

# 环形管道与直管道中的磁流体力学流动

中国科学院力学研究所 陈允明

考虑矩形截面环形管道(图1). 轴向加匀强磁场  $B_0$ , 径向电流为  $I$ . 假设导电率  $\sigma$  及粘性系数  $\eta$  都是常数. 设二次流小, 可以忽略  $\left(\frac{Re^2}{M^4} \left(\frac{r_2 - r_1}{r_2 + r_1}\right)^2 \ll 1\right)$ , 其中  $Re = \frac{\rho}{\eta} \frac{I}{4\pi\sqrt{\eta\sigma}}$ ,

$M = \sqrt{\frac{\sigma}{\eta}} B_0 L$ ). 这时在柱坐标下无量纲方程组及边条件为

$$\left. \begin{aligned} \Delta V - \frac{V}{r^2} - M \frac{\partial B}{\partial z} &= 0, \quad \Delta B - \frac{B}{r^2} - M \frac{\partial V}{\partial z} = 0 \\ z = 0, 1; V = 0, B &= \pm \frac{1}{r} \\ r = R_1, R_2; V = 0, \frac{\partial(rB)}{\partial r} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

其中  $V = V_0 / \left(\frac{I}{4\pi L \sqrt{\eta\sigma}}\right)$ ,  $B = B_0 / \left(\frac{\mu I}{4\pi L}\right)$ ,  $r = r'/L$ ,  $z = z'/L$ ,  $R_1 = r'_1/L$ ,

$R_2 = r'_2/L$ ,  $M = \sqrt{\frac{\sigma}{\eta}} B_0 L$ .

困难在于  $r = R_1, R_2$  处  $V$  给的是函数值而  $B$  给的是第三类边值. 假设

$$\left. \frac{\partial(rV)}{\partial r} \right|_{r=R_i} = A_i(z) \quad (i = 1, 2) \quad (2)$$

$A_i(z)$  为待定函数. 这样问题化为第三类边值问题. 由格林函数可求出形式解, 然后利用边条件  $V|_{r=R_i} = 0$  定出未知函数  $A_i(z)$ .

$B \pm V$  分别满足  $\mathcal{L}_{\pm}(B \pm V) = 0$ , 其中  $\mathcal{L}_{\pm}$  为算子  $\Delta - \frac{1}{r^2} \pm M \frac{\partial}{\partial z}$ . 引入格林函数  $G_{\pm}(\xi, \zeta, r, z)$  满足

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L}_{\pm}(G_{\pm}) &= \delta(z - \zeta) \frac{\delta(r - \xi)}{r} \\ z = 0, 1; G_{\pm} = 0; r = R_1, R_2; \frac{\partial(rG_{\pm})}{\partial r} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

其中  $\delta$  为狄拉克函数. 于是利用边条件(1)及(2)可求出

$$\begin{aligned} B(\xi, \zeta) \pm V(\xi, \zeta) &= - \int_{R_1}^{R_2} \left[ \left( \frac{\partial G_{\pm}}{\partial z} \right)_{z=0} + \left( \frac{\partial G_{\pm}}{\partial z} \right)_{z=1} \right] dr \\ &+ \int_0^1 (G_{\pm})_{r=R_1} A_1(z) R_1 dz + \int_0^1 (G_{\pm})_{r=R_2} A_2(z) R_2 dz \end{aligned} \quad (4)$$

应用分离变量法可求出  $G_{\pm}$  为

$$\left. \begin{aligned} G_{\pm} &= - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R_n(p_n \xi) R_n(p_n r)}{N_n} \cdot e^{\mp \frac{M}{2}(z-\zeta)} G_n(z, \zeta) \\ G_n(z, \zeta) &= \begin{cases} \text{sh } \alpha_n(1-\zeta) \text{sh } \alpha_n z / (\alpha_n \text{sh } \alpha_n) & z \leq \zeta \\ \text{sh } \alpha_n \zeta \text{sh } \alpha_n(1-z) / (\alpha_n \text{sh } \alpha_n) & z \geq \zeta \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

其中  $n \neq 0$  时,  $R_n(p_n r) = Y_0(p_n R_1) J_1(p_n r) - J_0(p_n R_1) Y_1(p_n r)$ , 而  $p_n$  是  $Y_0(p_n R_1) J_0(p_n R_2) - J_0(p_n R_1) Y_0(p_n R_2) = 0$  的根。

$$N_n = \int_{R_1}^{R_2} R_n^2(p_n r) r dr = \frac{c_n^2 - 1}{2} \left( \frac{2}{\pi p_n} \right)^2, \quad c_n = J_0(p_n R_1) / J_0(p_n R_2),$$

$$\alpha_n = \sqrt{p_n^2 + (M/2)^2},$$

$n = 0$  时,  $R_0(r) = 1/r$ ,  $N_0 = \ln(R_2/R_1)$ ,  $\alpha_0 = M/2$ ,  $p_0 = 0$ ,

将  $G_{\pm}$  代入式(4), 注意  $1/r$  与  $R_n(p_n r)$  正交, 得到

$$\left. \begin{aligned} B(\xi, \zeta) &= - \frac{\text{sh } M \left( \zeta - \frac{1}{2} \right)}{\text{sh } \frac{M}{2}} \frac{1}{\xi} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{c_n^2 - 1} \cdot \frac{\pi p_n}{2} R_n(p_n \xi) \\ &\times \int_0^1 \frac{\text{sh } \frac{M}{2} (z - \zeta) [A_1(z) + c_n A_2(z)] G_n dz}{\text{ch } \frac{M}{2} - \text{ch } M \left( \frac{1}{2} - \zeta \right)} \\ V(\xi, \zeta) &= \frac{\text{ch } \frac{M}{2} - \text{ch } M \left( \frac{1}{2} - \zeta \right)}{\text{sh } \frac{M}{2}} \frac{1}{\xi} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{c_n^2 - 1} \cdot \frac{\pi p_n}{2} R_n(p_n \xi) \\ &\cdot \int_0^1 \frac{\text{ch } \frac{M}{2} (z - \zeta) [A_1(z) + c_n A_2(z)] G_n dz}{\text{ch } \frac{M}{2} - \text{ch } M \left( \frac{1}{2} - \zeta \right)} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

其中  $n = 0$  时,  $\frac{2}{c_0^2 - 1}$  为  $\frac{1}{\ln(R_2/R_1)}$ ,  $\frac{\pi p_0}{2} R_0$  为  $\frac{1}{\xi}$ ,  $A_1(z) + c_0 A_2(z)$  为  $A_1(z) + A_2(z)$ 。

式(6)中  $B, V$  的第一项正是无限宽管道的哈特曼解, 后面的级数反映侧壁的影响。

最后利用边条件  $V|_{r=R_1} = 0$  可得到确定  $A_i(z)$  的积分方程

$$\left. \begin{aligned} \frac{\text{ch } \frac{M}{2} - \text{ch } M \left( \zeta - \frac{1}{2} \right)}{\text{sh } \frac{M}{2}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{c_n^2 - 1} \int_0^1 \frac{\text{ch } \frac{M}{2} (z - \zeta) G_n(z, \zeta) [A_1(z) + c_n A_2(z)] dz}{\text{ch } \frac{M}{2} - \text{ch } M \left( \frac{1}{2} - \zeta \right)} \\ \frac{\text{ch } \frac{M}{2} - \text{ch } M \left( \zeta - \frac{1}{2} \right)}{\text{sh } \frac{M}{2}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2c_n}{c_n^2 - 1} \int_0^1 \frac{\text{ch } \frac{M}{2} (z - \zeta) G_n(z, \zeta) [A_1(z) + c_n A_2(z)] dz}{\text{ch } \frac{M}{2} - \text{ch } M \left( \frac{1}{2} - \zeta \right)} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

其中  $n = 0$  时  $\frac{2}{c_0^2 - 1}$  及  $\frac{2c_0}{c_0^2 - 1}$  都为  $\frac{1}{\ln(R_2/R_1)}$ 。

有各种方法数值求解此积分方程。下面我们将  $A_i(z)$  展为三角级数代入式(7), 导出确定其富氏系数的线代数方程组。设

$$A_i(z) = \sum_{m=1}^{\infty} a_{im} \sin \delta_m z, \quad \delta_m = (2m - 1)\pi \quad (8)$$

代入式(7)求得

$$\left. \begin{aligned} f_m &= \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Phi_{mn}}{c_n^2 - 1} \right] a_{1m} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s_{mk} a_n}{c_n^2 - 1} \right] a_{1k} \\ &+ \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n \Phi_{mn}}{c_n^2 - 1} \right] a_{2m} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n s_{mk} a_n}{c_n^2 - 1} \right] a_{2k} \\ f_m &= \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n \Phi_{mn}}{c_n^2 - 1} \right] a_{1m} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n s_{mk} a_n}{c_n^2 - 1} \right] a_{1k} \\ &+ \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n^2 \Phi_{mn}}{c_n^2 - 1} \right] a_{2m} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n^2 s_{mk} a_n}{c_n^2 - 1} \right] a_{2k} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

其中  $\Phi_{mn} = 2(p_n^2 + \delta_m^2)/\lambda_{mn}$ ,  $\lambda_{mn} = p_n^4 + 2\delta_m^2 p_n^2 + \delta_m^2(\delta_m^2 + M^2)$ ,  $s_{mk} = 8M^2 \alpha_n \delta_m \delta_k$   
 $\left( \text{ch} \frac{M}{2} + \text{ch} \alpha_n \right) / (\lambda_{mn} \lambda_{kn} \text{sh} \alpha_n)$ , 但当  $n=0$  时  $\frac{1}{c_0^2 - 1}$ ,  $\frac{c_0}{c_0^2 - 1}$  及  $\frac{c_0^2}{c_0^2 - 1}$  都为

$1/(2 \ln(R_2/R_1))$ ,  $f_m = 4M^2 \text{cth} \frac{M}{2} / (\delta_m(\delta_m^2 + M^2))$ .

求得  $a_{1m}$  及  $a_{2m}$  后, 便可把  $B, V$  表为

$$B(\xi, \zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{c_n^2 - 1} \frac{\pi p_n}{2} R_n(p_n \xi) \sum_{m=1}^{\infty} (a_{1m} + c_n a_{2m}) Q_{mn} \left[ \cos \delta_m \zeta \right. \\ \left. - \frac{\text{ch} \frac{M}{2} \zeta \text{sh} \alpha_n (1 - \zeta) - \text{ch} \frac{M}{2} (1 - \zeta) \text{sh} \alpha_n \zeta}{\text{sh} \alpha_n} \right] - \frac{\text{sh} M \left( \zeta - \frac{1}{2} \right)}{\text{sh} \frac{M}{2}} \frac{1}{\xi} \quad (10)$$

$$V(\xi, \zeta) = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{c_n^2 - 1} \frac{\pi p_n}{2} R_n(p_n \xi) \sum_{m=1}^{\infty} (a_{1m} + c_n a_{2m}) \left[ \Phi_{mn} \sin \delta_m \zeta \right. \\ \left. + Q_{mn} \frac{\text{sh} \frac{M}{2} \zeta \text{sh} \alpha_n (1 - \zeta) + \text{sh} \frac{M}{2} (1 - \zeta) \text{sh} \alpha_n \zeta}{\text{sh} \alpha_n} \right] + \frac{\text{ch} \frac{M}{2} - \text{ch} M \left( \frac{1}{2} - \zeta \right)}{\text{sh} \frac{M}{2}} \quad (11)$$

其中  $Q_{mn} = 2M \delta_m / \lambda_{mn}$ . 平均速度  $\bar{v} = \frac{1}{R_2 - R_1} \int_0^1 \int_{R_1}^{R_2} v d\xi d\zeta$  及电极电位差  $\Delta\Phi$  为

$$\bar{v} = \left( \text{cth} \frac{M}{2} - \frac{2}{M} \right) \frac{\ln(R_2/R_1)}{R_2 - R_1} - \frac{M}{R_2 - R_1} \text{cth} \frac{M}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_{1m} + a_{2m}}{\delta_m(\delta_m^2 + M^2)} \quad (12)$$

$$\Delta\Phi = \int_{r_1}^{r_2} E_r dr = \frac{\ln(R_2/R_1)}{2\pi\sigma L} I \left[ 1 + \frac{M}{2} \bar{v} (R_2 - R_1) / \ln(R_2/R_1) \right] \quad (13)$$

可用同样方法来解矩形截面直管道中完全发展的流动.  $r'$  换为  $x'$  (管宽为  $d$ ), 流动方向为  $y$ ,  $\partial p / \partial y$  为常数. 记单位长度管道上流过的电流为  $I_1$ , 引入

$$B = \frac{B_y + \frac{\mu}{B_0} \frac{\partial p}{\partial y} \left( x' - \frac{L}{2} \right)}{\frac{\mu}{2} \left( I_1 - \frac{L}{B_0} \frac{\partial p}{\partial y} \right)}, \quad V = \frac{V_y}{\left( I_1 - \frac{L}{B_0} \frac{\partial p}{\partial y} \right) \left( 2\sqrt{\eta\sigma} \right)}$$

$$x = x'/L, z = z'/L, D = d/L, \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{x=0,D} = A(x) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \sin \delta_m x$$

得到

$$\left. \begin{aligned} B &= -\frac{\text{sh}M\left(\zeta - \frac{1}{2}\right)}{\text{sh}\frac{M}{2}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{D} \cos \frac{2n\pi}{D} \xi \sum_{m=1}^{\infty} a_m Q_{mn} \left[ \cos \delta_m \zeta \right. \\ &\quad \left. - \frac{\text{ch}\frac{M}{2}\zeta \text{sh}\alpha_n(1-\zeta) - \text{ch}\frac{M}{2}(1-\zeta)\text{sh}\alpha_n\zeta}{\text{sh}\alpha_n} \right] \\ V &= \frac{\text{ch}\frac{M}{2} - \text{ch}M\left(\frac{1}{2} - \zeta\right)}{\text{sh}\frac{M}{2}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{D} \cos \frac{2n\pi}{D} \xi \sum_{m=1}^{\infty} a_m \left[ \Phi_{mn} \sin \delta_m \zeta \right. \\ &\quad \left. + Q_{mn} \frac{\text{sh}\frac{M}{2}\zeta \text{sh}\alpha_n(1-\zeta) + \text{sh}\frac{M}{2}(1-\zeta)\text{sh}\alpha_n\zeta}{\text{sh}\alpha_n} \right] \\ \bar{V} &= \text{cth}\frac{M}{2} - \frac{2}{M} - \frac{2}{D} M \text{cth}\frac{M}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{\delta_m(\delta_m^2 + M^2)} \\ \Delta\Phi &= \frac{d}{\sigma L} I_1 + B_0 d \frac{I_1 - \frac{L}{B_0} \frac{\partial p}{\partial y}}{2\sqrt{\eta\sigma}} \bar{V} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

其中  $\Phi_{mn}, Q_{mn}, S_{mkn}$  与以前形式相同, 只是  $p_n$  换为  $2n\pi/D$ , 且  $n=0$  时  $\cos \frac{2n\pi}{D} \xi$  换为  $1/2$ .  $a_m$  由下式决定

$$f_m = \frac{2}{D} \left[ \frac{\Phi_{m0}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_{mn} \right] a_m + \frac{2}{D} \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{S_{mk0}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} S_{mkn} \right] a_k \quad (15)$$

这也可看作是环形管道的极限情形: 相当于保持  $R_2 - R_1 = D$  不变而令  $R_1 \rightarrow \infty$ ; 这时  $R_1 a_{im} \rightarrow a_m, c_n \rightarrow (-1)^n \sqrt{R_2/R_1}, 1/((c_n^2 - 1)R_1) \rightarrow 1/(R_2 - R_1) = 1/D, \frac{\pi p_n R_n}{2} (p_n \xi) \rightarrow \frac{1}{R_1} \cos(n\pi\xi/D), I_1 = 0$  (开路) 相当于电磁流量计,  $\Delta\Phi = 0$  (短路) 相当于磁阻尼器,  $\partial p/\partial y = 0$  为直流电磁泵, 外接负载 ( $\partial p/\partial y \neq 0$ ) 相当于磁流体力学发电。

当  $M \ll 1$  时  $S_{mkn} \sim M^2$  可略去, 由此得

$$a_m = f_m / \left( \frac{1}{D} \Phi_{m0} + \frac{2}{D} \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_{mn} \right) = 8M \text{th} \frac{\delta_m D}{2} / \delta_m^2$$

$$\bar{V}/M = 1/6 - \frac{32}{D} \sum_{m=1}^{\infty} \text{th} \frac{\delta_m D}{2} / \delta_m^2$$

当  $M \gg 1$  时, 级数各项随  $n$  变化很慢, 求和可代之以积分。例如  $\frac{2}{D} \sum \Phi_{mn} = \frac{1}{\pi} \sum \Phi \left( \frac{2\pi}{D} \cdot n \right) \frac{2\pi}{D} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \Phi(x) dx$  可将方程组(15)化为

$$\frac{1}{\sqrt{2\delta_m}} \frac{a_m}{\sqrt{M}} + \sum_{k=1}^{\infty} D_{mk} \frac{a_k}{\sqrt{M}} = \frac{4}{\delta_m} \quad (16)$$

$$\bar{v} = 1 - \frac{2}{M} - \frac{2}{D} \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\delta_m} \left( \frac{a_m}{\sqrt{M}} \right) \quad (17)$$

其中 
$$D_{mk} = \sqrt{\frac{2}{\delta_m \delta_k} \frac{\delta_m^{3/2}(1+H_k) - \delta_k^{3/2}(1+H_m)}{\delta_m^2 - \delta_k^2}}$$

$$H_m = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[ \Gamma\left(\frac{3}{2}, i\delta_m\right) e^{i(\delta_m - \frac{3\pi}{4})} + \Gamma\left(\frac{3}{2}, -i\delta_m\right) e^{-i(\delta_m - \frac{3\pi}{4})} \right]$$

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}, Z\right) = \int_Z^{\infty} \sqrt{x} e^{-x} dx, \quad D_{mm} = \lim_{k \rightarrow m} D_{mk}$$

显然  $\left. \frac{\partial V}{\partial x} \right|_{x=0} = \sqrt{M} \sum_{m=1}^{\infty} \left( \frac{a_m}{\sqrt{M}} \right) \sin \delta_m x \sim \sqrt{M}$ , 也即  $x$  方向上物理量发生显著变化的尺度(边界层厚度)为  $\Delta x \sim \frac{1}{\sqrt{M}}$ , 这正是  $M \gg 1$  时在侧壁上形成边界层的特征. 此外

$M \gg 1$  时级数各项绝对值下降很慢; 在管道中部( $x \sim D/2$ )级数各项正负相间而互相抵消, 流动近似于哈特曼解, 只有  $x \rightarrow 0$ ,  $D$  时侧壁影响(级数和)才急剧增大. 若允许相对误差为  $0(1/\sqrt{M})$  则对环形管道也可得到同样结果.

因为  $M \gg 1$  时级数收敛很慢, 我们改用渐近分析(1973), 得到下述结果(其中  $R = R_2/R_1$ )

$$\begin{aligned} \bar{v} \frac{R_2 - R_1}{\ln R} = & 1 - \frac{2}{M} - \frac{1.352}{\sqrt{M}} \left( \frac{L}{r_2 - r_1} \right) \frac{R+1}{2R} \frac{R-1}{\ln R} \\ & + \frac{0.228}{M} \left( \frac{L}{r_2 - r_1} \right)^2 \frac{R^2 - 1}{R^2} \frac{(R-1)^2}{\ln R} + \frac{2.70}{M^{3/2}} \frac{L}{r_2 - r_1} \frac{R+1}{2R} \frac{R-1}{\ln R} \\ & + \frac{0.059}{M^{3/2}} \left( \frac{L}{r_2 - r_1} \right)^3 \frac{R^3 + 1}{R^3} \frac{(R-1)^3}{\ln R} + \frac{\Delta}{M^{3/2}} \cdot \frac{L}{r_2 - r_1} \frac{R+1}{2R} \cdot \frac{R-1}{\ln R} \quad (18) \end{aligned}$$

$$\bar{v} = 1 - \frac{2}{M} - \frac{1.352}{\sqrt{M}} \cdot \frac{L}{d} + \frac{2.70}{M^{3/2}} \frac{L}{d} + \frac{\Delta}{M^{3/2}} \cdot \frac{L}{d} \quad (19)$$

其中  $\Delta$  为一个较小的数值. 前三项分别与文献[4]和文献[2]的结果相同. 由与数值解的比较可归纳出式(18)适用范围判据为

$$M^{3/2} \cdot \frac{r_2 - r_1}{L} \geq 40 \frac{R+1}{2R} \frac{R-1}{\ln R}, \quad \sqrt{M} \frac{(r_2 - r_1)^2}{L} \geq \max(2.7, 2.5(R-1)) \quad (20)$$

第二式的物理意义为每一侧壁对另一侧壁边界层的影响可以忽略.

应用上述公式在 109-乙机上作了数值计算(1973). 环管流动结果见图 2—5. 直管流动结果见图 6, 7. 计算中取  $m = 15, n = 100$ .  $M$  由 0.1 计算到 50.  $p_n$  值由下述渐近公式求出<sup>[6]</sup>  $p_n R_1 \sim \delta + p/\delta + (q-p^2)/\delta^3 + (r-4pq+2p^3)/\delta^5$ , 其中  $\delta = n\pi/(R-1)$ ,  $p = -1/(8R)$ ,  $q = 0.06514(R^3 - 1)/(R^3(R-1))$ ,  $r = -0.20957(R^5 - 1)$ . 头四项按[6]中准确值修正. 图 2, 6 中小黑点表示文献[4, 2]结果, 而小白圈表示本文式(18), (19)结果.

对[4]中几个方形截面环形管道实验作了理论计算(表 1)。级数取 20 项, 近似解用式(18)。表中  $P = 2/(\bar{v}(R + 1))$ 。

表 1

$M$	$R = R_2/R_1$	$P_{\text{数}}$	$P_{\text{近}}$	$P_{\text{实}}$
32.62	1.0606	1.41	1.42	$1.4 \pm 0.1$
32.74	1.125	1.41	1.42	$1.5 \pm 0.1$
33.48	1.2857	1.40	1.41	$1.4 \pm 0.1$

**讨论** 1. 由于磁场的存在, 出现与速度成正比的反电势  $\mathbf{V} \times \mathbf{B}$ , 在靠近四壁速度较小的区域反电势也较小, 因而电流密度就大于其平均值。沿管道横截面电磁力的差别引起速度分布变得平坦起来(图 3, 5, 7), 随着  $M$  的增大此效应越来越显著。当  $M \gg 1$ , 电流由正极流向负极时, 大部分路程是贴着上下壁流动的, 这就形成上下壁处的哈特曼边界层。而电流由电极流出(入)靠向上下壁的转弯过程则是在侧壁边界层中进行的。

2. 对于直流电磁泵, 磁场具有双重作用, 一方面它产生电磁驱动力, 另一方面它与速度作用又产生反电势而减弱电流。因此可以期待, 到了一定大小以后再增强磁场  $B_0$ , 驱动效果的增加就很小了。由式(14), 若  $I_1$  给定,  $M > 20$  时流量随  $M$  增加很慢; 若  $I_1$  由外电路决定而且外电路电阻及电动势为定值时, 则  $B_0$  增大到一定程度后流量反而会下降。这时提高驱动力主要应靠增大电流来实现。

3. 本文假设  $\frac{\partial(rV)}{\partial r} \Big|_{r=R_i}$  是待定函数。同样也可设  $B|_{r=R_i}$  为待定函数, 但为了保证级数能逐项微分, 必须将非齐次边值化为齐次边值(方程则变为非齐次), 结果不那么紧凑。此外由于格林函数只与边值类型(第一类抑或第三类型)有关而与边值具体形式(如不同段上边值表达式不同)无关, 这方法可直接于部分电极情形, 而且两个电极的尺寸, 位置都可不同, 既不用分区求解, 更不用衔接, 结果简明。下面只写出结果(以直管道为例)

$$x = 0, D: \begin{cases} \frac{\partial B}{\partial x} = 0 & \lambda_1 \leq z \leq \lambda_2 \\ B = 1 & 0 \leq z \leq \lambda_1, B = -1 & \lambda_2 \leq z \leq 1 \end{cases}$$

$$\text{设 } B|_{x=0, D} = A(z) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \cos \delta_m(z - \lambda_1) \quad \lambda_1 \leq z \leq \lambda_2$$

$$\begin{aligned} V = & + \frac{4}{D} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin p_n \xi}{\text{sh} \alpha_n} \left[ \text{sh} \frac{M}{2} \zeta \text{sh} \alpha_n (1 - \zeta) + \text{sh} \frac{M}{2} (1 - \zeta) \text{sh} \alpha_n \zeta \right] \\ & - \frac{4}{D} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin p_n \xi}{p_n} b_m [\delta_m^2 S_{mn}(\zeta) + M \delta_m Q_{mn}(\zeta)] \\ & - \frac{4}{D} \sum_{n=1}^{\infty} p_n \sin p_n \xi \left[ \int_0^{\lambda_1} - \int_{\lambda_2}^1 \text{sh} \frac{M}{2} (z - \zeta) G_n dz \right] \end{aligned}$$

$$B = \sum_{n=1}^{\infty} b_m \cos \delta_m(\zeta - \lambda_1) - \frac{4}{D} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin p_n \xi}{\text{sh} \alpha_n} \left[ \text{ch} \frac{M}{2} \zeta \text{sh} \alpha_n (1 - \zeta) \right]$$

$$- \operatorname{ch} \frac{M}{2} (1 - \zeta) \operatorname{sh} \alpha_n \zeta \Big] + \frac{4}{D} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin p_n \xi}{p_n} b_m [\delta_m^2 Q_{mn}(\zeta) + M \delta_m S_{mn}(\zeta)]$$

$$- \frac{4}{D} \sum_{n=1}^{\infty} p_n \sin p_n \xi \left[ \int_0^{\lambda_1} - \int_{\lambda_2}^1 \operatorname{ch} \frac{M}{2} (z - \zeta) G_n dz \right]$$

其中  $p_n = \frac{(2n-1)\pi}{D}$ ,  $\delta_m = \frac{(2m-1)\pi}{\lambda_2 - \lambda_1}$ ,  $G_n(z, \zeta)$  见式(5),  $Q_{mn}(\zeta) = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \operatorname{ch} \frac{M}{2} (z - \zeta)$

$G_n(z, \zeta) dz$ ,  $S_{mn}(\zeta) = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \operatorname{sh} \frac{M}{2} (z - \zeta) G_n(z, \zeta) dz$ ,  $b_m$  由下式确定

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} E_{mkn} \right] \delta_k^2 b_k + M \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} H_{mkn} \right] \delta_k b_k = \left[ \sum_{n=1}^{\infty} (f_{mn} + p_n^2 d_{mn}) \right] b_n$$

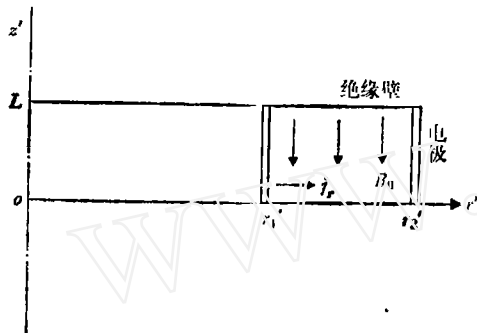


图 1 环形管道

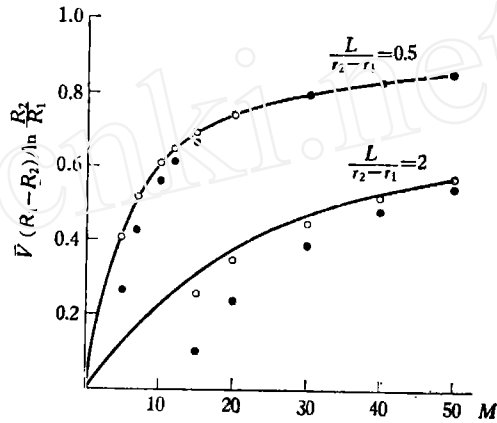


图 2 环形管道( $R=2$ )  
● 文献[7] ○ 式(18)

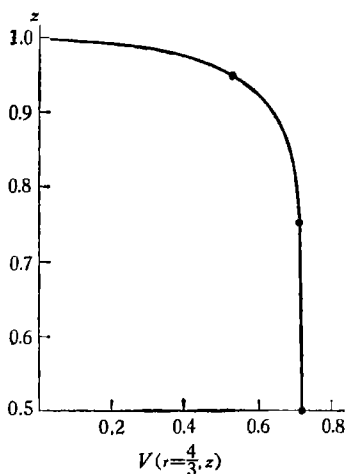


图 3 环形管道( $R=2, \frac{L}{r_2-r_1}=1, M=30$ )  
● 渐近分析解

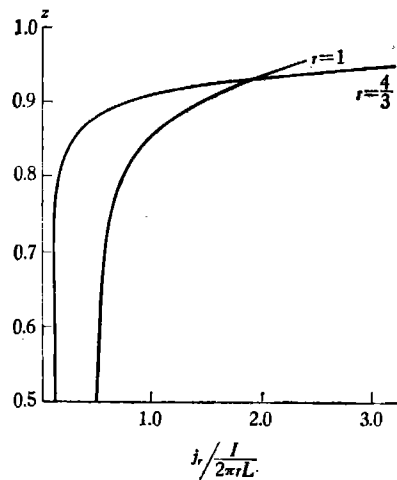


图 4 环形管道( $R=2, \frac{L}{r_2-r_1}=1, M=30$ )

$$\begin{aligned}
 \text{其中 } E_{mkn} &= \frac{2}{\lambda_2 - \lambda_1} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \operatorname{ch} \frac{M}{2} (z - \zeta) G_n(z, \zeta) \cos \delta_m(\zeta - \lambda_1) \cos \delta_k(z - \lambda_1) dz d\zeta \\
 H_{mkn} &= \frac{2}{\lambda_2 - \lambda_1} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \operatorname{sh} \frac{M}{2} (z - \zeta) G_n(z, \zeta) \cos \delta_m(\zeta - \lambda_1) \sin \delta_k(z - \lambda_1) dz d\zeta \\
 f_{mn} &= \frac{2}{(\lambda_2 - \lambda_1) \operatorname{sh} \alpha_n} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \left[ \operatorname{ch} \frac{M}{2} \zeta \operatorname{sh} \alpha_n (1 - \zeta) - \operatorname{ch} \frac{M}{2} (1 - \zeta) \operatorname{sh} \alpha_n \zeta \right] \cos \delta_m(\zeta - \lambda_1) d\zeta \\
 d_{mn} &= \frac{2}{\lambda_2 - \lambda_1} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \left[ \int_0^{\lambda_1} - \int_{\lambda_2}^1 \operatorname{ch} \frac{M}{2} (z - \zeta) G_n(z, \zeta) dz \right] \cos \delta_m(\zeta - \lambda_1) d\zeta
 \end{aligned}$$

若两个电极尺寸及位置不同 ( $x = 0$  处,  $\lambda_{01} \leq x \leq \lambda_{02}$ ,  $x = D$  处  $\lambda_{D1} \leq x \leq \lambda_{D2}$ ), 必须引入两个待定函数; 结果更冗长, 但方法是一样的. 若是全电极 ( $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1$ ) 则  $d_{mn} = 0$ , 但  $f_{mn}$

前应乘以  $(1 - \sum_{m=1}^{\infty} b_m)$ .

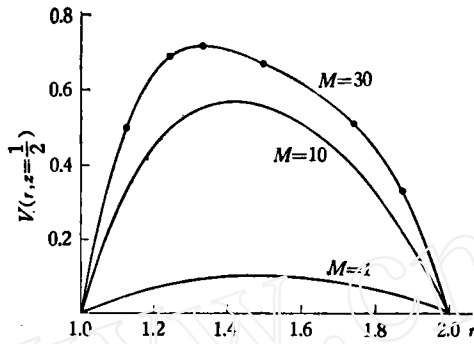


图 5 环形管道 ( $R = 2, \frac{L}{r_2 - r_1} = 1, M = 30$ ) ● 渐近分析解

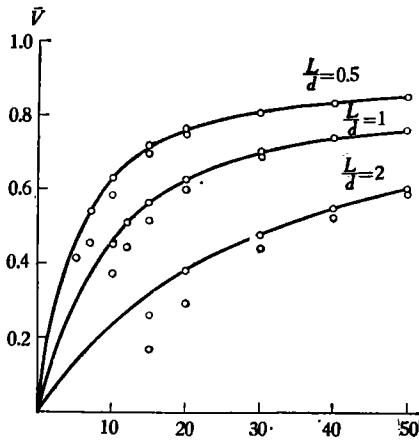


图 6 直管道 ● 文献 [2] ○ 式(19)

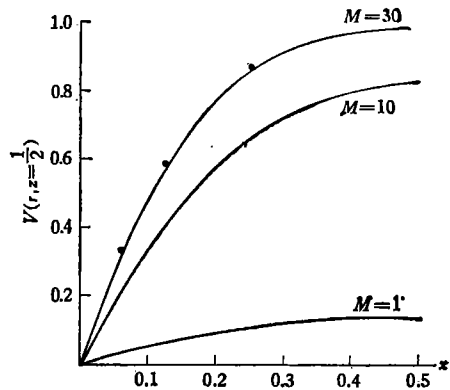


图 7 直管道 ( $\frac{L}{d} = 1$ ) ● 渐近分析解

### 参 考 文 献

- [1] Гринберг, Г. А., ДАН, 141 (1961), 330; ПММ, 25 (1961), 1024; ПММ, 26 (1962), 80.
- [2] Hunt, J.C.R., Stewartson, K., J. Fluid Mech., 23(1965), 563.
- [3] Hunt, J.C.R., Shercliff, J. A., Ann. Rev. Fluid Mech., 3(1971).
- [4] Baylie, J. A., Hunt, J. C. R., J. Fluid Mech., 48(1971), 423.
- [5] Брановер, Г. Г., Цинодер А. Б., Магнитная Гидродинамика Несжимаемых Сред (1970).
- [6] Kahlähne, ZMP, LIV(1907), 55.