关于充液腔体旋转运动稳定问题的变分原理及其应用

徐 硕 昌

（中国科学院力学研究所）

摘　　要

对于任意形状、充满粘性液体的腔体绕惯性主轴整体旋转的一般情形，导得小扰动运动的一组线性微分-积分方程组．在 Ляпунов 稳定理论基础上发展的一系列方法都处理不了这个问题．本文应用文献［1］中的方法导得这个问题变分原理的一般形式，并得到一系列稳定判据．以前不少作者的结果均是本文的特例[3-6]．

本文的变分方法在充液腔体运动稳定性问题中具有较广泛的应用，对于线性非自伴本征值问题原则上都能应用．

整个充满或部分充有液体的腔体的运动及稳定问题是一个经典课题．一世纪前就有许多科学家研究了这个课题[2]．近三十年来由于工程问题的需要，使这个问题的研究得到迅速发展[3-6]．

处理运动稳定性问题的一次近似法和 Ляпунов 直接法对有限自由度情形特别有效．Жуковский 的等效原则可以将无穷自由度问题化为有限自由度问题处理，文献［4］中包括了这方面的主要结果．实际情形是必须考虑粘性的．目前，考虑粘性都是局限于大粘性和小粘性的特殊情形[6]．Румецев 的部分变元稳定理论，可以变无穷自由度问题为有限自由度问题处理．但此时的稳定充分条件在一般情形可能既不充分也不必要了[4]．Greenspan 的理论是局限于壳体运动已知条件下求解边界层方程[7]．

本文所得小扰动运动方程式是一组非自伴线性微分-积分方程组，直接求解是困难的，上述方法和经典变分法都无法处理[4,8]．应用文献［1］的非自伴算子变分方法，可以处理这个 $\infty + 3$ 个自由度的问题，最大优点是可以不必求出本征函数具体形式就可判定不稳定本征值的存在．文献［1］的非自伴算子变分方法是固体力学中伴随变分方法的进一步发展[9]．两个方法数学原理是相同的，同样都能提供稳定性近似计算的变分基础，但在文献［1］的方法中，还具有 Ляпунов 直接法的优点．

我们所研究的充满粘性液体的腔体绕惯性主轴以恒定角速度 $\boldsymbol{\Omega}_0$ 旋转作定点运动的稳定，壳体和腔的形状可任意，只限制两者惯性主方向一致，粘性大小也可任意，这是相当一般的情形．以前的不少作者的结果都可作为本文特例[4,6,10-12]．而本文变分方法对充液腔体运动稳定

本文 1978 年 1 月 3 日收到．

性问题的应用具有一定的普遍意义，本文最后还提到了可能的应用范围.

一、问题的数学提法

1. 基本假设

假设充液腔体在平衡状态绕通过定点 o 的一个惯性主方向以 $\boldsymbol{\Omega}_0$ 作整体旋转. 下面来研究小扰动情形下的稳定.

首先，引入以下三个基本坐标系.

(1) 固定坐标系 $\{o, \xi_1, \xi_2, \xi_3\}$: 定点 o 为原点，旋转轴 ξ_3 沿铅垂方向，坐标单位矢为 $\boldsymbol{i}_1^0$, $\boldsymbol{i}_2^0$, $\boldsymbol{i}_3^0$. 假设壳体和腔内液体重心位置距 o 分别为 h_1 和 h_2，总质量分别为 M_1 和 M_2.

(2) 平衡运动坐标系 $\{o, x_1, x_2, x_3\}$: x_3 轴和 ξ_3 重合，此系相对固定坐标系以 $\boldsymbol{\Omega}_0(o, o, \Omega_0)$ 旋转，坐标轴单位矢分别为 $\boldsymbol{i}_1$, $\boldsymbol{i}_2$, $\boldsymbol{i}_3$. 设 P^0 为液体压力，平衡时满足:

$$P^0 = p_0 + \frac{\rho}{2}\Omega_0^2(x_1^2 + x_2^2) - \rho g x_3 \tag{1}$$

其中 ρ 为液体密度，g 为重力加速度.

(3) 扰动运动坐标系 $\{o, x_1', x_2', x_3'\}$: 假设充液腔体偏离平衡的小扰动是绕 o 作定点运动，相对 $\{o, x_1, x_2, x_3\}$ 系以角速度 $\boldsymbol{\omega}(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ 旋转. 在扰动运动过程中，$\{o, x_1', x_2', x_3'\}$ 和液腔体相固连；坐标单位矢 $\boldsymbol{i}_1'$, $\boldsymbol{i}_2'$, $\boldsymbol{i}_3'$ 沿充液腔体的惯性主方向.

假设坐标系 $\{o, x_1', x_2', x_3'\}$ 和 $\{o, x_1, x_2, x_3\}$ 之单位矢满足

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{i}_1' &= \boldsymbol{i}_1 + \gamma_{12}\boldsymbol{i}_2 + \gamma_{13}\boldsymbol{i}_3, \\ \boldsymbol{i}_2' &= \gamma_{21}\boldsymbol{i}_1 + \boldsymbol{i}_2 + \gamma_{23}\boldsymbol{i}_3, \\ \boldsymbol{i}_3' &= \gamma_{31}\boldsymbol{i}_1 + \gamma_{32}\boldsymbol{i}_2 + \boldsymbol{i}_3, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

其中 $\gamma_{ij} = \cos(\boldsymbol{i}_i', \boldsymbol{i}_j)$, 由正交条件有 $\gamma_{ij} = -\gamma_{ji}$.

2. 基本方程和边界条件

相对平衡运动坐标系 $\{o, x_1, x_2, x_3\}$ 列出基本方程和边界条件[4]:

(1) 壳体运动方程

设壳体和腔内液体关于 o 的主转动惯量分别为 A_1, B_1, C_1 及 A_2, B_2, C_2. 壳体的总动量矩 $\boldsymbol{G}$ 为:

$$\left.\begin{aligned} G_{x_1} &= \omega_1 A_1 - \Omega_0(A_1 - C_1)\gamma_{31}, \\ G_{x_2} &= \omega_2 B_1 - \Omega_0(B_1 - C_1)\gamma_{32}, \\ G_{x_3} &= (\omega_3 + \Omega_0)C_1, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

则壳体的动量矩方程为:

$$\begin{aligned} \frac{d\boldsymbol{G}}{dt} + \boldsymbol{\Omega}_0 \times \boldsymbol{G} = &-(M_1 g h_1 + M_2 g h_2)(\gamma_{32}, -\gamma_{31}, o) \\ &+ \Omega_0^2[\gamma_{23}(B_2 - C_2), -\gamma_{13}(A_2 - C_2), o] - \iint_S \boldsymbol{r} \times (-p_1\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}) \cdot \boldsymbol{n} dS, \end{aligned} \tag{4}$$

其中 S 为腔的表面，$\boldsymbol{n}$ 为其外法矢，p_1 为扰动压力，$\boldsymbol{\tau}$ 为粘性应力张量，$\mathbf{I}$ 为单位张量.

(2) 腔内液体运动方程为:

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} + 2\boldsymbol{\Omega}_0 \times \boldsymbol{v} = \frac{1}{\rho}\nabla(-p_1\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}) \tag{5}$$

其中

$$p_1 = p - p^0 = p + \rho g x_3 - \frac{\rho}{2}\Omega_0^2(x_1^2 + x_2^2) - p_0 \tag{6}$$

连续方程

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0. \tag{7}$$

(3) 边界条件:

$$\boldsymbol{v}|_S = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}. \tag{8}$$

另有

$$\frac{d\boldsymbol{i}_l'}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{i}_l' \quad (l = 1, 2, 3). \tag{9}$$

整个问题就是按 (4), (5), (7), (9) 式和边界条件 (8) 及初始条件，求解 $\boldsymbol{v}$, p_1, $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{i}_1'$, $\boldsymbol{i}_2'$, $\boldsymbol{i}_3'$.

3. 本征值问题的提法

依照粘性流体力学稳定理论来处理上述数学问题[13,14]. 由于这些方程只含对时间 t 的导数而不显含时间 t,所以可以期望有和指数函数 $e^{i\lambda t}$ 成比例的解,而扰动边界条件又是齐次的,所以能导得 λ 的本征值问题. 如果所有本征值虚部为正,运动是稳定的; 反之,至少有一个本征值虚部为负,运动是不稳定的[13,14].

假设

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_0 e^{i\lambda t} = (\omega_{10}, \omega_{20}, \omega_{30}) e^{i\lambda t}, \\ &\boldsymbol{v} = \boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) e^{i\lambda t}, \quad p_1 = P(\boldsymbol{r}) e^{i\lambda t}. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

以 (10) 式的第一式代入 (9), 得到:

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{i}_1' = \left(1, -\frac{i\omega_{30}}{\lambda} e^{i\lambda t}, \frac{i\omega_{20}}{\lambda} e^{i\lambda t}\right), \\ &\boldsymbol{i}_2' = \left(\frac{i\omega_{30}}{\lambda} e^{i\lambda t}, 1, -\frac{i\omega_{10}}{\lambda} e^{i\lambda t}\right), \\ &\boldsymbol{i}_3' = \left(-\frac{i\omega_{20}}{\lambda} e^{i\lambda t}, \frac{i\omega_{10}}{\lambda} e^{i\lambda t}, 1\right). \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

以 (10), (11) 式代入 (4), (5), (7), (9) 及 (8) 式,得到下述本征值问题:

$$\begin{cases} i\lambda^2(A_1\omega_{10}, B_1\omega_{20}, C_1\omega_{30}) + \lambda(A_1 + B_1 - C_1)\boldsymbol{\Omega}_0 \times \boldsymbol{\omega}_0 + i(M_1 g h_1 + M_2 g h_2)(\omega_{10}, \omega_{20}, o) \\ \quad + i\Omega_0^2[(B_1 - C_1 + B_2 - C_2)\omega_{10}, (A_1 - C_1 + A_2 - C_2)\omega_{20}, o] \\ \quad + \lambda \iint_S \boldsymbol{r} \times (-P\boldsymbol{I} + \boldsymbol{\tau}) \cdot \boldsymbol{n} dS = 0, & (12) \\ i\lambda \boldsymbol{V} + 2\boldsymbol{\Omega}_0 \times \boldsymbol{V} = \frac{1}{\rho}\nabla \cdot (-P\boldsymbol{I} + \boldsymbol{\tau}), & (13) \\ \nabla \cdot \boldsymbol{V} = 0, & (14) \\ \text{在 } S \text{ 上 } \boldsymbol{V}|_S = \boldsymbol{\omega}_0 \times \boldsymbol{r}, & (15) \end{cases}$$

其中 $\boldsymbol{\tau}$ 为粘性应力张量, $\tau_{ij} = \mu\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i}\right)$.

容易证明: 如果 λ, $\boldsymbol{\omega}_0$, $\boldsymbol{V}$, P 是 (12)—(15) 式构成的本征值问题(记为 A)的解; 则 $i\lambda^*$, $\boldsymbol{\omega}_0^*$, $\boldsymbol{V}^*$ P^* 也是解. 下面按非自伴算子变分方法[1]来处理问题 A.

二、变分原理的一般形式

1. 伴随本征值问题(问题 A^+)

$$\begin{cases} i\mu^2(A_1\sigma_{10}, B_1\sigma_{20}, C_1\sigma_{30}) - \mu(A_1 + B_1 - C_1)\boldsymbol{\Omega}_0 \times \boldsymbol{\sigma}_0 + i(M_1gh_1 + M_2gh_2)(\sigma_{10}, \sigma_{20}, o) \\ \quad + i\Omega_0^2[(B_1 - C_1 + B_2 - C_2)\sigma_{10}, (A_1 - C_1 + A_2 - C_2)\sigma_{20}, o] \\ \quad + \mu\iint_S \boldsymbol{r} \times (-Q\mathbf{I} + \mathbf{T}) \cdot \boldsymbol{n}dS = 0, & (16) \\ i\mu\boldsymbol{U} - 2\boldsymbol{\Omega}_0 \times \boldsymbol{U} = \frac{1}{\rho}\nabla \cdot (-Q\mathbf{I} + \mathbf{T}), & (17) \\ \nabla \cdot \boldsymbol{U} = 0, & (18) \\ \text{在 } S \text{ 上 } \boldsymbol{U}|_S = \boldsymbol{\sigma}_0 \times \boldsymbol{r}, & (19) \end{cases}$$

其中 $\mathbf{T}$ 的分量 $T_{ij} = \mu\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right)$, $\boldsymbol{\sigma}_0 = (\sigma_{10}, \sigma_{20}, \sigma_{30})$.

问题 A 和问题 A^+ 具有明确的物理意义: 如 A 对应右旋情形; 则 A^+ 对应左旋情形. 容易证明: 如果本征值 μ, $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{U}$, Q 是问题 A^+ 的解, 则 $i\mu^*$, $\boldsymbol{\sigma}^*$, $\boldsymbol{U}^*$, Q^* 亦是 A^+ 的解. 下面可以证明 A 和 A^+ 具有相同的本征值系列.

2. 变分方程的推导

设 λ_l, $\boldsymbol{\omega}_l$, $\boldsymbol{V}_l$, P_l 是问题 A 的一组解; μ_n, $\boldsymbol{\sigma}_n$ $\boldsymbol{U}_n$, Q_n 是问题 A^+ 的一组解. 以 $\boldsymbol{U}_n$ 乘 (13) 式两边再对液体所占体积 τ 积分,再利用 (14), (18), (19) 式化简得:

$$i\lambda_l\iiint_\tau \rho\boldsymbol{V}_l \cdot \boldsymbol{U}_n d\tau + 2\iiint_\tau \rho(\boldsymbol{\Omega}_0 \times \boldsymbol{V}_l) \cdot \boldsymbol{U}_n d\tau + \frac{1}{2}\iiint_\tau \mu\left(\frac{\partial V_{l,i}}{\partial x_j} + \frac{\partial V_{l,j}}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial U_{n,i}}{\partial x_j} + \frac{\partial U_{n,j}}{\partial x_i}\right)d\tau = \iint_S (\boldsymbol{\sigma}_n \times \boldsymbol{r}) \cdot (-P_l\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}) \cdot \boldsymbol{n}dS. \tag{20}$$

再在 (12) 式两边乘以 $\boldsymbol{\sigma}_n$ 得:

$$\begin{aligned} &i\lambda_l^2(A_1\omega_{l,1}\sigma_{n,1} + B_1\omega_{l,2}\sigma_{n,2} + C_1\omega_{l,3}\sigma_{n,3}) - \lambda\Omega_0(A_1 + B_1 - C_1)(\omega_{l,2}\sigma_{n,1} \\ &\quad - \omega_{l,1}\sigma_{n,2}) + i(M_1gh_1 + M_2gh_2)(\omega_{l,1}\sigma_{n,1} + \omega_{l,2}\sigma_{n,2}) + i\Omega_0^2[(B_1 \\ &\quad - C_1 + B_2 - C_2)\omega_{l,1}\sigma_{n,1} + (A_1 - C_1 + A_2 - C_2)\omega_{l,2}\sigma_{n,2}] \\ &\quad + \lambda_l\iint_S (\boldsymbol{\sigma}_n \times \boldsymbol{r}) \cdot [-P_l\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}] \cdot \boldsymbol{n}dS = 0. \end{aligned} \tag{21}$$

由方程 (20) 和 (21) 消去有关压力的表面积分项:

$$\begin{aligned} &(i\lambda_l)^2\left[(A_1\omega_{l,1}\sigma_{n,1} + B_1\omega_{l,2}\sigma_{n,2} + C_1\omega_{l,3}\sigma_{n,3}) + \iiint_\tau \rho\boldsymbol{V}_l \cdot \boldsymbol{U}_n d\tau\right] \\ &\quad + (i\lambda_l)\left[-(A_1 + B_1 - C_1)\Omega_0(\omega_{l,2}\sigma_{n,1} - \omega_{l,1}\sigma_{n,2}) + 2\iiint_\tau \rho(\boldsymbol{\Omega}_0 \times \boldsymbol{V}_l)\right. \\ &\quad \left.\cdot \boldsymbol{U}_n d\tau + \iiint_\tau \frac{\mu}{2}\left(\frac{\partial V_{l,i}}{\partial x_j} + \frac{\partial V_{l,j}}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial U_{n,i}}{\partial x_j} + \frac{\partial U_{n,j}}{\partial x_i}\right)d\tau\right] - (M_1gh_1 \\ &\quad + M_2gh_2)(\omega_{l,1}\sigma_{n,1} + \omega_{l,2}\sigma_{n,2}) - \Omega_0^2[(B_1 - C_1 + B_2 - C_2)\omega_{l,1}\sigma_{n,1} \\ &\quad + (A_1 - C_1 + A_2 - C_2)\omega_{l,2}\sigma_{n,2}] = 0. \end{aligned} \tag{22}$$

按推导(22)式类似过程,以 $\boldsymbol{\omega}_l$ 乘(16)式两边,以 $\boldsymbol{V}_l$ 乘(17)式两边对 τ 积分,再由这两个方程消去面积分项得到:

$$(i\mu_n)^2\left[(A_1\omega_{l,1}\sigma_{n,1}+B_1\omega_{l,2}\sigma_{n,2}+C_1\omega_{l,3}\sigma_{n,3})+\iiint_\tau \rho \boldsymbol{V}_l\cdot\boldsymbol{U}_n d\tau\right]$$
$$+(i\mu_n)\Big[-(A_1+B_1-C_1)\Omega_0(\omega_{l,2}\sigma_{n,1}-\omega_{l,1}\sigma_{n,2})+2\iiint_\tau \rho(\boldsymbol{\Omega}_0\times\boldsymbol{V}_l)$$
$$\cdot\boldsymbol{U}_n d\tau+\iiint_\tau \frac{\mu}{2}\left(\frac{\partial V_{l,i}}{\partial x_j}+\frac{\partial V_{l,j}}{\partial x_i}\right)\cdot\left(\frac{\partial U_{n,i}}{\partial x_j}+\frac{\partial U_{n,j}}{\partial x_i}\right)d\tau\Big]$$
$$-(M_1gh_1+M_2gh_2)(\omega_{l,1}\sigma_{n,1}+\omega_{l,2}\sigma_{n,2})-\Omega_0^2[(B_1-C_1$$
$$+B_2-C_2)\omega_{l,1}\sigma_{n,1}+(A_1-C_1+A_2-C_2)\omega_{l,2}\sigma_{n,2}]=0. \tag{23}$$

由方程(22)和(23)看出: $\lambda_l=\mu_l$, 这样证明了问题 A 和问题 A^+ 具有相同本征值序列.

在方程(22)中令 $l=n$, 并引入记号:

$$A(\boldsymbol{\omega}_l,\boldsymbol{\sigma}_l)=A_1\omega_{l,1}\sigma_{l,1}+B_1\omega_{l,2}\sigma_{l,2}+C_1\omega_{l,3}\sigma_{l,3}, \tag{24}$$

$$I(\boldsymbol{V}_l,\boldsymbol{U}_l)=\iiint_\tau \rho\boldsymbol{V}_l\cdot\boldsymbol{U}_l d\tau, \tag{25}$$

$$B(\boldsymbol{\omega}_l,\boldsymbol{\sigma}_l)=(A_1+B_1-C_1)(\boldsymbol{\Omega}_0\times\boldsymbol{\omega}_l)\cdot\boldsymbol{\sigma}_l, \tag{26}$$

$$\Psi(\boldsymbol{V}_l,\boldsymbol{U}_l)=2\iiint_\tau \rho(\boldsymbol{\Omega}_0\times\boldsymbol{V}_l)\cdot\boldsymbol{U}_l d\tau, \tag{27}$$

$$\Phi(\boldsymbol{V}_l,\boldsymbol{U}_l)=\iiint_\tau \frac{\mu}{2}\left(\frac{\partial V_{l,i}}{\partial x_j}+\frac{\partial V_{l,j}}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial U_{l,i}}{\partial x_j}+\frac{\partial U_{l,j}}{\partial x_i}\right)d\tau, \tag{28}$$

$$L(\boldsymbol{\omega}_l,\boldsymbol{\sigma}_l)=\Omega_0^2[(C_1-B_1+C_2-B_2)\omega_{l,1}\sigma_{l,1}+(C_1-A_1$$
$$+C_2-A_2)\omega_{l,2}\sigma_{l,2}]-(M_1gh_1+M_2gh_2)(\omega_{l,1}\sigma_{l,1}+\omega_{l,2}\sigma_{l,2}), \tag{29}$$

利用上述记号,方程(22)可写为:

$$[A(\boldsymbol{\omega}_l,\boldsymbol{\sigma}_l)+I(\boldsymbol{V}_l,\boldsymbol{U}_l)](i\lambda_l)^2+[B(\boldsymbol{\omega}_l,\boldsymbol{\sigma}_l)+\Psi(\boldsymbol{V}_l,\boldsymbol{U}_l)$$
$$+\Phi(\boldsymbol{V}_l,\boldsymbol{U}_l)](i\lambda_l)+L(\boldsymbol{\omega}_l,\boldsymbol{\sigma}_l)=0, \tag{30}$$

或者

$$(i\lambda_l)=\frac{1}{A(\boldsymbol{\omega}_l,\boldsymbol{\sigma}_l)+I(\boldsymbol{V}_l,\boldsymbol{U}_l)}\Bigg\{-\frac{[B(\boldsymbol{\omega}_l,\boldsymbol{\sigma}_l)+\Phi(\boldsymbol{V}_l,\boldsymbol{U}_l)+\Phi(\boldsymbol{V}_l,\boldsymbol{U}_l)]}{2}$$
$$\pm\sqrt{\left[\frac{B(\boldsymbol{\omega}_l,\boldsymbol{\sigma}_l)+\Psi(\boldsymbol{V}_l,\boldsymbol{U}_l)+\Phi(\boldsymbol{V}_l,\boldsymbol{U}_l)}{2}\right]^2-[A(\boldsymbol{\omega}_l,\boldsymbol{\sigma}_l)+I(\boldsymbol{V}_l,\boldsymbol{U}_l)]\cdot L(\boldsymbol{\omega}_l,\boldsymbol{\sigma}_l)}\Bigg\}. \tag{31}$$

导出的(30)和(31)式就是变分方程. 这样就将问题 A 和 A^+ 化为泛函的变分问题. 对任 $\varepsilon>0$, 所有满足 $\frac{|\boldsymbol{\omega}|}{\Omega_0}<\varepsilon$ 和 $\frac{|\boldsymbol{\sigma}|}{\Omega_0}<\varepsilon$ 构成六维空间区域 R. 设 $\boldsymbol{V},\boldsymbol{U}$ 是在 τ 上有定义的连续可微函数, 且满足附加条件 $\nabla\cdot\boldsymbol{V}=0$, $\nabla\cdot\boldsymbol{U}=0$ 和 $\boldsymbol{V}|_S=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{U}|_S=\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{r}$. 这样的 $\boldsymbol{U},\boldsymbol{V}$ 全体构成函数空间 M, 则泛函 $i\lambda(\boldsymbol{V},\boldsymbol{U},\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\sigma})$ 为定义在 $M+R$ 上的泛函数. 这是一个在固定边界条件下的非线性泛函的变分问题.

3. 变分原理的证明

假设 $\boldsymbol{V}, \boldsymbol{U}, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\sigma}$ 的变分是 $\delta\boldsymbol{V}, \delta\boldsymbol{U}, \delta\boldsymbol{\omega}, \delta\boldsymbol{\sigma}$ 满足 $\boldsymbol{V}+\delta\boldsymbol{V}\in M$，$\boldsymbol{U}+\delta\boldsymbol{U}\in M$，$\boldsymbol{\omega}+\delta\boldsymbol{\omega}\in R$，$\boldsymbol{\sigma}+\delta\boldsymbol{\sigma}\in R$，可以证明泛函 $i\lambda$ 取极值能得到以下关系式:

$$
\begin{aligned}
&\{2i\lambda[A(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\sigma})+I(\boldsymbol{V},\boldsymbol{U})]+B(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\sigma})+\Psi(\boldsymbol{V},\boldsymbol{U})+\Phi(\boldsymbol{V},\boldsymbol{U})\}i\delta\lambda\\
&\quad=-\delta\boldsymbol{\sigma}\{(i\lambda)^2(A_1\omega_1, B_1\omega_2, C_1\omega_3)+(i\lambda)(A_1+B_1-C_1)\boldsymbol{\Omega}_0\times\boldsymbol{\omega}\\
&\quad-(M_1gh_1+M_2gh_2)(\omega_{10},\omega_{20},o)+i\lambda\iint_S\boldsymbol{r}\times(-P\mathbf{I}+\boldsymbol{\tau})\cdot\boldsymbol{n}dS\\
&\quad-\Omega_0^2[(B_1-C_1+B_2-C_2)\omega_{10},(A_1-C_1+A_2-C_2)\omega_{20},o]\}\\
&\quad-\iiint_\tau\delta\boldsymbol{U}(i\lambda\rho)\left\{(i\lambda)\boldsymbol{V}+2\boldsymbol{\Omega}_0\times\boldsymbol{V}-\frac{1}{\rho}\nabla\cdot(-P\mathbf{I}+\boldsymbol{\tau})\right\}d\tau\\
&\quad-\delta\boldsymbol{\omega}\left\{(i\lambda)^2(A_1\sigma_1, B_1\sigma_2, C_1\sigma_3)-i\lambda(A_1+B_1-C_1)\boldsymbol{\Omega}_0\times\boldsymbol{\sigma}\right.\\
&\quad-(M_1gh_1+M_2gh_2)(\sigma_{10},\sigma_{20},o)+i\lambda\iint_S\boldsymbol{r}\times(-Q\mathbf{I}+\mathbf{T})\cdot\boldsymbol{n}dS\\
&\quad\left.-\Omega_0^2[(B_1-C_1+B_2-C_2)\sigma_{10},(A_1-C_1+A_2-C_2)\sigma_{20},o]\right\}\\
&\quad-\iiint_\tau(i\lambda\rho)\left\{(i\lambda)\boldsymbol{U}-2\boldsymbol{\Omega}_0\times\boldsymbol{U}-\frac{1}{\rho}\nabla\cdot(-Q\mathbf{I}+\mathbf{T})\right\}\delta\boldsymbol{V}d\tau=0.
\end{aligned}
\tag{32}
$$

利用变分法基本引理（文献[8]卷1，第4章，§3），由上式能得出结论：定义在 $M+R$ 上的泛函 $i\lambda(\boldsymbol{V},\boldsymbol{U},\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\sigma})$ 取极值能导得本征值问题 A 和 A^+ 的解；反之，问题 A 和 A^+ 的解使泛函 $i\lambda$ 取极值．因此，变分方程（30）或（31）提供稳定性近似方法的变分基础[9]，同时也是分析本征值虚部符号的基本出发点．

4. 本征值的积分关系式

下面由变分方程（31）来决定本征值虚部的符号．在（30）或（31）式中以 $\boldsymbol{\omega}^*$ 代替 $\boldsymbol{\sigma}$ 和以 $\boldsymbol{V}^*$ 代替 $\boldsymbol{U}$，就得到本征值积分关系式

$$(A+I)(i\lambda)^2+(B+\Psi+\Phi)(i\lambda)+L=0, \tag{33}$$

或者

$$i\lambda=\frac{1}{A+I}\left\{-\frac{B+\Psi+\Phi}{2}\pm\sqrt{\left[\frac{B+\Psi+\Phi}{2}\right]^2-[A+I]\cdot L}\right\}, \tag{34}$$

其中

$$A(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\omega}^*)=A_1\omega_{10}\omega_{10}^*+B_1\omega_{20}\omega_{20}^*+C_1\omega_{30}\omega_{30}^*, \tag{35}$$

$$I=I(\boldsymbol{V},\boldsymbol{V}^*)=\iiint_\tau\rho\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{V}^*d\tau, \tag{36}$$

$$B=B(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\omega}^*)=(A_1+B_1-C_1)(\boldsymbol{\Omega}_0\times\boldsymbol{\omega})\cdot\boldsymbol{\omega}^*, \tag{37}$$

$$\Psi=\Psi(\boldsymbol{V},\boldsymbol{V}^*)=2\iiint_\tau\rho(\boldsymbol{\Omega}_0\times\boldsymbol{V})\cdot\boldsymbol{V}^*d\tau, \tag{38}$$

$$\Phi=\Phi(\boldsymbol{V},\boldsymbol{V}^*)=\iiint_\tau\frac{\mu}{2}\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j}+\frac{\partial V_j}{\partial x_i}\right)^2d\tau, \tag{39}$$

$$
\begin{aligned}
L=L(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\omega}^*)=\Omega_0^2[&(C_1-B_1+C_2-B_2)\omega_{10}\omega_{10}^*+(C_1-A_1\\
&+C_2-A_2)\omega_{20}\omega_{20}^*]-(M_1gh_1+M_2gh_2)(\omega_{10}\omega_{10}^*+\omega_{20}\omega_{20}^*).
\end{aligned}
\tag{40}
$$

可以证明由变分方程（30）和（33）式确定的本征值具有一一对应的关系．

首先在变分方程(30)中，令 $\boldsymbol{U}=\boldsymbol{U}-\boldsymbol{V}^*+\boldsymbol{V}^*=\boldsymbol{V}^*+\delta\boldsymbol{V}^*$，$\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\omega}^*=\boldsymbol{\omega}^*+\delta\boldsymbol{\omega}^*$ 按推导变分方程相同方式变换(30)式得:

$$\{(A+I)(i\lambda)^2+(B+\Psi+\Phi)(i\lambda)+L\}$$
$$+\delta\boldsymbol{\omega}^*\Big\{(i\lambda)^2(A_1\sigma_1,\ B_1\sigma_2,\ C_1\sigma_3)-(i\lambda)(A_1+B_1-C_1)\boldsymbol{\Omega}_0\times\boldsymbol{\sigma}$$
$$-(M_1gh_1+M_2gh_2)(\sigma_{10},\sigma_{20},o)+i\lambda\iint_S \boldsymbol{r}\times(-Q\mathbf{I}+\mathbf{T})\cdot\boldsymbol{n}dS$$
$$-\Omega_0^2[(B_1-C_1+B_2-C_2)\sigma_{10},(A_1-C_1+A_2-C_2)\sigma_{20},o]\Big\}$$
$$+\iiint_\tau (i\lambda)\rho\Big\{(i\lambda)\boldsymbol{U}-2\boldsymbol{\Omega}_0\times\boldsymbol{U}-\frac{1}{\rho}\nabla\cdot(-Q\mathbf{I}+\mathbf{T})\Big\}d\boldsymbol{V}^*\delta\tau=0. \quad (41)$$

由于 $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{Q}$ 是问题 A^+ 的解，这样就证明了由(30)式决定的本征值和(33)式给出的本征值一样.

反之，按完全类似方式，可由(33)式推出(30)式. 因此，我们分析稳定临界条件只要根据本征值积分关系式(34)式就成.

三、充液腔体旋转运动的稳定判据

在本征值积分关系式(34)中，由(35)—(40)式表示的各项具有明确的物理意义：$A(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\omega}^*)>0$ 表示壳体的扰动动能；$I(\boldsymbol{V},\boldsymbol{V}^*)>0$ 表示腔内液体的扰动动能；$B(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\omega}^*)$，$\Psi(\boldsymbol{V},\boldsymbol{V}^*)$ 是纯虚数，形式上对应 Coriolis 力做功；$\Phi(\boldsymbol{V},\boldsymbol{V}^*)>0$ 是腔内液体粘滞力耗散功；$L(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\omega}^*)$ 相应扰动运动引起系统势能的变化.

对于任意形状的充满粘滞不可压液体的腔体绕惯性主轴旋转(角速度为 $\boldsymbol{\Omega}_0$)的一般情形，只限定壳体和腔内液体惯性主方向一致. 壳体和腔内液体惯性主矩分别为 A_1, B_1, C_1 和 A_2, B_2, C_2；总质量分别为 M_1 和 M_2，重心位置距定点 o 分别为 h_1 和 h_2. 根据(34)式利用

引理. 设 $Z=e+if(e>0)$ 和任意实数 a，则

(1) $\mathrm{Re}\{-Z\pm\sqrt{Z^2-a^2}\}<0$, (42)

(2) $0<\max\{\mathrm{Re}[-Z\pm\sqrt{Z^2+a^2}]\}<a$, (43)

可以得到如下稳定判据.

定理 1. 如果对所有本征矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 满足

$$L(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\omega}^*)=\Omega_0^2[(C_1-B_1+C_2-B_2)\omega_{10}\omega_{10}^*+(C_1-A_1+C_2-A_2)\omega_{20}\omega_{20}^*]$$
$$-(M_1gh_1+M_2gh_2)(\omega_{10}\omega_{10}^*+\omega_{20}\omega_{20}^*)>0, \quad (44)$$

则充液腔体旋转运动一定稳定.

证. 按粘性流体运动稳定理论的规定，所有本征值虚部为正，运动就是稳定的[13,14]。用反证法，假设存在某个本征矢量 $\boldsymbol{\omega}_K$ 使 $L(\boldsymbol{\omega}_K,\boldsymbol{\omega}_K^*)<0$ 在(43)式中令

$$e=\frac{\Phi(\boldsymbol{V},\boldsymbol{V}^*)}{2}>0,\qquad if=\frac{B(\boldsymbol{\omega}_K,\boldsymbol{\omega}_K^*)+\Psi(\boldsymbol{V},\boldsymbol{V}^*)}{2},$$

$a^2=-[A(\boldsymbol{\omega}_K,\boldsymbol{\omega}_K^*)+I(\boldsymbol{V},\boldsymbol{V}^*)]\cdot L(\boldsymbol{\omega}_K,\boldsymbol{\omega}_K)]>0$（其中 $\boldsymbol{v}$ 为任意连续函数），根据(43)式可知，

$$\mathrm{Re}(i\lambda) = \frac{1}{A+I}\mathrm{Re}\{-Z \pm \sqrt{Z^2+a^2}\} > 0.$$

当 $\boldsymbol{v}$ 用与 $\boldsymbol{\omega}_K$ 相对应本征速度函数 $\boldsymbol{V}_K$ 代替，则 λ 就是与 $\boldsymbol{\omega}_K$, $\boldsymbol{V}_K$ 相对应的本征值 λ_K，这个 λ_K 的虚部为负，这和稳定假设矛盾.

推论 1. 当

$$\Omega_0^2(C_1 - A_1 + C_2 - A_2) > M_1gh_1 + M_2gh_2 \tag{45}$$

(其中 $A_1 \geqslant B_1$, $A_2 \geqslant B_2$) 成立，则充液腔体旋转运动一定稳定.

这个结果 Румецев 只在部分变元稳定定义下得到(文献 [4] 第 3 章 § 3).

推论 2. 当 $h_1 = h_2 = 0$, 如果

$$C_1 - A_1 + C_2 - A_2 > 0, \quad C_1 - B_1 + C_2 - B_2 > 0 \tag{46}$$

成立，则充液腔体自由迴旋运动一定稳定，即其绕最短惯性主轴自由迴旋是稳定的.

这个结果，Черноусько (文献 [6] 第 4 章，Смирнов[10]) 仅在小粘性及特殊腔形时得到.

完全类似定理 1 的证明可以得到如下不稳定性定理:

定理 2. 如果至少存在一个本征矢量 $\boldsymbol{\omega}$, 使

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}^*) = \Omega_0^2[(C_1 - B_1 + C_2 - B_2)\omega_{10}\omega_{10}^* + (C_1 - A_1 + C_2 - A_2)\omega_{20}\omega_{20}^*] \\ - (M_1gh_1 + M_2gh_2)(\omega_{10}\omega_{10}^* + \omega_{20}\omega_{20}^*) < 0, \end{aligned} \tag{47}$$

则充液腔体旋转运动一定不稳定.

推论 3. 当

$$\Omega_0^2(C_1 - A_1 + C_2 - A_2) < M_1gh_1 + M_2gh_2 \tag{48}$$

(其中 $A_1 \leqslant B_1$, $A_2 \leqslant B_2$) 成立，则充液腔体旋转运动是不稳定的.

推论 4. 当 $h_1 = h_2 = 0$, 如果

$$C_1 - A_1 + C_2 - A_2 < 0 (A_1 < B_1, A_2 < B_2), \tag{49}$$

则充液腔体自由迴旋运动一定不稳定. 即其绕最长惯性主轴自由迴旋运动一定不稳定.

对于轴对称充液腔体，即 $A_1 = B_1$, $A_2 = B_2$ 根据定理 1 和定理 2 直接得到如下结论:

定理 3. 当充液腔体绕对称轴整体旋转时，满足

$$\Omega_0^2(C_1 - A_1 + C_2 - A_2) > M_1gh_1 + M_2gh_2 \quad (A_1 = B_1, A_2 = B_2) \tag{50}$$

运动是稳定的;

当

$$\Omega_0^2(C_1 - A_1 + C_2 - A_2) < M_1gh_1 + M_2gh_2 \quad (A_1 = B_1, A_2 = B_2) \tag{51}$$

时，运动是不稳定的.

Соболев[11], Ищлиский 和 Темченко[12]以及另外一些作者的工作[4,6]均是这个结果的特例.

定理 4. 轴对称充液腔体绕对称轴自由迴旋 ($h_1 = h_2 = 0$) 运动稳定充要条件，是对称轴为最短惯性主轴(球体是随遇稳定情形，除外).

四、关于 Жуковский 定理的注记

Жуковский 证明了充满理想液体的腔体内部的液体的运动等效于一个刚体的运动(参看文献 [4] 第 2 章 § 2). 对充满理想液体的腔体绕惯性主轴整体旋转稳定性的结论也和没有空腔的刚体旋转稳定结论相类似[15,4]: 绕最长惯性主轴或者绕最短惯性主轴旋转是稳定的;只在

绕中间轴旋转是不稳定的.

本文考虑粘性对充液腔体旋转运动稳定的影响，证明了充液腔体只在绕最短惯性主轴旋转才是稳定的. Румецев 用部分变元稳定理论证明这是稳定的充分条件(文献[4]第 3 章§4). 因此,对 Жуковский 的结论应作相应的修正: 充液腔体只在绕最短惯性主轴旋转时才具有"迴转稳定效应".

五、在充液腔体运动稳定问题中的应用

本文的变分方法为充液腔体运动稳定理论引进一种新方法. 对于文献[4—6]中所处理的小扰动稳定问题原则上都能应用. 当处理粘性液体情形时就更有效，局限性是不能处理非线性问题.

现将可能应用的问题择要列举如下:

1. 应用于解决 Coloumbus 问题. 这是一个经典问题，在液体陀螺仪理论及地球物理学中具有实际应用,另文将专门讨论.

2. 可推广到部分充有液体的腔体运动稳定问题[4,5].

3. 充液腔体的外壳是弹性体或连接有弹性构件的情形[16—17].

致谢: 对于谈镐生教授的指导和帮助表示衷心的感谢.

参　考　文　献

[1] 徐硕昌，旋转磁流体力学系统的变分原理及其应用，科学通报，20(1975)，372—378.

[2] Lamb, H., *Hydrodynamics*, Six edit., Cambridge, 1932, § 384.

[3] Rumyantsev, V. V., Stability of Motion of Solid Bodies with Liquid-Filled Cavities by Lyapunov's Methods, *Advances in applied mechanics*, vol. VIII, Academic Press, New York and London, 1964.

[4] Моисеев. Н. Н., *Румянцев, В. В., Динамика тела с полостями, содержащими жидкость*, М., изд-во «наука», 1965.

[5] Микищев. Г. Н., Рабиновиг, Б. И., *Динамика твердого тела с полостями, частично заполненными жидкостью*. Изд. Машинострониe 1968.

[6] Черноусько, Ф. Л., *Двежение твердого тела с полостями, содержащими вязкую жидкость*, М., В. Ц. АН СССР, 1968.

[7] Grecspan, H. P., On the Genenal Theory of Contained Rotating Fluid, *J. Fluid. Mech.*, 22 (1965), 449—462.

[8] Couront, R., Hilbert, D., *Methods of Mathematical Physics*, Vol. 1, 2, Intersience. Pub., New York, 1962.

[9] Prasad, S. N., Herrmann, G., Adjoint Variational methode in non-conservative stability problem, *Int. J. Solids and Struct.*, 8(1972), 29—40.

[10] Смирнова, Е. М., Устойчивости свободного вращения волчка, содержащего тороидамкую полость с жидкой, малой вязкостью, *ИЗВ. АН СССР МТТ*, 5 (1976).

[11] Соболев, С. Л., О движении симметричного волчка с полостью, наполненной жидкостью, *ПМТФ*, 3 (1960), 20—55.

[12] Ишлинский, А, Ю., Темченко, М. Е., О малых колебаниях вертикальной оси волчка, имеющего полость, целиком наполненную идеальной несжимаемой жидкостью, *ПМТФ*, 3 (1960), 65—75.

[13] 谷一郎，粘性流体力学，上海科学技术出版社，1962,82.

[14] 朗道 Л. Д.，栗弗席兹，Е. М.，连续介质力学，第一册，人民教育出版社，1952，128.

[15] Четаев, Н. Г., *Устойчивость движения*, Гостехиздат, 1955.

[16] Meirovitch, L., A stationarity principle for the eigenvalue problem for Rotating Structure, *AIAA*, 14(1976), 1387.

[17] Руменцев В. В., О движении и устойчивости упругого тела с полостью, содержащей жидкость, *ПММ*. 33 (1969).