

圆柱形曲板在侧压作用下的应力分析

薛以年

(中国科学院力学研究所)

有人作过这方面的计算工作^[1],但只是考虑四边经典简支的情况。它反映了边界的中面法向力为零,所以一般又称其为滑动简支。这种边界条件不一定适合所有的具体结构。而且,文献[1]仅给出了挠度、弯矩和中面正应力的计算曲线,实际上在角点附近,扭矩和中面剪应力起主要作用。本文用富氏级数法和有限元法,对四边固定简支和直边滑动简支、曲边固定简支的情况进行了计算。

四边固定简支边界条件情况的分析计算

这里是在弹性范围、薄壳、扁壳和线性理论的假设下,用能量法来进行分析计算的。把中面位移 u 、 v 、 w 写成富氏级数形式(坐标选取见图1)。对于满足四边固定简支(周边中面切向位移为零)边界条件

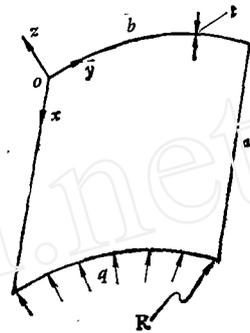


图 1

$$u = w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = v = 0 \quad (x = 0, a)$$

$$v = w = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = u = 0 \quad (y = 0, b)$$

$$\left. \begin{aligned} u &= t \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} u_{ij} \sin \frac{2i\pi x}{a} \sin \frac{(2j-1)\pi y}{b} \\ v &= t \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} v_{kl} \sin \frac{(2k-1)\pi x}{a} \sin \frac{2l\pi y}{b} \\ w &= t \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \sin \frac{(2m-1)\pi x}{a} \sin \frac{(2n-1)\pi y}{b} \end{aligned} \right\} \quad (1a)$$

和四边固定简支(周边中面剪应力为零)边界条件

$$u = w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (x = 0, a)$$

$$v = w = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (y = 0, b)$$

$$\left. \begin{aligned} u &= t \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} u_{ij} \sin \frac{2i\pi x}{a} \cos \frac{2j\pi y}{b} \\ v &= t \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} v_{kl} \cos \frac{2k\pi x}{a} \sin \frac{2l\pi y}{b} \\ w &= t \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \sin \frac{(2m-1)\pi x}{a} \sin \frac{(2n-1)\pi y}{b} \end{aligned} \right\} \quad (1b)$$

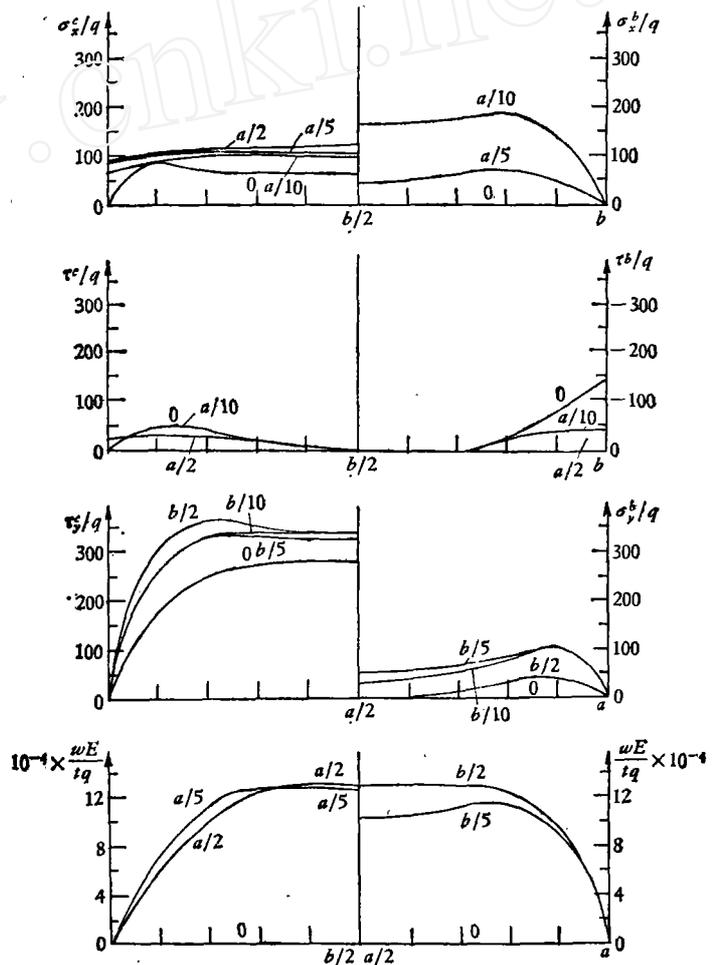
表1 σ_y^0/q 的最大值及其所在位置

α	λ 边界条件 坐标		0.5					1					1.5				
			x	y	σ_x^0/q	σ_y^0/q	σ_z^0/q	x	y	σ_x^0/q	σ_y^0/q	σ_z^0/q	x	y	σ_x^0/q	σ_y^0/q	σ_z^0/q
0.003	0.5	I	$a/2$	$b/5$	343	94	437	$a/5$	$b/5$	334	83	417	$a/10$	$b/5$	318	97	415
		II	$a/2$	$b/5$	344	72	416	$a/5$	$b/5$	337	64	401	$a/10$	$b/5$	324	77	401
	1	I	$a/5$	$b/10$	352	59	411	$a/10$	$b/10$	349	56	405	$a/5$	$b/5$	339	46	385
		II	$a/5$	$b/5$	350	47	397	$a/10$	$b/5$	352	42	394	$a/10$	$b/5$	357	36	393
0.005	0.5	I	$a/2$	$b/5$	202	77	279	$a/5$	$b/5$	190	61	251	$a/5$	$b/5$	201	43	244
		II	$a/2$	$b/5$	203	65	268	$a/5$	$b/5$	193	52	245	$a/5$	$b/5$	201	37	238
	1	I	$a/5$	$b/10$	201	54	255	$a/10$	$b/10$	199	52	251	$a/10$	$b/5$	205	34	239
		II	$a/5$	$b/5$	201	42	243	$a/10$	$b/5$	203	38	241	$a/10$	$b/5$	208	24	232

将(1a)和(1b)分别代入总势能表达式(包括中面应变能、弯曲应变能和均匀侧压 q 的外力势),然后对总势能变分为零,便依次得到相应于平衡方程的线性代数方程组。

在航空结构的常用几何参数范围,取 $\lambda = a/b = 0.5, 1, 1.5$,
 $\beta = b/R = 0.5, 1, \alpha = t/R = 0.003, 0.005$ 进行了计算,主要结果列于表1中;并举例画出了 $\lambda = 1, \beta = 0.5, \alpha = 0.003$ 的应力分布和挠度分布曲线(见图2)。其中 $\sigma_x^0, \sigma_y^0, \tau^0$ 为中面应力, $\sigma_x^b, \sigma_y^b, \tau^b$ 为曲板外表面的弯曲应力, $\sigma_y^0 = \sigma_y^a + \sigma_y^b$ 。表1中列出了反映应力水平的无量纲应力参数 σ_y^0/q 的最大值及其所在位置;I和II依次表示周边中面的切向位移为零和剪应力为零两种边界条件的情况。因为不论是内压或外压,中面应力和弯曲应力在外表面总是符号相同而叠加成沿厚度绝对值最大。所以,图2中弯曲应力为外表面的计算值。

计算结果表明:周边中面的切向位移为零和剪应力为零两种边界条件的结果差别不大。剪应力分布



(周边中面切向位移为零)

图2 应力分布和挠度分布计算曲线

$\lambda = 1, \beta = 0.5, \alpha = 0.003$

除在角点处以外都较小,而角点处并非应力水平高的地方,因此可不予考虑。工程强度校核常采用最大剪应力准则。可以看出,这里决定强度的主要因素就是曲板外表面的周向应力 σ_y^c 。从表1中看到最大应力出现在稍离边界和角点的一些地方。

直边滑动简支、曲边固定简支边界条件情况的分析计算

这里是用有限元法,采用弹性矩形薄板单元来进行分析计算的。单元划分见图3。其中,所有带“,”的符号均表示为对应于整体坐标系的; $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ 依次为绕 x', y', z' 坐标轴的转角。为了简化计算过程,仅取一条直边为滑动简支边界条件,且让该边上的薄板单元平行于整体坐标系 $x'y'$ 平面,其余三边为固定简支。这样四边的边界条件表达式,就可在整体坐标系中直接简单地给出(见图3);由计算可知,所得的主要结果,与两直边均为滑动简支的情况基本相同。利用对称性,这里只需取曲板的一半来划分单元,并且在应力变化较大的边界和角点附近的区域,把单元划分得稍密一些。选取单元位移模式为:

$$\left. \begin{aligned} u &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy \\ v &= \alpha_5 + \alpha_6 x + \alpha_7 y + \alpha_8 xy \\ w &= \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 y + \beta_4 x^2 + \beta_5 xy + \beta_6 y^2 + \beta_7 x^3 + \beta_8 x^2 y \\ &\quad + \beta_9 xy^2 + \beta_{10} y^3 + \beta_{11} x^3 y + \beta_{12} x y^3 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

表2 结点的应力值 (kg/cm²)

结点号	1	2	5	6	21	22	25	26	
四边固定简支	σ_x^c	0	59.0	29.8	73.5	45.2	79.6	0	57.1
	σ_y^c	0	173	10.1	180	15.4	179	0	168
	τ^c	0	9.85	16.6	19.6	-25.8	-27.4	0	14.9
	τ^b	138	51.2	31.9	3.08	-31.6	-2.92	-118	-35.9
一直边滑动简支	σ_x^c	0	58.8	25.1	70.4	-221	-71.8	0	33.2
	σ_y^c	0	173	8.54	179	-75.3	118	0	97.6
	τ^c	0	8.29	14.1	16.5	-417	-352	-558	-443
	τ^b	140	54.2	32.3	4.15	-88.7	-54.8	-270	-170
四边滑动简支	σ_x^c	0	0	0	155	0	155	0	0
	σ_y^c	0	0	0	133	0	133	0	0
	τ^c	539	434	436	370	-436	-370	-539	-434
	τ^b	392	256	134	114	-134	-114	-392	-256

为了验证选取的位移模式(2)和如图3的单元划分进行有限元法计算的可靠性,首先计算了四边固定简支边界条件的情况。结果表明,在所关心的角点附近,中面应力计算值与前面富氏级数法的计算结果符合良好(结点应力计算值取其周围各单元中在该结点的计算平均值)。

这里,计算的目的在于了解与四边固定简支边界条件比较,直边放松为滑动简支后,角点附近应力分布及应力水平的变化。下面对 $q = 1\text{kg/cm}^2$ 作用下的曲板($a=b=R=100\text{cm}$, $t=0.5\text{cm}$)进行了计算。主要的结果列于表2中。表2中,四边滑动简支情况的计算结果也是用富氏级数法进行计算的。

计算结果表明:一直边放松为滑动简支后,对另一直边附近的应力影响很小。由此可知,一直边滑动简支与两直边滑动简支所得到的主要计算结果基本相同。直边放松为滑动简支后,最大应力为角点处的剪应力,而且与四边固定简支边界条件的情况相比,应力水平大大提高,即第25号结点 $\tau^c = -558\text{kg/cm}^2$, $\tau^b = -270\text{kg/cm}^2$,而表1中相应处 $\sigma_y^c = 199\text{kg/cm}^2$, $\sigma_x^c = 52\text{kg/cm}^2$,

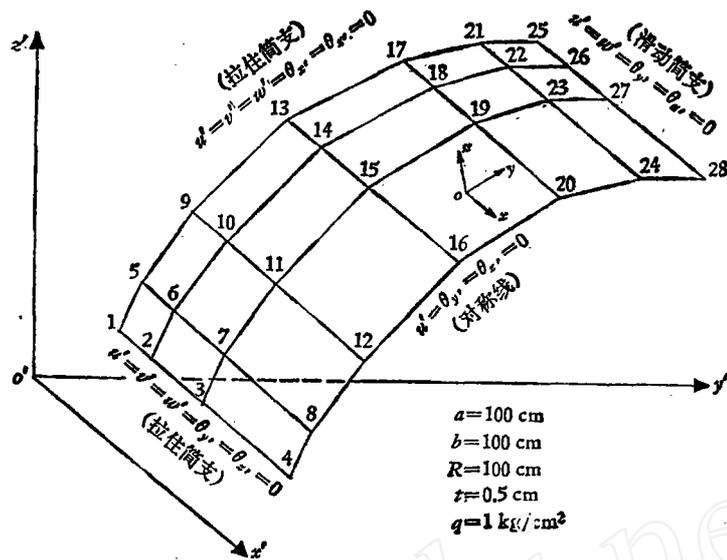


图 3

应力水平提高了好几倍。可见,直边边界条件在曲面内放松对强度分析影响颇大。由四边滑动筒支情况的计算结果还可以看到,如果直边是滑动筒支,则曲边边界条件在曲面内放松与否,对应力水平影响不大,而且最大应力亦为角点处的剪应力。

参 考 文 献

- [1] Kitching, R. and Hughes, J.F., *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design*, 11, 2 (1976), 102—106.
(1978年6月2日收到)

单颗泥沙运动力学及统计规律

韩其为 何明民

我们采用力学与概率论相结合的途径,对单颗泥沙运动进行了研究。

1. 单颗泥沙运动的机理和概化图形 单颗泥沙具有静止、滚动、跳跃和悬浮四种运动状态。当水流强度不很大时,床面颗粒起动之后,常常是滚动。当水流强度较大,或具有一定速度的运动颗粒与床面颗粒碰撞后,产生了一定的竖向分速,颗粒就会离开床面,作短暂的跳跃。当水流强度很大时,在紊动水流的涡体携带下,泥沙颗粒可以在水中悬浮一定的距离。跳跃颗粒与滚动颗粒的区分,视其离开床面的上升高度是否超过一个粒径高度而定。在河道中,四种运动状态的泥沙同时存在,并不断转移。颗粒在床面上相邻两个极低位置之间的滚动,称为单步滚动。颗粒由起滚到止滚的单次运动,由若干个运动步组成。单次跳跃和单次悬浮也由若干个运动步组成。颗粒与床面相邻两个接触点之间的运动,为单步运动。

造成单颗泥沙运动具有偶然性的原因,是它处于床面的位置和作用在其上的水流速度,都是