直接引进到波动理论中来．即使在三维条件下，也可组成封闭的拟线性方程组．由于弹性和塑性、加载和卸载有不同的应力应变关系，因此，对一具体冲击问题，在物体内部可以引成众多的波源如弹性波、塑性波、卸载波、反向屈服波等等．这些波的位置预先不知道，数学上形成了一类特殊的边值问题，只在一维条件下，才能求得个别问题的精确解．

自然会提出一个问题：冲击过程是绝热过程，用等温条件下的静态应力应变关系去解冲击载荷下的塑性动力学问题是否合理？快速变形过程的特点，尤其是应变的速率对材料的动力学性质会有什么根本影响？大量实验表明，对有些金属如碳钢等，应变率对材料力学性质有显著影响．如在冲击载荷下屈服点有明显提高；应变的屈服滞后效应，塑性应变落后于应力；弹性前驱波的幅值不断衰减以及前驱波后的应力松弛；微小扰动叠加到静态大变形上去时，小扰动速度等于或接近于弹性波的速度；不但应变率而且应变率的历史也明显地依赖于波的性质，材料对应变率的历史存在减退记忆的特点．大量的实验事实表明在高速变形下金属材料的动力学性质是何等丰富！它构成了研究塑性动力学理论的一个中心课题．

为了构作包括应变率效应的本构关系，在一维条件下可通过两个途径．一是直接的测量用以确定应力应变和应变率的关系． 分离的 Hopkinson 压杆技术就是一个典型的方法[13]． 尤其是近来发展了一种 Lagrange 方法[14]，它不尽依赖于测得不同 Lagrange 位置的关于应力或应变波的讯号而且依赖于力学的基本规律去构作本构关系，同时还可从本构的角度去分析波动在非热力学平衡态发生的物理过程．另一是最早由 Sokolovsky 和 Malvern[15] 等人提出的方法，即先假定一种包含应变率 $\dot{\varepsilon}$ 效应的本构关系，如在一维条件下，可导致

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^{e} + \dot{\varepsilon}^{p} = \frac{1}{E}\dot{\sigma} + f_{p}(\sigma.\varepsilon) \tag{3.1}$$

其中“·”表示对时间的微商．ε^{e} 和 ε^{p} 表示应变的弹性部份与应变的塑性部份．$f_p(\sigma.\varepsilon)$ 称为塑性势流函数．将(3.1)和动量、质量守恒方程联立求解波动问题，使适当选取 f_p 的某种形式使理论计算和实验结果吻合起来．遵循这种方法，60 年代以来，尤其对单晶材料，位错动力学解释应变率效应获得了一定的成功． 金属的宏观塑性行为是位错在应力场作用下不断增殖与运动造成

的. 利用著名的 Orowan 公式

$$\dot{\gamma}^{p}=bN\bar{V}_{d} \tag{3.2}$$

可把塑性切应变率 $\dot{\gamma}^{p}$ 和位错的平均可动密度和平均运动速度 $\bar{V}_{d}$ 联系起来,其中 b 是 Burgers 矢量. 目前,在实验观察的基础上对位错的运动与增殖提出了许多模型[16], 在不同程度上成功解释了上述不少材料的应变率效应. 最近,有人把塑性内变量理论用于研究塑性波的传播也同样获得了满意的结果. 近来对用这种实验和假想模型拟合的办法去研究材料的动力学性质构作本构方程的方法提出了挑战,不少作者认为这种方法本身存在固有的缺点. 可以相信,随着理论和实验的深入发展一定会更加深入地揭示材料的应变率效应的.

3. 冲击波技术和高压状态方程. 在用流体动力学方法研究固体受到超高速撞击时(冲击速度约从 1 公里/秒至 10 公里/秒)发生的动力学过程,包括强激波在固体内的传播规律(不计强度、热传导和其他耗散效应). 关键问题是确定一个描写介质处于高温、高压下的状态方程:

$$p=p(\rho.U)$$

或

$$p=p(\rho.T) \tag{3.3}$$

其中 p, ρ, U 和 T 分别表示压力、密度、比内能和温度. 要完全从理论上去确定是不容易的. 目前,广泛采用平板撞击技术测定固体的激波参数,以确定 Hugoniot 状态曲线,而后从统计热力学角度通过半理论与半经验的方法构作出一个适合数值计算的状态方程. 从 1958 年 Rice[17] 等人公开发表其实验数据以来,这方面的文献和资料是大量的. 这里,我们要指出,在用冲击波技术建立状态方程时,作了激波无结构、定态传播、波后介质处于热力学平衡态等基本假定. 今天,对问题的认识又进入了更高阶段,对激波的结构,定态波的发育过程、激波稳定性条件及冲击波下的相变过程已进行了充分讨论,这都是值得我们更加重视的课题.

4. 流体-弹塑性模型评说. 为了计算中等压力范围内或在高速撞击下低压区和卸压区的变形和运动,上述流体模型不再适用了,这时固体的强度效应不可忽略. 工程上广泛应用流体-弹塑性模型来描写物体的本构关系[18], 这种模型假定 (i) 过程是绝热的, 压力功和不可逆的塑性变形功必然导致物体的温升, 这就要引进能量方程; (ii) 平均压力 $\bar{p}=\frac{1}{3}(\sigma_{xx}+\sigma_{yy}+\sigma_{zz})$ 只对体积变化有贡献,并可用一个状态方程去描写,而剪应力只引起剪应变. 二者互不耦合,即不表现任何的剪胀效应. (iii) 加载函数不但受加工硬化影响, 而且受压力 $\bar{p}$ 和温度 T 的影响; iv) 剪应力和弹性剪应变服从 Hooke 定律,高压下剪切刚度模量仍维持常数,塑性应变和应力服从 Prandtl-Reuss 关系. 由此可知,这种模型只是流体模型与小应变弹塑性理论的机械结合和扩充, 既没有反映应变速率的效应又没有反映有限应变的特点. 其真实性和适用性是值得研究的. 目前,从理性力学角度对介质在有限变形下的弹塑性性质进行了初步研究,从不可逆热力学角度去讨论热弹塑性体的本构方程. 特别是塑性内变量理论, 如 Valanis 的内时理论[19], 认为塑性变形不但使材料产生明显的温升来影响材料的弹性性质,而且存在表征物质内部结构发生变化的物理量(称其为内变量)去影响材料的弹性性质. 这种理论不但可解释材料的应变率效应而且可以解释应变率历史效应并打破了关于塑性加卸载面的传统观念,用热力学定律去直接构作本构方程. 虽然, 内变量的概念还是不具体的,但毕竟提出本构方程研究的新方向,颇应予以重视.

参 考 文 献

[1] Love, A. E. H., A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity, 4th, ed. New York (1944).
[2] Courant. R. and Friedrichs, K. O., Supersonic Flow and Shock Wave, New York (1948).
[3] Hadamard, J. Lecons Sur la Propagation des Ondes, Herrmann, Paries (1903).

[4] Truesdell, C. and Toupin, R., The Classical Field Theories, Flügge's Encyclopidia of Physics 3, Part I (1960), 226.
[5] Truesdell, C. and Noll, W. The Non-Linear Field Theories of Mechanics. Flügge's Encyclopidia of Physics, 3, Part 3 (1965).
[6] Eringen, A. C. et al., Continuum Physics. Vol. 2 Academic Press, New York and London (1971).
[7] Thomas, T. Y., The General Theory of Compatibility Condition. *Internat, J. Engrg. Sci*, 4 (1966), 207.
[8] Green, W. A. Growth of Plane Discontinuties Propagation into a Homogenously Deformed Elastic Materials. *Arch. Ratl. Mech. Anal.*, 16(1964), 79.
[9] Coleman, B. D. and Noll, W. An Approximation Theorem for Functionals with Applications in Continuum Mechanics, *Arch. Ratl. Mech. Anal.*, 6 (1960), 355.
[10] Nunziato, J. W., et al., Wave Propagation in Non-Linear Viscoelastic Solids, in "Handbuch der Physik" Vol VI a/4 (1974).
[11] Taylor, G. I., *J. Inst. Civil. Engrs*, 2, 6 (1946), 486.
[12] Von-Karman, T and Duwez, P. E. J. *Appl. Phys.*, 21 (1950), 987.
[13] Lindholm, U. S., Some Experiments with Split Hopkinson Pressure Bar. *J. Mech. Phys. Solids*, 12, (1964), 317.
[14] Fowles, G. R. Experimental, technique and Instrumentation. After "Dynamic Response of Muterials of Inteuse Loading." ed by Chou, P. C. and Hopkins, A. K. (1972).
[15] Malvern, L. E., *J. Appl. Mech.* 18 (1951), 203.
[16] Gilman, J. J., *Appl. Mech. Review*, 21 (1968), 767.
[17] Rice, M. H., et al. Compression of Solids by Strong Shock Wave in Solid State Physics, Vol. 6, Academic Press Inc New York (1958).
[18] Wilkins, M. L., Calculation of Elastic-Plastic Flow After Method in Compututional physics, Vol. 13, ed by B. Alder et al. (1964).
[19] Valanis, K. C., Some Recent Developments In the Endochronic Theory of Plasticity-the Concept of Internal Barriers The University of Iowa (1976).

（上接第 45 页）

式中

M——扭矩（kg · mm）；D——外直径（mm）；d——内直径（mm）；a——裂纹深度（mm）

相应的，内孔表面轴向裂纹的应力强度因子 K_{III}

$$K_{III}=\frac{MD\sqrt{a}}{D^4-d^4}\left[2.55+4.07\left(\frac{2a}{D-d}\right)\right] \tag{2}$$

式中符号与(1)式相同.

按(1)式及(2)式计算的无量纲 $K_{III}\Big/\frac{MD\sqrt{a}}{D^4-d^4}$ 值和有限单元法计算的结果，以及相对误差均列于下表.

$2a/D-d$	按(1)式计算	有限元计算	误差(%)	按(2)式计算	有限元计算	误差(%)
0.083	2.728	2.760	−1.16	2.888	2.88	0.278
0.167	2.795	2.785	0.359	3.230	3.23	0
0.250	2.905	2.900	0.172	3.568	3.56	0.225
0.333	3.059	3.055	0.133	3.905	3.90	0.128
0.416	3.252	3.180	2.260	4.244	4.24	0.095
0.500	3.499	3.490	0.258			

（1978 年 1 月 26 日收到）