

I 积分和弹塑性断裂准则

王 自 强

(中国科学院力学研究所)

一、引 言

1951年在位错理论的研究中 Eshelby^[1] 提出了积分形式的能量动量张量的概念. 1968年 Rice^[2,3] 在研究裂纹顶端的弹塑性应力场的过程中, 引入了与能量动量张量静分量形式相同的 J 积分. Rice 论证了 J 积分的路径无关性; 确立了 J 积分与形变功率之间的关系. 由于 J 积分是裂纹顶端应力场的平均度量, 它可以由实验直接测定. 因此, 七十年代以来, J 积分作为一个有吸引力的断裂准则, 受到了普遍的重视.

但是 J 积分的上述特性都是建立在塑性形变理论基础之上的. 塑性形变理论本质上是非线性弹性理论, 它应用的限制条件之一是不允许卸载. 对于实际的塑性材料, 塑性应变与加载历史有关, 而与应力并没有唯一对应的关系. 与此相应的储藏在单位体元内的应变能也与加载历史有关. 因此, J 积分所包含的应变能密度 W 的含意并不清楚.

另一方面, 塑性变形是不可逆的. 因此 J 积分与形变功率之间的关系, 不能应用于裂纹扩展过程. 对一个裂纹体加载从而使裂纹在该载荷下扩展, 与裂纹先扩展然后再加载, 得到的结果是不相同的. 因此, J 积分不能简单地解释为裂纹扩展力, 它可以看作是相同载荷条件下, 两个具有相近裂纹尺寸的另一物体总势能的比较.

J 积分的这些弱点是众所周知的. Rice 等人曾经试图寻找一个适用于塑性流动理论的与路径无关的积分, 但是迄今为止, 这种努力没有获得成功.

本文提出了一个与路径无关的新积分. 这个积分名之为 I 积分. I 积分对任何塑性材料, 包括用塑性流动理论描述的真实材料, 都有明确的定义, 并且是一个与积分区域无关的不变积分, 它可以作为裂纹顶端弹塑性场的平均度量.

另一方面, I 积分与裂纹扩展力之间有着直接关系, 因此, I 积分可以作为弹塑性断裂准则. 从线弹性到全塑性 I_{lc} 都可作为平面应变条件下裂纹起始扩展的断裂准则.

二、I 积分的引入

与 J 积分类似的, 引入积分

$$L = \int_{\Gamma} \left\{ W, dy - \bar{T} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} ds \right\}, \quad (1)$$

如图 1 所示, Γ 是环绕裂纹顶端的一条任意回路.

\bar{n} 是 Γ 曲线上任意点的外法线, 该点的张力矢量为 \bar{T} , $T_i = \sigma_{ij} n_j$. \bar{u} 是位移矢量. S 为 Γ

本文 1977 年 3 月 15 日收到.

曲线上的弧长。与 J 积分不同的是 W_e 与应力 σ_{ij} 唯一对应的弹性应变能密度。

$$\begin{aligned} W_e &= \frac{1}{2} (\sigma_x \cdot \varepsilon_x^e + \sigma_y \cdot \varepsilon_y^e + \tau_{xy} \cdot \gamma_{xy}^e) \\ &= \frac{(1+\nu)}{2E} \{ \sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \nu(\sigma_x + \sigma_y)^2 + 2\tau_{xy}^2 \}, \end{aligned} \quad (2)$$

弹性应变 $\varepsilon_x^e, \varepsilon_y^e, \gamma_{xy}^e$ 与 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ 之间的关系可用虎克定律表示

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x^e &= \frac{\partial W_e}{\partial \sigma_x}, \\ \varepsilon_y^e &= \frac{\partial W_e}{\partial \sigma_y}, \\ \gamma_{xy}^e &= \frac{\partial W_e}{\partial \tau_{xy}}; \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

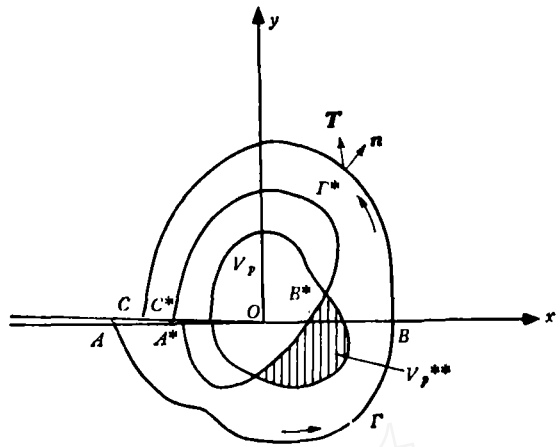


图 1 裂纹体

公式(2)适用于线弹性及普朗特-瑞斯塑性流动理论所描述的材料,对非线性弹性材料,

$$W_e = \int_0^{\varepsilon_{ij}^e} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}, \quad (4)$$

为了研究 L 积分的性质,研究一个不包含奇点的封闭回路 C , 沿着封闭回路 C , 有

$$L_C = \int_C \left\{ W_e dy - \vec{T} \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} ds \right\} = \iint_V \left\{ \frac{\partial W_e}{\partial x} - \sigma_{ij} \cdot \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x} dx dy \right\}, \quad (5)$$

这里 σ_{ij} 表示应力张量, ε_{ij} 表示应变张量。

推导公式(5)时,利用了格林公式、平衡方程及下述虚功原理

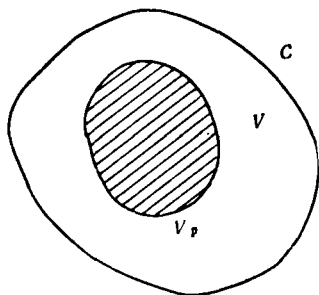


图 2

理

$$\int_C \vec{T} \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} ds = \iint_V \sigma_{ij} \cdot \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x} dx dy, \quad (6)$$

利用虎克定律(3)、(4)及复合函数的微分公式得到

$$\begin{aligned} L_C &= \iint_{(V)} \left\{ \sigma_{ij} \frac{\partial \varepsilon_{ij}^e}{\partial x} - \sigma_{ij} \cdot \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x} \right\} dx dy \\ &= - \iint_V \sigma_{ij} \cdot \frac{\partial \varepsilon_{ij}^e}{\partial x} dx dy = - \iint_{V_p} \sigma_{ij} \cdot \frac{\partial \varepsilon_{ij}^e}{\partial x} dx dy, \end{aligned} \quad (7)$$

V_p 是封闭回路 C 所包围的塑性区, ε_{ij}^e 是塑性应变张量。根据公式(1)与(7)引入一个新的积分

$$I = \int_\Gamma \left\{ W_e dy - \vec{T} \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} ds \right\} + \iint_{(V_p)} \sigma_{ij} \left(\frac{\partial \varepsilon_{ij}^e}{\partial x} \right) dx dy, \quad (8)$$

这里 V_p 是 Γ 所包含的塑性区。

为了证明 I 积分与选择的路径无关,研究另外的回路 Γ^* , 假设 V_p^{**} 是回路 Γ 及回路 Γ^* 之间的塑性区,对于封闭回路 $A^*ABCC^*B^*A^*$, 运用公式(7)得

$$L_{\overline{A^*ABCC^*B^*A^*}} = \oint W_e dy - \vec{T} \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} ds = - \iint_{V_p^{**}} \sigma_{ij} \frac{\partial \varepsilon_{ij}^e}{\partial x} dV, \quad (9)$$

封闭回路 $\overline{A^*ABCC^*B^*A^*} = \Gamma - \Gamma^* + \overline{AA^*} + \overline{CC^*}$.

在线段 $\overline{A^*A}$, $\overline{CC^*}$ 上, 应力张量 \bar{T} 为零, dy 也等于零, 由公式(9)得

$$\int_{\Gamma} \left(W_{,d} dy - \bar{T} \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} ds \right) - \int_{\Gamma^*} \left(W_{,d} dy - \bar{T} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} ds \right) = - \iint_{V_p^{**}} \sigma_{ij} \cdot \frac{\partial \varepsilon_{ij}^p}{\partial x} dV, \quad (10)$$

进而得到

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \left(W_{,d} dy - \bar{T} \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} ds \right) + \iint_{V_p^{**}} \sigma_{ij} \frac{\partial \varepsilon_{ij}^p}{\partial x} dV + \iint_{V_p^*} \sigma_{ij} \frac{\partial \varepsilon_{ij}^p}{\partial x} dV &= \int_{\Gamma^*} \left(W_{,d} dy - \bar{T} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} ds \right) \\ + \iint_{V_p^*} \sigma_{ij} \frac{\partial \varepsilon_{ij}^p}{\partial x} dV, \end{aligned} \quad (11)$$

注意到 $V_p = V_p^* + V_p^{**}$, 上式变为

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \left(W_{,d} dy - \bar{T} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} ds \right) + \int_{V_p} \left(\sigma_{ij} \frac{\partial \varepsilon_{ij}^p}{\partial x} \right) dV &= \int_{\Gamma^*} \left(W_{,d} dy - \bar{T} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} ds \right) \\ + \int_{V_p^*} \left(\sigma_{ij} \frac{\partial \varepsilon_{ij}^p}{\partial x} \right) dV. \end{aligned} \quad (12)$$

公式(12)就表示 I 积分的数值与选择的路径无关.

三、 I 积分与裂纹扩张力

考察带细长深切口的物体, 当切口宽度趋于零时就得到极限情况的裂纹体.

如图 3 所示, 带细长深切口的物体占有面积 V , 切口的长度为 a , 切口的端部为半圆, 切口的宽度等于半圆的直径.

该物体承受外载的边界为 S_T , 其余的边界 S_u 上的位移 \bar{u} 预先给定, 设想切口的长度由 a 扩展至 $a + \Delta a$, 此时外载所作的功为

$$\Delta A_T = \int_{S_T} T_i (u_i^* - u_i) ds, \quad (13)$$

这里 u_i^* 是切口扩展后的位移分量.

内力所作的功由两部分组成, 一部分是带阴影部分 $CEFD$ 区域中内力所作的功, 由于弧

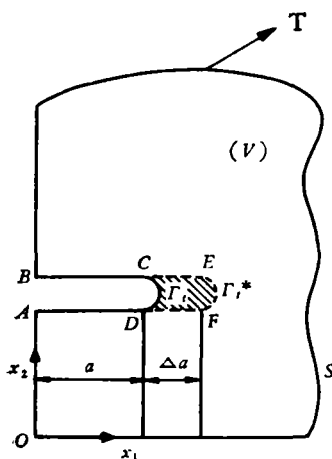


图 3

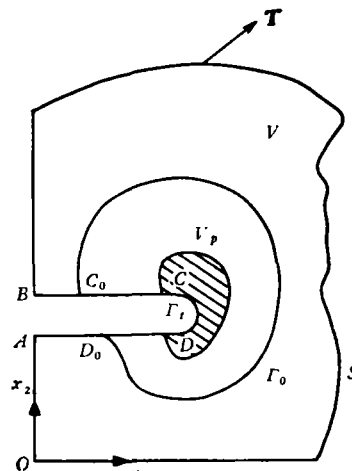


图 4

线 $CEFD$ 是开裂面,作用在它上面的张力卸载至零,造成该区域微元完全卸载,因此内力所作的功,等于卸载所释放的弹性应变能:

$$\Delta A'_\sigma = - \iint_{\Delta V} W_\epsilon(\sigma_{ii}) dV. \quad (14)$$

另一部分是区域 $V - \Delta V$ 中,内力所作的功

$$\Delta A''_\sigma = \iint_{V-\Delta V} \sigma_{ii}(\epsilon_{ij}^* - \epsilon_{ij}) dV, \quad (15)$$

ϵ_{ij}^* 是切口端部扩展后的应变.

裂纹扩展力 \tilde{G} 可以由下式确定^[4]:

$$\tilde{G} \cdot \Delta a = \Delta A_T - (\Delta A'_\sigma + \Delta A''_\sigma) \quad (16)$$

$$\tilde{G} = \int_{s_T} T_i \cdot \frac{\partial u_i}{\partial a} ds - \int_{V-\Delta V} \sigma_{ii} \cdot \frac{\partial \epsilon_{ii}}{\partial a} dV + \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta a} \iint_{\Delta V} W_\epsilon dV. \quad (17)$$

在圆弧 \widehat{DC} 上, $T_i = 0$; 又在 S_u 上位移预先给定,因此

$$\frac{\partial u_i}{\partial a} = 0, \quad \text{在 } S_u \text{ 上.}$$

依照虚功原理:

$$\begin{aligned} \int_V \sigma_{ij} \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial a} dV &= \int_s T_i \frac{\partial u_i}{\partial a} ds = \int_{s_T} T_i \frac{\partial u_i}{\partial a} ds + \int_{\widehat{DC}} T_i \frac{\partial u_i}{\partial a} ds + \int_{S_u} T_i \frac{\partial u_i}{\partial a} ds \\ &+ \int_{\widehat{DA+BC}} T_i \frac{\partial u_i}{\partial a} ds = \int_{s_T} T_i \frac{\partial u_i}{\partial a} ds. \end{aligned} \quad (18)$$

将(18)式代入(17)式得:

$$\tilde{G} = \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta a} \int_{\Delta V} W_\epsilon(\sigma_{ii}) dV = \int_{\Gamma_i} W_\epsilon dy. \quad (19)$$

考察任意一条包围切口端部的回路 Γ_0 , Γ_0 与 Γ_i 及线段 CC_0 , D_0D 组成一个封闭回路 C , 应用公式(7)得

$$L_c = \int_c \left\{ W_\epsilon dy - \bar{T} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} ds \right\} = - \iint_{V_p} \sigma_{ij} \frac{\partial \epsilon_{ij}^p}{\partial x} dV,$$

在半圆 Γ_i 上 \bar{T} 等于零; 在切口自由表面 CC_0 及 D_0D 上 \bar{T} 也等于零, dy 等于零, 由此

$$\int_{\Gamma_0} \left\{ W_\epsilon dy - \bar{T} \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} ds \right\} + \int_{V_p} \sigma_{ij} \cdot \frac{\partial \epsilon_{ij}^p}{\partial x} dV = \int_{\Gamma_i} W_\epsilon dy. \quad (20)$$

(20)式左边表示一个 \tilde{I} 积分, 由(19)、(20)得

$$\tilde{G} = \tilde{I}, \quad (21)$$

\tilde{I} 积分与裂纹扩张力 \tilde{G} , 字母上的符号“ \sim ”表示对细长深切口而言的, 让切口宽度趋于零即得

$$G = I, \quad (22)$$

公式(22)表明 I 积分等于裂纹扩张力.

四、 I 积分与 J 积分

对于理想的弹性材料(线性的或非线性的)卸载时所释放的弹性应变能 W_ϵ 与加载时储存

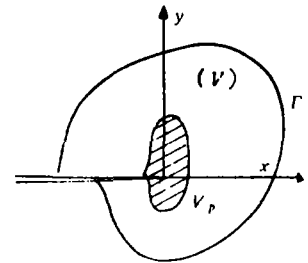


图 5

的弹性应变能相等。因此有 $W_e \equiv W$

另一方面有 $\epsilon_{ii}^p \equiv 0$, 这样就得到

$$I = \int_{\Gamma} \left(W_e dy - \bar{T} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} ds \right) + \int_{V_p} \sigma_{ij} \cdot \frac{\partial \epsilon_{ij}^p}{\partial x} dx dy = \int_{\Gamma} \left(W_e dy - \bar{T} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} ds \right) = J. \quad (23)$$

也就是对理想弹性材料, I 积分与 J 积分相等, 众所周知, J 积分的几个基本性质都是在形变理论范围内得到了证实, J 积分本身包含有应变能密度 W , 这意味着 J 积分只对线弹性材料及亨基 (Hencky) 材料有明确的意义, 塑性理论已经证明亨基材料本质上是非线性弹性材料。因此, J 积分实质上是理想弹性材料的 I 积分。

对于真实材料, 裂纹顶端必然有塑性区, 如果塑性区 V_p 限制在很小的区域内, 那么可以认为当线积分路径离裂纹顶端充分远时, I 积分的线积分部分与 J 积分相等。因为在积分路径上, 应力应变处于弹性状态, 并且应力应变的数值不受塑性区 V_p 的影响, 因此, 对小范围屈服的有

$$I = J + \iint_{V_p} \sigma_{ij} \frac{\partial \epsilon_{ij}^p}{\partial x} dx dy. \quad (24)$$

这里特别强调 J 积分的路径必须包围裂纹顶端的整个塑性区, 不许通过塑性区。

公式(24)表示了对真实塑性材料, I 积分与 J 积分之间的互相关系, 对这种关系, 我们可以提出一种新的物理解释, 这种新的解释如果被实验证明为正确的话, 那将给 I 积分作为弹塑性断裂准则提供依据。

由于 I 积分考虑了真实塑性材料的裂纹扩展过程, 因此从宏观的连续介质力学观点出发, I 积分描述了宏观的裂纹扩张力, 当 I 积分的线积分路径包围了整个塑性区时, I 积分可表示为裂纹扩张的弹性驱动力与裂纹扩张塑性阻力之差, 令

$$G_e = \int_{\Gamma} W_e dy - \bar{T} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} ds, \quad (25)$$

$$R_p = - \iint_{(V_p)} \sigma_{ij} \cdot \frac{\partial \epsilon_{ij}^p}{\partial x} dx dy, \quad (26)$$

则

$$I = G_e - R_p. \quad (27)$$

不难证明对任何包含裂纹尖端整个塑性区 V_p 的回路 Γ (由裂纹自由面任一点开始, 逆时针包围裂纹尖端整个塑性区, 而终止于裂纹另一个自由面的任意回路), G_e 是个不变量, 它等于回路 Γ 上的 J 积分, 它表征了裂纹扩展的弹性驱动力, R_p 只是取决于裂纹尖端塑性区的应力及塑性应变特性, 它表征了裂纹扩展的塑性阻力, 另一方面, 从微观角度考虑, 裂纹扩展单位面积时, 在开裂面两侧必须提供表面张力 $2T$, 作为裂纹起始扩展的条件有

$$I_{ic} = 2T = (G_{ic} - R_{ip}). \quad (28)$$

从公式(28)看出, 当裂纹扩展的弹性驱动力 G_{ic} 等于塑性阻力 R_{ip} 与两倍表面张力 $2T$ 之和时, 裂纹起始扩展。

对脆性材料, 线弹性断裂准则给出

$$G_{ic} = G_{ic}, \quad (29)$$

从(28)式得出

$$(R_{ip})_{cr} = G_{ic} - 2T. \quad (30)$$

对大多数金属而言, G_{1c} 通常比表面张力大三个数量级, 因此, 从(30)式得

$$(R_{1p})_{cr} \doteq G_{1c}. \quad (31)$$

公式(31)对脆性材料的断裂准则给出了另一种物理解释, 也就是说对脆性材料而言, 裂纹扩展的塑性阻力 R_{1p} 随着载荷的增加趋向于临界值, 该临界值是个材料常数。

I 积分适用于裂纹扩展过程, 因此, 它不仅能予示裂纹的起始扩展, 而且能予示裂纹的亚临界扩展和失稳扩展的整个过程, 对脆性材料而言, 裂纹扩展的塑性阻力 R_{1p} , 随着裂纹的亚临界扩展迅速趋于饱和, 该饱和值与临界值差别很小, 都可看作材料常数。

参 考 文 献

- [1] Eshelby, J. D., in *Solid State Physics*, Academic Press, 3(1956), 100.
- [2] Rice, J. R., *Journal of Applied Mechanics*, Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, 1968, 379—386.
- [3] Rice, J. R., *Fracture* (Ed. H. Liebowitz), Academic Press, 2(1968), 191—311.
- [4] Irwin, G. R., *J. Appl. Mech.*, ASME, Series E, 1962, 651—654.

海带雌性孢子体的首次记录

方宗熙 戴继勋 崔竞进 欧毓麟

(山东海洋学院生物系)

根据海藻学的记载, 海带孢子体是无性的, 也就是雌雄同体的^[1], 它所产生的孢子大约有一半萌长成雌配子体, 有一半萌长成雄配子体。性别在配子体中如此分化可能跟遗传有关。欧洲海藻学者 Evans^[2] 曾观察到欧洲产的几个物种的海带雌配子体有一个特别大的染色体, 他猜想这可能是性染色体, 但没有证明。我们所研究的这种海带 (*Laminaria japonica*), 在其雌配子体细胞中没有看到一个特别大的染色体。但是我们在海带单倍体遗传育种的实验中, 却有新的发现。我们发现海带雌配子体由孤雌生殖所产生的孢子体(图1), 在海上培养成

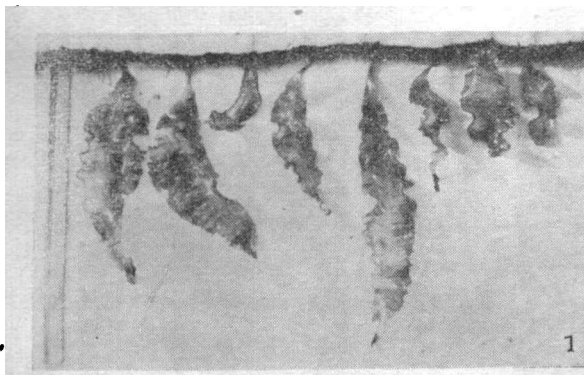


图1 海带雌配子体由孤雌生殖所长成的雌性孢子体
这是在海里生长的情况, 变异较大, 有一部分生长正常, 它们大都能产生后代

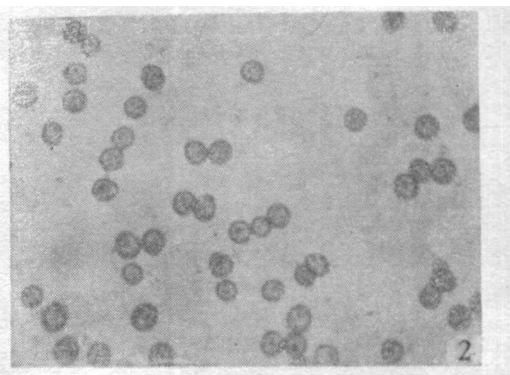


图2 海带雌性孢子体产生的孢子所萌长成的雌配子体
(没有看到雄配子体)

本文 1977 年 8 月 2 日收到。