

# 平面应力断裂力学

中国科学院力学研究所 王自强

薄板、薄壳和各种型式的薄壁结构是工程实际中广泛采用的承载结构。这种结构表面裂纹及穿透裂纹的断裂分析是个相当复杂的问题。平面应力断裂力学主要解决穿透裂纹的断裂分析。因为薄板、薄壳的壁很薄，板厚（壳厚）相对于其他尺寸小一个至几个数量级。而前后板面是不受力的自由表面。因此，所有与板面平行的面元都可以近似看作不受应力作用。如图 1 所示，相当于  $z$  方向应力  $\sigma_z$ 、 $\tau_{yz}$ 、 $\tau_{zx}$  近似为零。也就是说，当薄板只受板面方向的外载作用时，可以认为薄板只产生板面内的应力  $\sigma_x$ 、 $\sigma_y$ 、 $\tau_{xy}$ 。当薄板受垂直板面的横向载荷作用时， $\sigma_z$ 、 $\tau_{yz}$ 、 $\tau_{zx}$  不为零，但  $\sigma_z$ 、 $\tau_{yz}$ 、 $\tau_{zx}$  随  $z$  的变化规律可以确定，因此薄板的弯曲理论也可以用二维理论来解决。但是本文限于篇幅不介绍带裂纹薄板的弯曲理论。

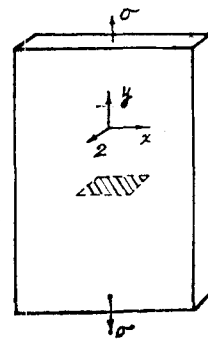


图 1

含表面裂纹的薄板断裂分析，理论上属于二维问题。但是，三维分析十分复杂，因此作为工程方法，往往把表面裂纹简化为等效的穿透裂纹，归之为平面应力断裂力学研究对象。

总之，平面应力断裂力学是断裂力学的重要组成部分。本文尝试对平面应力断裂力学作一个概括的介绍。

## 一、线弹性理论

平面应变的线弹性断裂理论已经有效地用于确定材料的断裂韧性；并且为工程结构断裂控制程序提供了理论基础。著名的应力强度因子理论是平面应变线弹性断裂理论中应用最广的理论。按照这个理论，当裂纹顶端应力强度因子  $K_I$ ，达到该材料的平面应变断裂韧性  $K_{Ic}$  时，裂纹就起始扩展。因此，有如下的断裂判据：

$$K_I = K_{Ic} \quad (1)$$

应用断裂判据 (1) 时，对结构尺寸提出了严格的要求，例如对三点弯曲试样，要求其厚度  $B$ ，裂纹长度  $a$ ，及韧带宽度  $w-a$  均满足“平面应变”条件：

$$B, a, w-a \geq 2.5 \left( \frac{K_{Ic}}{\sigma_s} \right)^2 \quad (2)$$

对试样厚度B提出要求是为了保证裂纹顶端处于对正断敏感的三轴张力状态,也就是使厚度方向的约束达到最大值,使沿厚度方向应变为零,这就是平面应变状态。

工业中大量应用的中、低强度钢板材结构,例如压力容器、薄壁结构,壁厚h通常不能满足条件(2)。另一方面,板面方向的尺寸却是相当大。因此,能否设想当裂纹

长度a足够长时,也会发生平面应力型的脆断呢?大量的压力容器的爆破试验及铝合金的宽板试验表明:薄壁结构的脆断现象同样存在。当裂纹长度与韧带宽度足够大时,可以用如下断裂判据来预示起裂或失稳载荷:

$$K_I = K. \quad (3)$$

这里的K.是板材的平面应力断裂韧性;一般地说它随板厚而变化,K.随板厚变化曲线如图2所示。

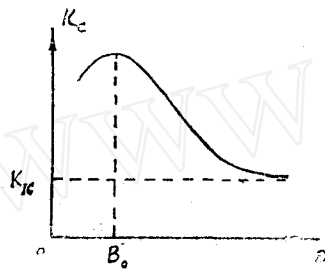


图2

当 $B > B_0$ ,平面应力断裂韧性 $K_I$ 随着厚度的增加而减小。当厚度B充分大,满足了平面应变的条件时, $K_I$ 就趋于平面应变断裂韧性 $K_{Ic}$ ,这说明随着板厚的增加,横向收缩受到了限制,三轴张力在增加,这就使脆断提前发生。对于 $B < B_0$ , $K_I$ 会下降的原因尚未弄清<sup>[1,20]</sup>,猜想可能是折皱效应的影响。

Feddersson<sup>[2]</sup>及Broek<sup>[1]</sup>研究了平面应力断裂韧性 $K_I$ 的尺寸效应。建议最小的试件尺寸为:

$$W_{min} = \frac{27}{2\pi} \cdot \left( \frac{K_{Ic}}{\sigma_s} \right)^2 = 4.29 \left( \frac{K_{Ic}}{\sigma_s} \right)^2 \quad (4)$$

对中心裂纹板,他们建议裂纹尺寸为:

$$2a = \frac{1}{3} W_{min} = 1.43 \left( \frac{K_{Ic}}{\sigma_s} \right)^2 \quad (5)$$

从下面将要介绍的弹塑性断裂理论来分析,对图3所示的中心裂纹无限宽板而言,如裂纹长度2a满足下述条件:

$$2a \geq \left( \frac{K_{Ic}}{\sigma_s} \right)^2 \quad (6)$$

则线弹性断裂准则给出的结果相当可靠。因此,公式(6)给出了测试平面应力断裂韧性 $K_{Ic}$ 的最小裂纹尺寸。

由于平面应力断裂韧性 $K_{Ic}$ 较高,对中、低强度钢板材,公式(5)、(6)提出的裂纹尺寸2a是相当大的。例如,当 $K_{Ic} = 450 \text{ kg} \cdot \text{mm}^{-3/2}$ ,  $\sigma_s = 45 \text{ kg/mm}^2$ 时,  $2a \geq 100 \text{ mm}$ ,这样长的穿透裂纹,一般是不允许存在的。

实际存在的宏观裂纹往往不满足条件(5)、(6),在这种情况下,线弹性断裂判据(3),给出的结果就不可靠。在裂纹起始扩展或失稳扩展之前,塑性区已有很大发展。对于短裂纹,裂纹扩展往往在全面屈服的情况下发生。对于焊接结构,由于局部残余应力的影响,即使在低应力下发生脆断,裂纹顶端的塑性区仍然可能比裂纹长度大

好几倍。因此，发展平面应力的弹塑性断裂理论及全面屈服断裂理论是非常必要的。

## 二、弹塑性断裂理论

### (1) Dugdale带状屈服模型

裂纹体的塑性分析是个复杂的理论问题，迄今没有得到顺利解决。但是利用适当的物理模型可以大大减少数学困难，获得许多关于裂纹顶端塑性场的有用知识。

对于带穿透裂纹的薄板，Dugdale<sup>[3]</sup>，通过实验观察，发现裂纹顶端塑性区，多集中在与板面成 $45^\circ$ 方向的切变带上。切变带的高度大致等于板厚。随着外载的增加，这条很窄的切变带沿着裂纹延伸面向前扩展，形成了带状屈服区，如图3所示。

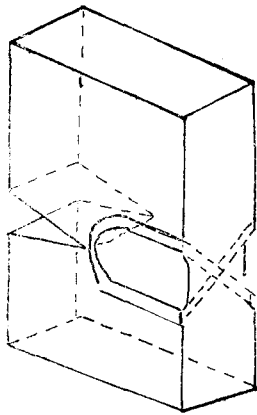


图3  $45^\circ$ 剪切带

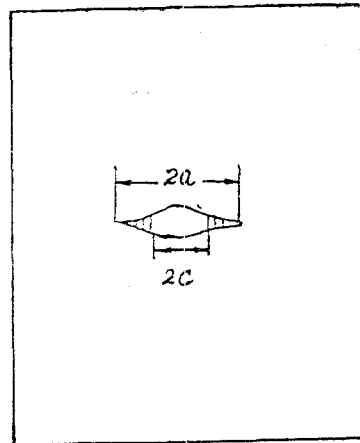


图4 带状屈服区

带状屈服区模型与Barenblatt<sup>[4]</sup>的内聚力模型十分相似。但是后者着眼于对线弹性断裂理论作一个新的自圆其说的解释，并未加深入的发展。

与Dugdale模型起着相同作用的BCS模型<sup>[5,6]</sup>巧妙地从业位的连续统理论出发，对平面应力的弹塑性断裂理论作了有效的简化分析。BCS模型导得的数学公式与Dugdale模型完全一样。但是BCS模型假定沿着裂纹及裂纹延伸面，存在着连续分布的位错。位错密度分布函数 $f(x)$ 根据受载条件及裂纹延伸面上屈服条件求得。

Dugdale模型与BCS模型都认为带状屈服区之外的区域是弹性区。并且把带状屈服区的高度近似的取为零，从而得到数学上的位移间断区。

如图5所示，在屈服区上作用着流变应力 $\sigma_s$ 。在加载过程中，AB上下表面分开，造成位移间断，而这种位移间断，实际上并不存在。它应该看作是高度不为零的切变带上、下边界的位移。

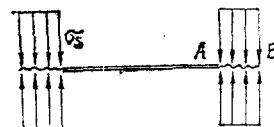


图5

Dugdale模型相当简单，但其缺点是比较粗糙。

对于短裂纹, 起始扩展通常发生在全面屈服之后。此时, 塑性区明显的不限于裂纹延伸面, 而向着与裂纹线大约成 $50^\circ$ 方向发展出两条剪切带。图6是文献[7]提供的一张实物照片示意图。因此, 一般地说Dugdale模型只能提供全面屈服之前的弹塑性断裂

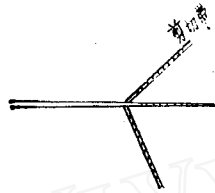


图6

分析。另一方面, Dugdale模型本身还存在一些不明朗的因素。首先是作用在带状屈服区上的流变应力 $\sigma_s$ 的选取问题。对理想塑性材料可以取 $\sigma_s = \sigma_{s0}$ ;  $\sigma_{s0}$ 是材料的屈服限, 对加工硬化材料,  $\sigma_s$ 可以取屈服强度与极限强度之间的某个量:  $\sigma_{s0} \leq \sigma_s \leq \sigma_{s\infty}$ 。

Folias<sup>[8]</sup>取 $\sigma_s = (3\sigma_{s0} + \sigma_{s\infty})/4$ 。Heald等<sup>[9]</sup>建议取 $\sigma_s = \sigma_{s0}$ , 而文献[10][31]又采用了另外的取法。总之由于 $\sigma_s$ 的选法不同, 会导致不同的结果。也有些作者<sup>[12, 21]</sup>对加工硬化引起的 $\sigma_s$ 的变化作了分析, 但结合实验进行分析并导出有用计算公式的尚少见。

其次是在带状屈服区内, 流变应力 $\sigma_s$ 是否均匀分布的问题。对加工硬化材料, 流变应力可能由于应变硬化程度不同, 而呈不均匀分布。这就引起若干改进Dugdale模型的尝试<sup>[13]</sup>。

尽管Dugdale模型的物理论证未必严格, 但是应用这个模型所推得的起裂载荷却与大量的实验符合。因此, 迄今为止, 这个模型仍然是平面应力弹塑性断裂理论的支柱。

## (2) 含中心裂纹的无限大薄板

Dugdale模型弹塑性分析的要领可以从含中心裂纹无限大薄板受力分析中得到清晰说明。

如图7所示, 无限大薄板含中心裂纹。无穷远处受双轴拉伸应力 $\sigma$ 的作用。在裂纹上、下表面作用着大小相等方向相反的法向载荷 $p(x)$ (以压为正), 切向载荷 $q(x)$ 为零。

假设裂纹长度为 $2c$ , 加上塑性区长度得到有效裂纹长度为 $2a$ 。在塑性区内作用着拉伸流变应力 $\sigma_s$ , 因此有:

$$p(x) = -\sigma_s, \quad c < |x| \leq a \quad (7)$$

依照Muskhelishvili<sup>[14]</sup>, 这个弹性问题归结为求解两个全平面内分区全纯函数 $\Phi(z)$ 、 $\Omega(z)$ 。

$$\sigma_x + \sigma_y = 4 \operatorname{Re} \{ \Phi(z) \} \quad (8)$$

$$\sigma_y - i\tau_{xy} = \Phi(z) + \Omega(\bar{z}) + (z - \bar{z}) \overline{\Phi'(z)}, \quad (9)$$

$$2\mu(u + iv) = K\phi(z) - \omega(\bar{z}) - (z - \bar{z}) \overline{\Phi'(z)}, \quad (10)$$

其中 
$$\phi(z) = \int \Phi(z) dz, \quad (11)$$

$$\omega(z) = \int \Omega(z) dz, \quad (12)$$

函数 $\Phi(z)$ 、 $\Omega(z)$ 的一般公式为:

$$\Phi(z) = \Phi_0(z) + \frac{P_1(z)}{X(z)} - \frac{1}{2} \bar{\Gamma}', \quad (13)$$

$$\Omega(z) = \Omega_0(z) + \frac{P_1(z)}{X(z)} + \frac{1}{2} \bar{\Gamma}', \quad (14)$$

$$\Phi_0(z) = \Omega_0(z) = -\frac{1}{2\pi i X(z)} \int_L \frac{X(t)p(t)}{(t-z)} dt \quad (15)$$

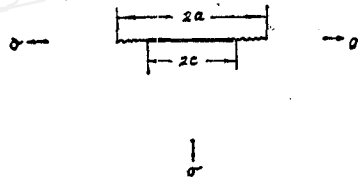
$$X(z) = \sqrt{z^2 - a^2} \quad (16)$$

$$P_1(z) = c_0 z + c_1 \quad (17)$$

$$c_0 = \Gamma + \frac{1}{2} \bar{\Gamma}' \quad (18)$$

对于双轴拉伸的情况有:

$$\left. \begin{aligned} \Gamma &= \frac{\sigma}{2}, \\ \bar{\Gamma}' &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (19)$$



再根据位移单值条件不难确定  $c_1 = 0$ , 由此得到:

图7

$$\Phi(z) = \Omega(z) = \frac{-1}{2\pi i X(z)} \int_L \frac{X(t)p(t)}{(t-z)} dt + \frac{\sigma \cdot z}{2X(z)} \quad (20)$$

公式 (20) 中的积分是柯西型积分。线段L表示从  $-a$  到  $a$  的实线段, 为了研究这个积分, 注意下列公式:

$$\begin{aligned} I(t, z) &= \frac{2z}{\sqrt{z^2 - a^2}} \int_0^t \frac{\sqrt{a^2 - t^2} dt}{(z^2 - t^2)} \\ &= \frac{2z}{X(z)} \sin^{-1} \frac{t}{a} - \left\{ \sin^{-1} \frac{a^2 + z \cdot t}{a(z+t)} - \sin^{-1} \frac{a^2 - z \cdot t}{a(z-t)} \right\} \end{aligned} \quad (21)$$

令:

$$I_3(t, z) = \sin^{-1} \frac{a^2 + z \cdot t}{a(z+t)} - \sin^{-1} \frac{a^2 - z \cdot t}{a(z-t)} \quad (22)$$

$$I_1(t) = \sin^{-1} \frac{t}{a} \quad (23)$$

则有:

$$\frac{2z}{\sqrt{z^2 - a^2}} \int_0^t \frac{\sqrt{a^2 - t^2} dt}{(z^2 - t^2)} = \frac{2z}{X(z)} \cdot I_1(t) - I_3(t, z) \quad (24)$$

先研究在真实裂纹面上没有载荷作用的情况, 此时:

$$\begin{aligned} \Phi(z) = \Omega(z) &= \frac{-1}{2\pi i \sqrt{z^2 - a^2}} \int_{-a}^a \frac{\sqrt{a^2 - t^2} \cdot i \cdot p(t)}{(t-z)} dt + \frac{\sigma \cdot z}{2X(z)} \\ &= \frac{-\sigma_0}{2\pi} \left\{ \int_{-a}^{-c} + \int_c^a \right\} \frac{1}{\sqrt{z^2 - a^2}} \frac{\sqrt{a^2 - t^2}}{(z-t)} dt + \frac{\sigma \cdot z}{2X(z)} \\ &= \frac{-\sigma_0}{2\pi} \int_c^a \frac{2z}{\sqrt{z^2 - a^2}} \cdot \frac{\sqrt{a^2 - t^2}}{(z^2 - t^2)} dt + \frac{\sigma \cdot z}{2X(z)} \end{aligned}$$

$$= \frac{-\sigma_1}{2\pi} \left\{ \frac{2z}{X(z)} \cdot \left( \frac{\pi}{2} - \sin^{-1} \frac{c}{a} \right) + I_3(c, z) - \pi \right\} + \frac{\sigma \cdot z}{2X(z)} \quad (25)$$

公式 (25) 中, 带  $\frac{1}{X(z)}$  的项在有效裂纹顶端  $z = a$  处有奇性。为了清除奇性必有:

$$\left( \frac{\pi}{2} - \sin^{-1} \frac{c}{a} \right) - \frac{\pi\sigma}{2\sigma_1} = 0 \quad (26)$$

也即:

$$\frac{c}{a} = \cos \frac{\pi\sigma}{2\sigma_1}, \quad (27)$$

如果裂纹前缘塑性区尺寸用  $\rho$  表示, 则从 (27) 得,

$$\rho = c \left\{ \sec \left( \frac{\pi\sigma}{2\sigma_1} \right) - 1 \right\} \quad (28)$$

运用公式 (26), 求得:

$$\Phi(z) = \Omega(z) = \frac{\sigma_1}{2\pi} \left\{ \pi - I_3(c, z) \right\} \quad (29)$$

又令:

$$I_4(t, z) = \int I_3(t, z) dz = (z+t) \sin^{-1} \frac{a^2+z \cdot t}{a(z+t)} - (z-t) \sin^{-1} \frac{a^2-z \cdot t}{a(z-t)} \quad (30)$$

为了研究函数  $I_4(t, z)$  的性质。先研究函数

$$z^* = \sin^{-1} \zeta \quad (31)$$

该函数将带有割痕  $(1, \infty)$  及  $(-\infty, -1)$  的  $\zeta$  平面映射成  $z^*$  平面上的带状区域:

$$z^* = x^* + i \cdot y^*$$

$$-\frac{\pi}{2} < x^* < \frac{\pi}{2}, \quad -\infty < y^* < \infty, \quad (32)$$

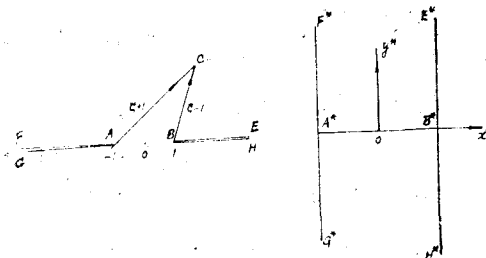


图 8

注意到函数  $\zeta = \sin z^*$  是周期函数, 公式 (31) 可将  $\zeta$  平面映射成  $z^*$  平面上任意的带状区域:

$$z^* = x^* + iy^*,$$

$$(m - \frac{1}{2})\pi < x^* < (m + \frac{1}{2})\pi, \quad -\infty < y^* < \infty, \quad (33)$$

为了确保一一对应, 约定选择由公式(32)规定的单值分枝, 这样当 $\zeta$ 在实轴开区间 $(-1, 1)$ 附近变化时, 函数 $z^* = \omega(\zeta) = \sin^{-1}\zeta$ 是连续变化的, 并且开区间 $(-1, 1)$ 映射为 $z^*$ 平面上的实轴开区间 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ .

设 $\sigma$ 是正实数,  $1 < \sigma < \infty$ , 则不难得到下述结果:

$$\left\{ \begin{array}{l} \zeta = \sigma + i \cdot 0, \quad z^* = \sin^{-1}\zeta = \frac{\pi}{2} + i \log(\sigma + \sqrt{\sigma^2 - 1}) \\ \zeta = \sigma - i \cdot 0, \quad z^* = \frac{\pi}{2} - i \log(\sigma + \sqrt{\sigma^2 - 1}) \\ \zeta = -\sigma + i \cdot 0, \quad z^* = -\frac{\pi}{2} + i \log(\sigma + \sqrt{\sigma^2 - 1}) \\ \zeta = -\sigma - i \cdot 0, \quad z^* = -\frac{\pi}{2} - i \log(\sigma + \sqrt{\sigma^2 - 1}) \end{array} \right. \quad (34)$$

利用公式(30), 得到:

$$\phi(z) = \omega(z) = \frac{\sigma}{2\pi} \cdot \left\{ \pi z - I_4(c, z) \right\} + \text{常数} \quad (35)$$

从公式(10)得:

$$2\mu V \Big|_{z = x \pm i \cdot 0} = (k+1) \text{Im} \cdot \phi^\pm(x) \quad (36)$$

其中:

$$\phi^\pm(x) = \lim_{z \rightarrow x \pm i \cdot 0} \phi(z) \quad (37)$$

这样就能得到真实裂纹顶端 $z = c$ 的张开位移

令:

$$\zeta_1 = \frac{a^2 + z \cdot c}{a(z+c)}, \quad \zeta_2 = \frac{a^2 - z \cdot c}{a(z-c)} \quad (38)$$

不难证实当 $z$ 趋向于 $c \pm i \cdot 0$ 时,

$$\zeta_1 \rightarrow \frac{a^2 + c^2}{2ac} \mp i \cdot 0 \quad (39)$$

$$\zeta_2 \rightarrow \infty, \quad (z-c)\zeta_2 \rightarrow \frac{a^2 - c^2}{a} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} (z-c) \sin^{-1}\zeta_2 &= (z-c) \left\{ -\frac{\pi}{2} + i \log(\zeta_2 + \sqrt{\zeta_2^2 - 1}) \right\} \rightarrow (z-c) \\ &\left\{ -\frac{\pi}{2} + i \log z \zeta_2 \right\} \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (41)$$

由此得:

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow c \pm i0} I_4(c, z) &= 2c \left\{ \frac{\pi}{2} \mp i \log \left( \frac{a^2 + c^2}{2ac} + \sqrt{\left( \frac{a^2 + c^2}{2ac} \right)^2 - 1} \right) \right\} \\ &= 2c \cdot \left\{ \frac{\pi}{2} \mp i \log \frac{a}{c} \right\} \end{aligned} \quad (42)$$

代入公式 (36)、(35) 得裂纹顶端张开位移:

$$\delta = 2V \Big|_{z=c+i \cdot 0} = \frac{(K+1) \sigma_s}{\mu} (2c) \log \frac{a}{c} \quad (43)$$

利用公式 (27) 得:

$$\delta = \frac{8\sigma_s}{\pi E'} \cdot c \operatorname{Insec} \left( \frac{\pi\sigma}{2\sigma_s} \right) \quad (44)$$

公式 (28)、(44) 即是由 Dugdale 模型推导出来的基本公式

下面进一步讨论在真实裂纹面上作用有法向载荷  $p(x)$  的一般情况, 如图所示, 将裂纹面分成  $2N$  小段, 假定  $p(x)$  对于  $y$  轴对称分布, 各小段节点的坐标为  $(c_{i-1}, c_i)$ , 这里约定:

$$c_0 = 0, \quad c_N = a \quad (45)$$

由公式 (20) 得:

$$\begin{aligned} \Phi(z) = \Omega(z) &= \frac{2 \cdot z}{2\pi X(z)} \int_0^a \frac{\sqrt{a^2 - t^2} p(t)}{(z^2 - t^2)} dt + \frac{\sigma_z}{2X(z)} \\ &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \sum_{i=1}^N \int_{c_{i-1}}^{c_i} \frac{\sqrt{a^2 - t^2} p(t)}{(z^2 - t^2)} dt \cdot \frac{2z}{X(z)} \right\} + \frac{\sigma_z}{2X(z)} \\ &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \sum_{i=1}^N p(c_{i-1}) \cdot \int_{c_{i-1}}^{c_i} \frac{\sqrt{a^2 - t^2} dt}{(z^2 - t^2)} \cdot \frac{2z}{X(z)} \right\} + \frac{\sigma_z}{2X(z)} \\ &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \sum_{i=1}^N p(c_{i-1}) \left[ I(c_i, z) - I(c_{i-1}, z) \right] \right\} + \frac{\sigma_z}{2X(z)} \\ &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \sum_{i=1}^{N-1} I(c_i, z) [p(c_{i-1}) - p(c_i)] + p(c_{N-1}) I(c_N, z) \right\} \\ &\quad + \frac{\sigma_z}{2X(z)} - p(0) I(0, z) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \sum_{i=1}^{N-1} \left[ \sin^{-1} \frac{c_i}{a} \cdot \frac{2z}{X(z)} - \left[ \sin^{-1} \frac{a^2 + z \cdot c_i}{a(z + c_i)} \right] \right] \right\} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 & - \sin^{-1} \frac{a^2 - z_i c}{a(z - c_i)} \Big] \Big\} \left[ p(c_{i-1}) - p(c_i) \right] \\
 & + p(c_{N-1}) \cdot \left[ \frac{2z}{X(z)} \cdot \frac{\pi}{2} - \pi \right] \Big\} + \frac{\sigma \cdot z}{2X(z)}
 \end{aligned} \quad (46)$$

在上述推导中, 在每一小段  $(c_{i-1}, c_i)$  上, 近似地取  $p(t) \approx p(c_{i-1})$ , 同时约定最后一段  $(c_{N-1}, c_N)$  表示塑性区, 因此有:  $c_{N-1} = c$ ,  $p(c_{N-1}) = -\sigma_s$  这样得到:

$$\begin{aligned}
 \Phi(z) = \Omega(z) = & \frac{1}{2\pi} \left\{ \sum_{i=1}^{N-1} \left[ \frac{2z}{X(z)} \sin^{-1} \frac{c_i}{a} - I_3(c_i, z) \right] \right. \\
 & \left. (p_{i-1} - p_i) - \sigma_s \cdot \left[ \frac{2z}{X(z)} \cdot \frac{\pi}{2} - \pi \right] \right\} + \frac{\sigma \cdot z}{2X(z)} \quad (47)
 \end{aligned}$$

上式中带有  $\frac{1}{X(z)}$  的项, 在真实裂纹顶端有奇性。为了消除奇性, 必有:

$$\frac{1}{2\pi} \left\{ \sum_{i=1}^{N-1} \sin^{-1} \frac{c_i}{a} (p_{i-1} - p_i) - \frac{\pi}{2} \sigma_s \right\} + \frac{\sigma}{4} = 0 \quad (48)$$

在公式 (48) 中  $p_i = p(c_i)$ ,  $p(c_{N-1}) = -\sigma_s$

公式 (48) 给出了求塑性区的一般公式, 所分的小段越细, 上述公式越精确。

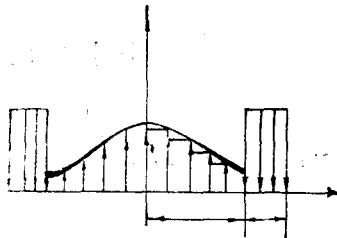


图 9

公式 (48) 对  $p(x)$  为阶梯状函数特别适用。当  $p(x)$  为光滑函数时, 从公式 (48) 得到下述公式:

$$\cos^{-1} \frac{c}{a} = \left\{ \frac{\pi}{2} \sigma + p^-(c) \sin^{-1} \frac{c}{a} - \int_0^c \sin^{-1} \frac{X}{a} p'(x) dx \right\} \frac{1}{\sigma_s} \quad (49)$$

公式 (49) 中,  $p'(x)$  表示函数  $p(x)$  的一阶导数;  $p^-(c)$  表示  $x$  从左侧趋于  $c$  时, 函数  $p(x)$  所取的值, 当  $p(x)$  恒为零时, 就得到公式 (27), 公式 (49) 也可改写为:

$$\cos^{-1} \frac{c}{a} = \left\{ \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\sigma}{\sigma_s} + \int_0^c \frac{p(x)}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx \frac{1}{\sigma_s} \right\} \quad (50)$$

利用公式 (48), 从公式 (47) 导得:

$$\Phi(z) = \Omega(z) = \left\{ \sigma_s \pi - \sum_{i=1}^{N-1} (p_{i-1} - p_i) I_3(c_i, z) \right\} \frac{1}{2\pi} \quad (51)$$

注意到公式 (51) 中的  $p_{N-1} = p(c_{N-1}) = -\sigma_s$ , 令:

$$\left. \begin{aligned} G_i &= p(c_i), \quad i=1, 2, \dots, N-2, \\ G_{N-1} &= p^-(c) \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

公式 (51) 改写为:

$$\begin{aligned} \Phi(z) = \Omega(z) &= \left\{ \sigma_s [\pi - I_3(c, z)] + p^-(c) I_3(c, z) \right. \\ &\quad \left. - \sum_{i=1}^{N-1} (G_{i-1} - G_i) I_3(c_i, z) \right\} \frac{1}{2\pi} \end{aligned} \quad (53)$$

将 (53) 积分就得,

$$\begin{aligned} \phi(z) = \omega(z) &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \sigma_s [\pi z - I_4(c, z)] + p^-(c) I_4(c, z) \right. \\ &\quad \left. - \sum_{i=1}^{N-1} (G_{i-1} - G_i) I_4(c_i, z) \right\} \end{aligned} \quad (54)$$

真实裂纹顶端的张开位移为:

$$\begin{aligned} \delta &= 2V \Big|_{z=c+i \cdot 0} = \frac{(K+1)}{\mu} \text{Im} \phi(c+i \cdot 0) \\ &= \frac{4}{\pi E'} \left\{ [\sigma_s - p^-(c)] J + \sum_{i=1}^{N-1} (G_{i-1} - G_i) J_i \right\} \end{aligned} \quad (55)$$

其中:

$$J = 2c \log \frac{a}{c} \quad (56)$$

$$J_i = a \left\{ \cos \theta \cdot \log \frac{\sin(\beta_i - \theta)}{\sin(\beta_i + \theta)} + \cos \beta_i \log \frac{\sin \beta_i + \sin \theta}{\sin \beta_i - \sin \theta} \right\} \quad (57)$$

$$\cos \beta_i = c_i/a, \quad \cos \theta = c/a \quad (58)$$

在推导公式 (55) 的过程中, 用了如下公式:

$$\begin{aligned} -\text{Im} \{ I_4(c_i, c^+) \} &= (c+c_i) \log(\sigma_{1i} + \sqrt{\sigma_{1i}^2 - 1}) \\ &\quad - (c-c_i) \log(\sigma_{2i} + \sqrt{\sigma_{2i}^2 - 1}) = a \left\{ \cos \theta \cdot \log \left( \frac{\sigma_{1i} + \sqrt{\sigma_{1i}^2 - 1}}{\sigma_{2i} + \sqrt{\sigma_{2i}^2 - 1}} \right) \right. \\ &\quad \left. + \cos \beta_i \log(\sigma_{1i} + \sqrt{\sigma_{1i}^2 - 1})(\sigma_{2i} + \sqrt{\sigma_{2i}^2 - 1}) \right\} = J_i \end{aligned} \quad (59)$$

$$\sigma_{1i} = \frac{a^2 + c \cdot c_i}{a(c + c_i)}, \quad \sigma_{2i} = \left| \frac{(a^2 - c c_i)}{a(c - c_i)} \right| \quad (60)$$

### (3) 含共线裂纹的无限大薄板

沿x轴等距离排列着无限个等长裂纹，每个裂纹受相同的法向力作用，如图10所示。

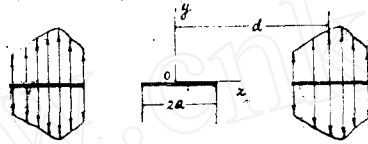


图10 周期排列的共线裂纹

分区全纯函数  $\Phi(z)$ ， $\Omega(z)$  应满足下述边界条件：

$$\left. \begin{aligned} \Phi^+(t) + \Omega^-(t) &= \sigma_y^+ - i\tau_{xy}^+ \\ \Phi^-(t) + \Omega^+(t) &= \sigma_y^- - i\tau_{xy}^- \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

$$md - a \leq t \leq md + a, \quad m = \pm 1, \pm 2, \dots$$

因为：

$$\sigma_y^+ = \sigma_y^- = -p(t), \quad \tau_{xy}^+ = \tau_{xy}^- = 0$$

所以：

$$\left. \begin{aligned} q(t) &= 0, \\ p(t) &= \frac{1}{2} (\sigma_y^+ + \sigma_y^-) = \sigma_y^+ = \sigma_y^- \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

从(61)得：

$$[\Phi(t) + \Omega(t)]^+ + [\Phi(t) + \Omega(t)]^- = -2p(t), \quad (63)$$

$$[\Phi(t) - \Omega(t)]^+ - [\Phi(t) - \Omega(t)]^- = 0. \quad (64)$$

从公式(64)看出函数  $\Phi(z) - \Omega(z)$  是全平面内的全纯函数，根据无穷远处的性状不难推断：

$$\Phi(z) - \Omega(z) = -\bar{\Gamma}' \quad (65)$$

对于周期排列的共线裂纹问题，其解答也应该是周期函数。

同时假定法向载荷  $p(t)$  对于裂纹中线是对称的，那么  $\Phi(z)$ ， $\Omega(z)$  也应该是对称函数。

令：

$$Y(z) = \sqrt{\left( \cos \frac{2\pi a}{d} - \cos \frac{2\pi z}{d} \right)} / 2 = \sqrt{\left( \sin^2 \frac{\pi z}{d} - \sin^2 \frac{\pi a}{d} \right)} \quad (66)$$

函数  $Y(z)$  是全平面上的分区全纯的周期函数，带有割痕， $md - a \leq t \leq md + a$ ，( $m = \pm 1, \pm 2, \dots$ )

为了考察这个函数的性质，引入新的变量  $\zeta$ ：

$$\zeta = \sin \frac{\pi Z}{d}, \quad Z = \frac{d}{\pi} \sin^{-1} \zeta \quad (67)$$

正如公式(31) — (34) 所说明的那样，整个  $z$  平面是无穷多叶的  $\zeta$  平面组成的黎曼

曲面的映像。每一叶 $\zeta$ 平面带有割痕 $(-\infty, -1)$ 和 $(1, \infty)$ ，与 $Z$ 平面上的带状区域对应：

$$z = x + iy, \quad (m - \frac{1}{2})d \leq x \leq (m + \frac{1}{2})d, \quad -\infty < y < \infty$$

由此不难证明：

$$Y^+(t) = -Y^-(t), \quad md - a \leq t \leq md + a, \quad (m = \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (68)$$

这样函数 $Y(z)$ 起着上节中函数 $X(z)$ 的作用，因此，有下述公式：

$$\Phi_0(z) = \Omega_0(z) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{1}{Y(z)} \int_{L^*} \frac{Y(t)p(t)}{(t-z)} dt \quad (69)$$

这里 $L^*$ 表示经过所有共线裂纹的积分路径。

注意到：

$$\left. \begin{aligned} Y(md+t) &= Y(t) \cdot (-1)^m \\ p(md+t) &= p(t) \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

公式(69)变为：

$$\begin{aligned} \Phi_0(z) = \Omega_0(z) &= \frac{-1}{2\pi i} \cdot \frac{1}{Y(z)} \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-a}^a \frac{(-1)^m Y(t)p(t)dt}{(t+md-z)} \\ &= \frac{-1}{2\pi i y(z)} \frac{\pi}{d} \int_{-a}^a \frac{Y(t)p(t)dt}{\sin \frac{\pi(t-z)}{d}} \\ &= \frac{\sin \frac{\pi z}{d}}{2\pi i Y(z)} \frac{\pi}{d} \int_0^a \frac{Y(t)p(t) \cos \frac{\pi t}{d} dt}{\left( \sin^2 \frac{\pi t}{d} - \sin^2 \frac{\pi z}{d} \right)} \\ &= \frac{-2\zeta}{2\pi i X(\zeta)} \int_0^{a^*} \frac{X(t_*) p_*(t_*) dt_*}{(t_*^2 - \zeta^2)} \end{aligned} \quad (71)$$

其中：

$$\left. \begin{aligned} \zeta &= \sin \frac{\pi z}{d}, & t_* &= \sin \frac{\pi t}{d} \\ X(\zeta) &= \sqrt{\zeta^2 - a_*^2}, & a_* &= \sin \frac{\pi a}{d}, \\ p_*(t_*) &= p\left(\frac{d}{\pi} \sin^{-1} t_*\right) \end{aligned} \right\} \quad (72)$$

公式(71)的右端与公式(20)右端的第一项完全相似，由此，推断 $\Phi(z)$ ， $\Omega(z)$ 可以用下述公式表示：

$$\Phi(z) = \Omega(z) = \Phi_0(z) + \frac{\sigma \cdot \zeta}{2X(\zeta)} = \Phi_*(\zeta) \quad (73)$$

公式(73)的严格推导可以通过公式(72)所表示的保角变换的分析得到,这里不细述。

由公式(71)通过类似于上节的冗长推导,不难得到求塑性区尺寸的公式。

$$\cos^{-1} \frac{c^*}{a_*} = \left\{ \frac{\pi}{2} \frac{\sigma}{\sigma_s} + \int_0^{c^*} \frac{1}{\sqrt{x^2 - a_*^2}} p_*(x) dx \frac{1}{\sigma_s} \right\} \quad (74)$$

相应的有:

$$\begin{aligned} \Phi_*(\zeta) = \Phi(z(\zeta)) = & \left\{ \sigma_s [\pi - I_3(c^*, \zeta)] + p_*^-(c^*) I_3(c^*, \zeta) \right. \\ & \left. - \sum_{i=1}^{N-1} [p_*^-(c_{i-1}^*) - p_*^-(c_i^*)] I_3(c_i^*, \zeta) \right\} \frac{1}{2\pi} \end{aligned} \quad (75)$$

其中 $p_*^-(t_*)$ 是指从左侧趋于 $t_*$ 的极限值。另有:

$$\phi(z) = - \int_z^a \Phi(z) dz = - \frac{d}{\pi} \int_{\zeta}^{a_*} \frac{\Phi_*(\zeta)}{\sqrt{1-\zeta^2}} d\zeta \quad (76)$$

为了得到 $\phi(c+i\cdot 0)$ 的数值,可以取直线段 $(c^*, 1)$ 的 $n$ 大于零的一侧作为积分线路 $(\zeta = \xi + i\eta)$ , 此时有:

$$\phi(c+i\cdot 0) = - \int_{c^*}^{a_*} \frac{\Phi_*^+(\xi)}{c^* \sqrt{1-\xi^2}} \cdot \frac{d}{\pi} d\xi \quad (77)$$

记:

$$s_1 = \frac{a_*^2 + \zeta \cdot t}{a_* (\zeta + t)}, \quad s_2 = \frac{a_*^2 - \zeta \cdot t}{a_* (\zeta - t)} \quad (78)$$

当 $0 < \xi < a_*$ ,  $0 < t < \xi$ ,  $\zeta \rightarrow \xi + i\cdot 0$ 时, 必有:

$$s_1 \rightarrow \sigma_1 - i\cdot 0, \quad s_2 \rightarrow \sigma_2 - i\cdot 0 \quad (79)$$

这里:

$$\sigma_1 = \frac{a_*^2 + \xi \cdot t}{a_* (\xi + t)}, \quad \sigma_2 = \frac{a_*^2 - \xi \cdot t}{a_* (\xi - t)} \quad (80)$$

并且:

$$1 < \sigma_1 < \infty, \quad 1 < \sigma_2 < \infty \quad (81)$$

利用公式(34), 不难证实:

$$I_3^+(t, \xi) = i \left\{ \log(\sigma_2 + \sqrt{\sigma_2^2 - 1}) - \log(\sigma_1 + \sqrt{\sigma_1^2 - 1}) \right\} \quad (82)$$

引入新的自变量 $\chi$ :

$$\sin \chi = \frac{\xi}{a_*} = \frac{\sin\left(\frac{\pi x}{d}\right)}{\sin\left(\frac{\pi a}{d}\right)}, \quad (83)$$

$$\sin\beta_i = \frac{c_i^*}{a_*} = \frac{\sin\left(\frac{\pi c_i}{d}\right)}{\sin\left(\frac{\pi a}{d}\right)} \quad (84)$$

$$\left. \begin{aligned} \sin\theta &= \frac{c^*}{a_*} = \frac{\sin\left(\frac{\pi c}{d}\right)}{\sin\left(\frac{\pi a}{d}\right)} \\ \sin\Psi &= \frac{t_*}{a_*} = \frac{\sin\left(\frac{\pi t}{d}\right)}{\sin\left(\frac{\pi a}{d}\right)} \end{aligned} \right\} \quad (85)$$

则有:

$$I_3^+ (t_*, \xi) = i \log \left\{ \frac{\sin(\chi + \Psi)}{\sin(\chi - \Psi)} \right\} \quad t_* < \xi \quad (86)$$

$$\begin{aligned} \phi(c + i \cdot 0) &= -\frac{d}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin\alpha \cdot \cos\chi d\chi}{\sqrt{1 - \sin^2\alpha \sin^2\chi}} \left\{ \sigma_s \left[ \pi - i \log \frac{\sin(\chi + \theta)}{\sin(\chi - \theta)} \right] \right. \\ &\quad \left. + i p_*^-(c^*) \log \frac{\sin(\chi + \theta)}{\sin(\chi - \theta)} \right. \\ &\quad \left. - i \sum_{i=1}^{N-1} [p_*^-(c_{i-1}^*) - p_*^-(c_i^*)] \log \frac{\sin(\chi + \beta_i)}{\sin(\chi - \beta_i)} \right\} \frac{1}{2\pi} \quad (87) \end{aligned}$$

由此得到真实裂纹顶端的张开位移为:

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{(K+1)}{\mu} \operatorname{Im} \cdot \{ \phi(c + i \cdot 0) \} \\ &= \frac{4}{\pi E'} \cdot \frac{d}{\pi} \cdot \sin\alpha \left\{ [\sigma_s - p^-(c)] J + \sum_{i=1}^{N-1} (G_{i-1} - G_i) J_i \right\} \quad (88) \end{aligned}$$

其中:

$$J = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos\chi}{\sqrt{1 - \sin^2\alpha \sin^2\chi}} \cdot \log \frac{\sin(\chi + \theta)}{\sin(\chi - \theta)} d\chi \quad (89)$$

$$J_i = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos\chi}{\sqrt{1 - \sin^2\alpha \sin^2\chi}} \cdot \log \frac{\sin(\chi + \beta_i)}{\sin(\chi - \beta_i)} d\chi \quad (90)$$

$$G_i = p_*^-(c_i^*) = p^-(c_i), \quad i = 1, 2, \dots, N-1 \quad (91)$$

$$\alpha = \frac{\pi a}{d}$$

#### (4) COD准则

上面概述了基于Dugdale模型的弹塑性分析。联系到裂纹的起始扩展, 还需要一个判断裂纹在什么条件下起裂的宏观准则。与线弹性断裂理论的 $K_{Ic}$ 准则相对应, 在理想塑性材料大范围屈服情况下, Wells<sup>[16]</sup>提出, 取裂纹顶端张开位移(COD)作为衡量材料断裂韧性的特征量。对每一种材料, 临界的COD不依赖于加载方式和裂纹体的几何形状, 它是材料常数。这就是COD准则的物理意义。

在裂纹顶端出现的强塑性区, 使裂纹上、下表面分开。这种相对运动称之为“裂纹张开位移”。

一般地说, 材料处于断裂过程的某个阶段时, 它只能承受邻近材料施加的应力应变。不同的载荷体系对裂纹顶端的应力应变会产生不同的响应。因为裂纹顶端不存在使裂纹起裂的外载, 因此, 裂纹顶端局部区域的应力应变状态是决定裂纹起裂的内在因素。

张开型裂纹的COD综合反映了裂纹顶端区域材料的临界状态。

自COD准则提出以来, 研究又进行了十七年。迄今为止, 关于COD准则的可靠性仍然存在很多疑问。

很多作者<sup>[17, 18, 19]</sup>指出: 在靠近裂纹顶端处, COD减小趋近于零, 在加载过程中, 裂纹顶端区域钝化, 形成一个伸张区, 从而在裂纹顶端保持一个细切口剖面。因此, 真实裂纹顶端并不张开, 鉴于这个事实有人提出“有效COD”概念。但是关于“有效COD”概念各说纷纷, 没有统一的看法。

另外, 实验测定COD时, 在确定裂纹长度和决定裂纹顶端位置上尚存在一些困难。同时确定裂纹起裂瞬时和允许的“裂纹缓慢扩张”量上也存在着不少困难。

用小试样测COD, 实验数据比较分散。因为COD的临界值通常为 $10^{-3} \sim 10^{-2}$ 的量级, 精确测定如此微小的位移量比较困难。

尽管COD准则存在着很多疑问, 但是COD准则与Dugdale模型相结合, 可以得到很多关于弹塑性断裂的有用知识。

在用Dugdale模型计算COD时, 通常都取真实裂纹顶端的张开位移作为COD。对于受双轴拉伸的含中心裂纹的无限大平板, 从公式(44)得:

$$\text{COD} = \delta = \frac{8\sigma_s}{\pi E} \cdot c \cdot \ln \sec \left( \frac{\pi\sigma}{2\sigma_s} \right) \quad (92)$$

其中 $c$ 是真实裂纹半长。 $\sigma$ 是无穷远处的均匀拉伸应力。 $\sigma_s$ 是材料流变应力。设材料的临界COD等于 $\delta_c$ , 从公式(92)得到断裂应力为:

$$\sigma_f = \frac{2}{\pi} \sigma_s \cdot \cos^{-1} \left\{ \exp \left( -\frac{\pi E \delta_c}{8 \sigma_s c} \right) \right\} \quad (93)$$

当裂纹长度充分大时,  $\frac{\pi E \delta_c}{8 \sigma_s c} \ll 1$ , 从(93)得:

$$\sigma_f \doteq \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{\pi E \cdot \delta_c}{8 \sigma_s \cdot c}} \quad (94)$$

另一方面根据线弹性断裂理论,有:

$$\sigma_t = \frac{K_c}{\sqrt{\pi c}} \quad (95)$$

比较公式(94)、(95),不难得出:

$$\delta_c = \frac{K_c^2}{E\sigma_s} \quad (96)$$

注意到裂纹扩张力 $G_c$ 与 $K_c$ 之间的关系,从(96)得:

$$\delta_c = G_c/\sigma_s \quad (97)$$

公式(96)、(97)确定了临界COD与平面应力断裂韧性 $K_c$ 及裂纹扩展力 $G_c$ 之间的关系。

利用公式(96)、(93)得:

$$\sigma_t = \frac{2}{\pi} \sigma_s \cos^{-1} \left\{ \exp \left( -\frac{\pi K_c^2}{8c\sigma_s^2} \right) \right\} \quad (98)$$

公式(98)是确定起裂载荷的计算公式。公式(98)与线弹性断裂理论确定起裂载荷的公式(95)是完全不同的,当裂纹长度 $2c$ 趋于零时,依照(95)式,得到 $\sigma_t$ 趋于无穷,这显然是错误的。因为起裂载荷不可能超过极限强度 $\sigma_s$ 。从公式(98)得到 $\sigma_t$ 趋于 $\sigma_s$ ,若取 $\sigma_t = \sigma_s$ ,就得到与经典强度理论完全一致的结果。

从公式(98),也可以求得临界裂纹尺寸的计算公式:

$$(c)_{cr} = \frac{\frac{\pi}{8} \cdot K_c^2}{\sigma_s^2 \ln \sec \left( \frac{\pi \sigma}{2\sigma_s} \right)} \quad (99)$$

#### (5) $\rho_c^+$ 准则

与COD准则相似的有Koshiga<sup>[20]</sup>提出的 $\rho_c^+$ 准则。这个准则认为裂纹顶端拉应力塑性区尺寸 $\rho^+$ 是综合反映裂纹顶端区域应力应变状况的特征参量。当 $\rho^+$ 达到临界值 $\rho_c^+$ 时,裂纹开始扩展, $\rho_c^+$ 是材料的断裂韧性指标。

与COD准则一样, $\rho_c^+$ 准则的物理论证是不严格的,它在很大程度上是一种直观假设,与传统强度理论反映材料断裂特性的力学参量(断裂真应变 $\epsilon_f$ ,极限强度 $\sigma_s$ 等)没有联系,也与断裂的微观机制毫无联系,而且 $\rho_c^+$ 的实验测定非常困难,一般用蚀刻法。但是这种方法只适用于特定的材料。

对含中心裂纹的无限大平板,从公式(28)得:

$$\rho^+ = c \cdot \left\{ \sec \left( \frac{\pi \sigma}{2\sigma_s} \right) - 1 \right\} \quad (100)$$

从公式(100)不难得到临界裂纹尺寸的计算公式:

$$(c)_{cr} = \frac{\rho_c^+}{\left\{ \sec \left( \frac{\pi \sigma}{2\sigma_s} \right) - 1 \right\}} \quad (101)$$

当 $\sigma/\sigma_s \ll 1$ 时,有:



$$(c)_{cr} = \frac{2\rho_c^+}{\left(\frac{\pi\sigma}{2\sigma_s}\right)^2} \quad (102)$$

另一方面, 根据线弹性理论有:

$$(c)_{cr} = \frac{K_c^2}{\pi\sigma^2} \quad (103)$$

对于低应力脆断, 公式 (102) 与 (103) 应该给出相同的结果。由此得到:

$$\rho_c^+ = \frac{\pi K_c^2}{8\sigma_s^2} \quad (104)$$

这就是临界塑性区尺寸  $\rho_c^+$  与平面应力断裂韧性  $K_c$  之间的关系:

引入无量纲临界裂纹尺寸参数  $\alpha_{cr}$

$$\alpha_{cr} = \frac{K_c^2}{\sigma_s^2 (c)_{cr}} \quad (105)$$

根据以上的分析, 不难得到三种准则的  $\alpha_{cr}$ :

$$\alpha_{cr} = \begin{cases} \pi \left(\frac{\sigma}{\sigma_s}\right)^2 & K_c \text{ 准则,} \\ \frac{8}{\pi} \left\{ \sec\left(\frac{\pi\sigma}{2\sigma_s}\right) - 1 \right\} & \rho_c^+ \text{ 准则,} \\ \frac{8}{\pi} \ln \sec\left(\frac{\pi\sigma}{2\sigma_s}\right) & \text{COD 准则} \end{cases} \quad (106)$$

表1列出了  $\alpha_{cr}$  的数值结果。

从表1不难看出, 当  $\sigma/\sigma_s < 0.5$  时, 线弹性理论与COD理论比较一致, 当  $\sigma/\sigma_s = 0.95$  时, 线弹性理论与COD理论相差2.3倍, 而此时  $\rho_c^+$  准则给出的结果竟然比COD准则给出的结果大四倍多。

表1 无量纲参数  $\alpha_{cr}$  值

$\sigma/\sigma_s$	0.10	0.30	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	0.95
$K_c$	0.0314	0.2828	0.7854	1.131	1.539	2.011	2.545	2.835
COD	0.0316	0.2939	0.8826	1.353	2.414	2.991	4.724	6.481
$\rho_c^+$	0.0318	0.2939	1.037	1.786	3.063	6.841	13.73	29.91

从表1列出的数值结果不难推断, 线弹性理论适用于  $\sigma/\sigma_s$  小于0.5的低应力脆断。此外,  $\rho_c^+$  与COD准则给出的结果差别很大, 两者不可能并列。

#### (6) 平面应力断裂韧性 $K_c$ 的测试

平面应力断裂韧性  $K_c$  的直接测量需要大的试样。目前尚未提出普遍接受的标准试样及实验程序。很明显, 测定薄板的  $K_c$ , 三点弯曲试样和紧凑拉伸试样是不适用的。已经

发表的实验 大多是用中心 裂纹薄板。在试验过程中，需要拍摄电影，以记录缓慢的裂纹扩展。为了得到有用的 $K_{Ic}$ 值（或 $K_{Ic}$ 值）应注意满足 $\sigma_c < \frac{2}{3} \sigma_s$ 的筛选条件。

关于裂纹尺寸及韧带宽度问题，尚需进一步摸索。Feddersen及Broek建议的最小试件尺寸：

$$w_{min} = 4.29 \left( \frac{K_{Ic}}{\sigma_s} \right)^2, \quad 2a = \frac{1}{3} w_{min} = 1.43 \left( \frac{K_{Ic}}{\sigma_s} \right) \quad (107)$$

是一个值得参考的意见。

根据弹塑性断裂理论分析，可以取公式（6）给出的裂纹尺寸：

$$2a \geq \left( \frac{K_{Ic}}{\sigma_s} \right)^2 \quad (108)$$

至于韧带宽度，应选择得足以忽略边界的影响为宜。一般的说，可以选择 $w$ 是裂纹长度 $2a$ 的4~5倍。

薄板断裂韧性试验的一个特点是裂纹起裂后，开始缓慢扩展<sup>[1]</sup>，这个缓慢的裂纹扩展是稳定的，若外界载荷保持不变，则扩展立即停止。虽然裂纹增长了，但要使它继续扩展尚需更高的应力，最后在某一临界应力 $\sigma_c$ 下达到临界裂纹尺寸，此后裂纹扩展变得不稳定，造成薄板的突然的完全破坏。

将裂纹起始扩展瞬时所对应的应力强度因子记为 $K_{Ii}$ ；把裂纹失稳扩展所对应的应力强度因子记为 $K_{Ic}$ ，则有：

$$K_{Ii} = f \cdot \sigma_i \sqrt{\pi a_0}, \quad K_{Ic} = f \sigma_c \sqrt{\pi a_0} \quad (109)$$

其中 $f$ 是薄板几何形状和尺寸的修正因子。

在公式（109）中，裂纹尺寸仍取初始裂纹尺寸，虽然裂纹真实长度已经增大了。这一点多半会使人迷惑。但是考虑到有效 $K_{Ic}$ 通常是在 $\sigma_c/\sigma_s < 2/3$ 的情况下获得的，此时载荷挠度曲线偏离初始直线不远。因此，裂纹扩展量 $\Delta a$ ，比之于 $a_0$ 是个小量。所以公式（109）仍可以给出较好的结果。另一方面，线弹性断裂理论，只适用于 $\sigma_i$ 与 $\sigma_c$ 比较接近的情况。稳定的亚临界扩展问题只能用弹塑性断裂理论去解决。但是本章第2至第4节所提供的弹塑性断裂理论仍不能解决亚临界扩展问题。公式(98)所提供的只是起裂载荷。其中的 $K_{Ic}$ 应代之以 $K_{Ii}$ ，但是作为工程应用，可以假定断裂韧性参量 $K_{Ic}$ 对薄板的失稳扩展也起控制作用。这样 $K_{Ic}$ 的测量也就具有实际意义。大量的爆破试验也支持这个假定<sup>[10, 22]</sup>。

如果局限于线弹性断裂理论，那么 $K_{Ii}$ 和 $K_{Ic}$ 并不象平面应变断裂韧性 $K_{Ic}$ 那样具有普遍适用的意义。

试验<sup>[2, 32]</sup>表明，对于给定的厚度，只当板条尺寸及裂纹尺寸足够大时， $K_{Ii}$ ， $K_{Ic}$ 才是常数，对于普通的结构钢和常用的铝合金 $K_{Ii}$ 及 $K_{Ic}$ 是相当大的。这就对试件尺寸及裂纹尺寸提出了苛刻的要求，因此线性理论对于安全设计的指导意义是极有限的，但是Feddersen<sup>[2]</sup>提出了一个分析和描述试验数据的方法，对设计是很有用的。

当用足够宽的板条测得了有效的 $K_{Ii}$ 及 $K_{Ic}$ 之后，剩余强度和裂纹长度之间的关系可由图11的曲线来表示。同时图11给出代表净截面屈服的直线，当裂纹尺寸比较小或韧

带宽度比较小时，线弹性断裂理论给出的断裂应力超过屈服强度，这对理想塑性材料是不合理的。Feddersen建议，对于理想的K曲线作两条切线，可以得到一条连续光滑的曲线，用这条曲线估算剩余强度将是有益的，他以大批实验数据支持这个建议。

以上提出的直接测量 $K_c$ 的方法，通常需要有很大试样。对于文献〔2〕提出的2024铝合金最小尺寸约为520毫米；对于两种7075铝合金，则分别是135毫米和110毫米。尺寸为110毫米的板条仍嫌太小，这是由于失稳扩展时 $\sigma_c > \frac{2}{3}\sigma_s$ 。

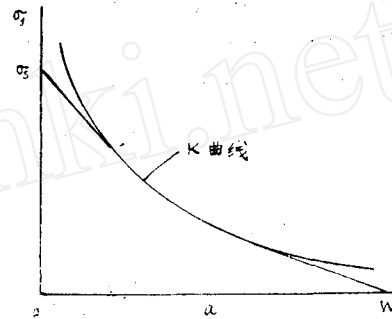


图11

为了用小试样取得平面应力断裂韧性 $K_c$ 的数据。可采用间接测量的办法，其中比较简单的方法是通过测量COD换算成 $K_c$ ，对于理想塑性材料及低硬化指数材料，公式(96)提供了临界COD与 $K_c$ 之间的有效关系。

$$K_c = \sqrt{E\sigma_s\delta_c}$$

此时流变应力 $\sigma_s$ 取屈服强度 $\sigma_y$ 与极限强度 $\sigma_u$ 之间的某个值，均不会引起明显的误差。但是对屈强比( $\sigma_y/\sigma_u$ )较低的材料，公式(110)中流变应力 $\sigma_s$ 的选取会带来人为的误差。

另一方面，很多实验表明〔23、24〕，失稳扩展时的COD并不是材料常数。因此，测量COD的间接方法，只能用来换算 $K_{c1}$ 。

另一种测量 $K_c$ 的间接方法，是园筒的爆破实验及有限宽板条的拉伸试验，正如下一章将要说明的那样，引入反映曲率对应力强度因子影响的鼓胀系数M之后。园筒的起裂(或起爆)应力可用下述公式表示：

$$\sigma_t = \frac{2\sigma_s}{\pi M} \cos^{-1} \left\{ \exp \left( -\frac{\pi k_c^2}{8\sigma_s^2 a} \right) \right\} \quad (111)$$

公式(111)又可改写为：

$$K_c = \sigma_s \sqrt{\pi a} \cdot \sqrt{\frac{8}{\pi^2} \ln \sec \left( \frac{\pi M \sigma_t}{2\sigma_s} \right)} \quad (112)$$

当 $\frac{\pi}{2} \cdot \frac{M\sigma_t}{\sigma_s} \ll 1$ 时，公式(112)化为：

$$K_c = M\sigma_t \cdot \sqrt{\pi a}$$

这是众所周知的线弹性公式。

试验〔8、10、25〕表明，当 $M\sigma_t/\sigma_s < 0.9$ 时，公式(112)是相当有效的。也就是说，对不同长度的裂纹，起裂(或起爆)载荷是不同的，但给出的 $K_c$ 值却是一个常数。

用这种方法既可测得 $K_{c1}$ ，也可测得 $K_{c2}$ ，前者对应于起裂载荷，后者对应于起爆载荷。严格地说，公式(112)是基于Dugdale模型得来的，因此，只对起裂载荷适用。至于

公式 (112) 用到起爆载荷尚未有理论上的证明, 但作为工程应用仍可在使用中逐步加以检验。

同样, 运用Dugdale模型的弹塑性断裂理论, 也可以从含中心裂纹有限宽板条的拉伸试验, 得到有效的 $K_{Ic}$ 。在这方面尚缺乏关于有限宽板条COD的精确计算。但是可以用公式 (88) 作为较好的近似:

$$\delta = \frac{4}{\pi E'} \cdot \frac{d}{\pi} \cdot \sin \alpha \cdot \sigma_s J \quad (114)$$

其中

$$J = \int_{\theta}^{\pi/2} \frac{\cos \chi}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \chi}} \cdot \log \frac{\sin(\chi + \theta)}{\sin(\chi - \theta)} \cdot d\chi \quad (115)$$

$$\alpha = \frac{\pi a}{d}, \quad \sin \theta = \frac{\sin\left(\frac{\pi c}{d}\right)}{\sin \alpha} \quad (116)$$

这里 $c$ 是真实裂纹半长,  $d$ 是板宽,  $a$ 是有效裂纹半长。确定 $a$ 的公式如下:

$$\frac{\sin \frac{\pi c}{d}}{\sin \frac{\pi a}{d}} = \cos \left( \frac{\pi \sigma}{2 \sigma_s} \right) \quad (117)$$

$\sigma$ 是有限宽板条所受的均匀拉伸应力。

### 三 弹塑性断裂力学在压力容器上的应用

上面提出的基于Dugdale模型的弹塑性断裂理论在予示压力容器的起爆压力上取得了很大成功。大量的爆破实验证明了Dugdale模型与COD准则相结合可以得到关于起爆压力的有用知识。

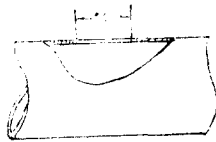


图12

#### (1) 含穿透裂纹园筒的鼓胀系数

如图12所示, 园筒带有穿透筒厚的裂纹, 裂纹的方向可以是任意的, 但为了简单起见, 这里只讨论轴向裂纹与周向裂纹。

自从Folias<sup>[8]</sup>的工作发表以来, 对于带裂纹园筒的应力强度因子的计算有了很大进展, 取得了比较满意的结果。

由于裂纹表面是不受应力作用的自由表面, 因此, 当园筒受内压、轴向拉伸或其他载荷作用时, 裂纹所在地区将会向外鼓胀, 促使裂纹顶端的应力强度因子增大。其增大的倍数可用鼓胀系数 $M$ 来表示, 严格地说, 园筒内外表面由于弯曲变形的影响, 鼓胀系数并不相同, 但是一般说来差别不大。我们关心的是平均效果。因此, 下面只讨论平均的鼓胀系数。

表1列出了含轴向裂纹的园柱壳受均匀周向拉力作用时(均匀薄膜拉力), 鼓胀系

数M的数值，其中参数λ是裂纹尺寸的无量纲参数：

$$\lambda = \sqrt{12(1-\nu^2)} \cdot a / \sqrt{R \cdot t} \quad (118)$$

a是裂纹半长，R是柱壳中面曲率半径，t是壳体厚度。鼓胀系数M只依赖于参数λ。

裂纹顶端的应力强度因子为：

$$K_1 = M \cdot \frac{N_0}{t} \cdot \sqrt{\pi a} \quad (119)$$

鼓胀系数M表明了曲率对应力强度因子的影响。N<sub>0</sub>是柱壳承受的周向薄膜力。

表1列出的数值有时用起来不方便，下面推荐几个近似公式。

$$M \doteq \sqrt{1 + 1.61a^2/Rt} \quad (120)$$

这个公式是Folias早期提出的，适用于λ < 1.5的情况，在这个区域内误差小于5%。

如果用到λ = 8的情况，误差达26%。

$$M \doteq \sqrt{1 + 0.34\lambda^2} \quad (121)$$

公式(121)是Folias<sup>[8]</sup>后来提出的近似公式，在0 ≤ λ ≤ 8的整个区域内，误差小于6%。

为了提高精度，本文提出如下近似公式：

$$M \doteq \sqrt{1 + 0.34\lambda^2} \cdot \left(1 + 0.0512 \sin \frac{\pi\lambda}{5}\right) \quad (122)$$

这个公式，在0 ≤ λ ≤ 8的整个区域内与精确解相比误差小于1.2%，对于实际常用的范围0 ≤ λ ≤ 5，公式(122)的误差小于1%。因此，公式(122)可以代替表1，用于工程实际。

表1 含轴向裂纹柱壳均匀拉力鼓胀系数M值

λ	精确解	近似值 [公式(122)]	λ	精确解	近似值 [公式(122)]
0.2	1.0096	1.0132	2.8	2.0045	2.011
0.4	1.0371	1.0398	3.0	2.1035	2.113
0.6	1.0795	1.0793	3.25	2.2276	2.241
0.8	1.1344	1.1306	3.50	2.3519	2.341
1.0	1.1993	1.192	3.75	2.4761	2.491
1.2	1.2723	1.263	4.00	2.5999	2.614
1.4	1.3519	1.342	4.50	2.8459	2.852
1.6	1.4367	1.427	5.00	3.0895	3.082
1.8	1.5256	1.517	5.50	3.3303	3.306
2.0	1.6177	1.611	6.00	3.5681	3.529
2.2	1.7122	1.708	6.50	3.8029	3.758
2.4	1.8085	1.808	7.00	4.0347	3.997
2.6	1.9060	1.908	8.00	4.4895	4.538

表2列出了含周向裂纹的园柱壳，受均匀轴向拉力作用时，鼓胀系数M的数值。

Folias提出了如下近似公式：

$$M = 1 + \frac{\pi\lambda^2}{64} \quad (123)$$

这个公式只适用  $0 \leq \lambda \leq 2$  的情况。

为了提高精度，本文提出如下近似公式：

$$M = 1 + \frac{\pi\lambda^2}{64} - 0.0059\lambda^3 \cdot \{1 - 0.01Y(\lambda)\}$$

$$Y(\lambda) = \begin{cases} 1.059 + 0.0418\left(\frac{\lambda}{2}\right)^7, & 0 \leq \lambda \leq 4 \\ 5.614 + 5.71(\lambda - 4) - 0.0566(\lambda - 4)^2 & 4 \leq \lambda \leq 8, \end{cases} \quad (124)$$

公式 (124) 与精确解相比误差小于 0.5%。

对于常用的参数范围  $0 \leq \lambda \leq 4$ ，从公式 (124) 导出：

$$M = 1 + \frac{\pi\lambda^2}{64} - 0.0467\left(\frac{\lambda}{2}\right)^3 + 0.0000197\left(\frac{\lambda}{3}\right)^7 \quad (125)$$

表 2 含周向裂纹柱壳均匀拉伸鼓胀系数 M

$\lambda$	1	2	3	4	5	6	7	8
精确解	1.0439	1.1496	1.2847	1.4290	1.5715	1.7069	1.8339	1.9530
近似解 公式 (124)	1.043	1.1497	1.2842	1.4119	1.5728	1.7071	1.8315	1.9526

## (2) 含穿透裂纹园筒的断裂分析

文献[8, 10, 26]对园柱压力容器的裂纹爆裂准则作了详尽分析。这些分析的要点都是把线弹性断裂力学的基本概念，COD准则，Dugdale模型及Folias公式结合起来，给出了予计起爆压力公式。

含穿透裂纹无限大平板的起裂载荷已由公式 (98) 给出。对于含穿透裂纹园筒，需要考虑曲率的影响。有两种方法分析曲率的影响。一种是Folias方法，通过引入鼓胀系数 M，把含穿透裂纹的园筒简化为含中心裂纹的平板，从而导得予计起裂载荷的公式。这种方法的优点是比较直观简单，导出的公式也被大量实验所证实。但是这种方法理论上不是很严密。因为鼓胀系数 M 只是表示曲率对应力强度因子的影响，并不直接表示曲率对裂纹顶端张开位移的影响。第二种方法就是Erdogan等人<sup>[27]</sup>提出的直接计算柱壳裂纹顶端张开位移的方法。这种方法的缺点是计算比较复杂。

本文介绍第一种方法，对第二种方法感兴趣的读者可查阅文献[27, 26]

Folias公式可以归纳为：

$$K_I = M (K_I)_p \quad (126)$$

其中  $K_I$  是园筒的应力强度因子； $(K_I)_p$  是含同样大小裂纹的平板的应力强度因子；M 是鼓胀系数。公式 (126) 表明，曲率的影响相当于使外载提高 M 倍，设园筒受均匀薄膜力  $N_0$  的作用，则等效的平板应受  $MN_0/t$  的均匀拉应力作用。

从公式 (98) 得:

$$M \cdot \sigma_f = \frac{2}{\pi} \sigma_s \cos^{-1} \left\{ \exp \left( -\frac{\pi K_c^2}{8a\sigma_s^2} \right) \right\} \quad (127)$$

注意公式 (127) 中的  $a$  是真实裂纹半长, 相当于公式 (98) 中的  $c$ ,  $\sigma_f = \left( \frac{N_0}{f} \right)_f$ , 下标 “ $f$ ” 表示裂纹起裂时的有关量, 公式 (127) 可改写为:

$$\sigma_f = \frac{1}{M} \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \sigma_s \cos^{-1} \left\{ \exp \left( -\frac{\pi K_c^2}{8a\sigma_s^2} \right) \right\} \quad (128)$$

公式 (128) 已被大量实验证实<sup>[3,10,25]</sup>, 图13表示了依照公式 (128) 予示的起爆载荷与实测数据的比较。

公式 (126) 也可理解为由于曲率的影响, 裂纹长度增大了  $M^2$  倍。依照这种理解, 可以得到:

$$\sigma_f = \frac{2}{\pi} \sigma_s \cos^{-1} \left\{ \exp \left( -\frac{\pi K_c^2}{8\sigma_s^2 a M^2} \right) \right\} \quad (129)$$

公式 (129) 比较牵强, 但是作为半经验、半理论的公式, 在用实验数据修正鼓胀系数  $M$  的表达式之后, 可以得到有用的公式。文献[9]取

$$M = (1 + 0.015a^2/R \cdot t)$$

按公式 (129) 计算起爆应力并与管道断裂实测结果进行比较, 两者颇为一致。图14表示了这个结果。其中  $\sigma_s = \sigma_u$ 。

引入表观断裂韧性  $K_A$ :

$$K_A = \sigma_f \sqrt{\pi a}, \quad (130)$$

对于平板则有:

$$K_A = \frac{2}{\pi} \cdot \sigma_s \cos^{-1} \left\{ \exp \left( -\frac{\pi K_c^2}{8\sigma_s^2 a} \right) \right\} \sqrt{\pi a} \quad (131)$$

对于筒壳则有:

$$K_A = \frac{2}{\pi} \frac{\sigma_s}{M} \cos^{-1} \left\{ \exp \left( -\frac{\pi K_c^2}{8\sigma_s^2 a} \right) \right\} \sqrt{\pi a} \quad (132)$$

公式 (131)、(132) 表当裂纹长度  $a$  趋于零时, 表观断裂韧性  $K_A$  也趋近于零。图15给出了  $K_A \sim a$  的计算曲线, 以及有关的实验数据

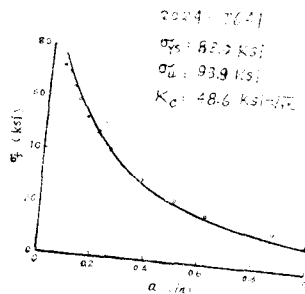


图13

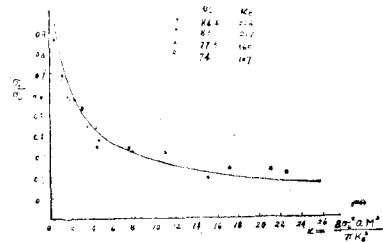


图14

### (3) 含表面裂纹圆筒的断裂分析

迄今为止,含表面裂纹圆筒的断裂分析,缺乏可靠的方法(除了超高强钢制成的圆筒,壁厚满足平面应变要求之外)。这里介绍的是两种半经验、半理论的工程计算方法。

对圆筒表面裂纹,引入鼓胀系数M之后,也可简化为平板表面裂纹,此时裂纹尺寸无量纲参数λ取为:

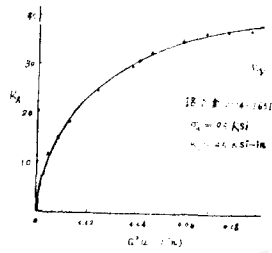


图15

$$\lambda = \frac{b}{\sqrt{R \cdot t}} \cdot \sqrt[4]{12(1 - \nu^2)} \quad (133)$$

其中b是半椭圆表面裂纹的长半轴,设圆筒受均匀薄膜拉应力 $\sigma_H$ 的作用,则等效的平板受均匀拉应力 $M \cdot \sigma_H$ 的作用。另一方面平板表面裂纹的应力强度因子等于:

$$K_I = \frac{M_k}{E(k)} \sigma \sqrt{\pi a} \quad (134)$$

其中E(k)是第二类全椭圆积分,a是椭圆短半轴; $k = \sqrt{1 - a^2/b^2}$ ;  $M_k$ 是前后表面修正系数,

命:

$$Q = M_k/E(k) \quad (135)$$

则有:

$$K_I = Q \sigma \sqrt{\pi a} = \sigma \cdot \sqrt{\pi Q^2 a} \quad (136)$$

从公式(136)看出,表面裂纹可以比拟为一个穿透裂纹,其长度为 $2Q^2 a$ ,这种物理比拟缺乏数学论证。但是有关的实验[9]似乎支持这种比拟,图16画出了有关实验与计算之间的比较,两者是比较一致的。

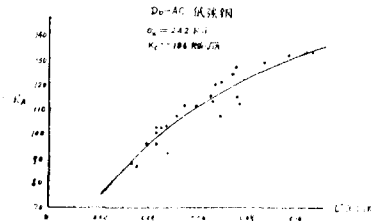


图16

将公式(128)中的a用 $Q^2 a$ 代替就得到预计圆筒表面裂纹起爆应力的计算公式:

$$(\sigma_H)_f = \frac{1}{M} \cdot \frac{2}{\pi} \sigma_s \cos^{-1} \left\{ \exp \left( - \frac{\pi K_{Ic}^2}{8 \sigma_s^2 Q^2 a} \right) \right\} \quad (137)$$

以上叙述了一种半经验、半理论公式,新近Erdogan<sup>[33]</sup>又提出另一种工程方法,这里作一个简要的介绍。

研究图17所示的中心裂纹板条,无穷远处受均匀拉应力 $\sigma$ 的作用;真实裂纹长度为 $2a$ ,等效裂纹长度为 $2a_p$ ;图17b表示穿透裂纹;图17c表示深埋裂纹,其形状接近于



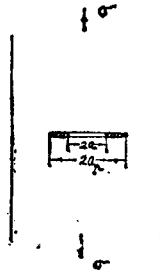


图17 (a)

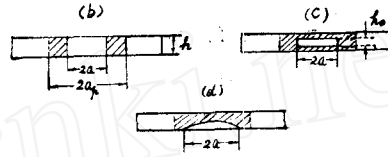


图17 (b) -- (d)

矩形, 矩形的长度为  $2a$ , 宽度为  $h_0$ , 假设塑性区包围了整个裂纹, 也就是说, 裂纹开裂前净截面就已进入了塑性流动状态。

基于Dugdale模型的弹塑性分析, 归结为求解三个弹性问题:

问题 1: 无裂纹板条, 无穷远处受外载作用, 边界条件为:

$$\sigma_x(\pm b, y) = \tau_{xy}(\pm b, y) = 0, \quad -\infty < y < \infty, \quad (138)$$

$$\tau_{xy}(x, \pm \infty) = 0, \quad -b \leq x \leq b, \quad (139)$$

$$\sigma_y(x, \pm \infty) = \sigma, \quad -b \leq x \leq b \quad (140)$$

问题 2: 中心裂纹板条, 裂纹长度  $2a_p$ , 边界条件除了 (138)、(139) 之外, 还有:

$$\sigma_y(x, \pm \infty) = 0, \quad -b \leq x \leq b \quad (141)$$

$$\begin{cases} \tau_{xy}(x, 0) = 0 \\ \sigma_y(x, 0) = -\sigma, \end{cases} \quad -a_p < x < a_p, \quad (142)$$

问题 3: 中心裂纹板条, 裂纹长度  $2a_p$ . 边界条件除了 (138)、(139)、(141) 之外, 还有:

$$\tau_{xy}(x, 0) = 0, \quad -a_p < x < a_p, \quad (143)$$

$$\sigma_y(x, 0) = \sigma_s, \quad a < |x| < a_p, \quad (144)$$

$$\sigma_y(x, 0) = \left(1 - \frac{h_0}{h}\right) \sigma_s, \quad |x| < a \quad (145)$$

$\sigma_s$  是流变应力。

如果在裂纹面上作用一对法向力  $\sigma_y = -\left(1 - \frac{h_0}{h}\right) \sigma_s$ , 以消除公式 (145) 的右端项, 那么问题 2, 3 可以用下面两个问题代替。

问题 2': 中心裂纹板条, 裂纹长度  $2a_p$ , 边界条件 (142) 代之以:

$$\begin{cases} \tau_{xy}(x, 0) = 0 & -a_p < x < a_p \\ \sigma_y(x, 0) = -\left\{ \sigma - \left(1 - \frac{h_0}{h}\right) \sigma_s \right\} & -a_p < x < a_p \end{cases} \quad (146)$$

其他边界条件不变。

问题 3': 中心裂纹板条, 裂纹长度  $2a_p$ , 边界条件 (144), (145) 代之以:

$$\sigma_y(x, 0) = \sigma_s - \left(1 - \frac{h_0}{h}\right) \sigma_s = \frac{h_0}{h} \sigma_s, \quad a < |x| < a_p, \quad (147)$$

$$\sigma_y(x, 0) = 0, \quad |x| < a \quad (148)$$

从问题 2', 3' 不难看出, 深埋裂纹问题与一个穿透裂纹问题是等价的, 这个等效的含穿透裂纹板条, 无穷远处受均匀拉力  $\sigma' = \sigma - \left(1 - \frac{h_0}{h}\right) \sigma_s$  的作用, 而塑性区上作

用着流变应力  $\sigma'_s = \frac{h_0}{h} \sigma_s$ 。

对表面裂纹也可作类似的分析。图 17d 表示表面裂纹, 令表面裂纹的面积为  $S$ , 则可取  $h_0 = S/2a$ ,  $2a$  是表面裂纹的长度。这样表面裂纹问题, 也与一个穿透裂纹问题等价, 只要将无穷远处的外载  $\sigma$  用  $\sigma' = \sigma - \left(1 - \frac{S}{2ah}\right) \sigma_s$  代替, 流变应力  $\sigma_s$  用  $\sigma'_s = \frac{S}{2ah} \cdot \sigma_s$  代替即可。

#### 四 全面屈服断裂力学

在压力容器和其他中、低强钢结构中, 短裂纹扩张往往发生在全面屈服之后, 此时局部应变量超过屈服应变。裂纹区域的材料处于塑性流动状态, 任何微小的应力增量均可能引起相当大的塑性变形和张开位移量。因此, 研究全面屈服断裂力学, 通常采用比较敏感的标称应变无穷远处的应变作为计算的参量。

全面屈服断裂力学尚处于探索阶段, 目前常用的是两个半经验公式, 一个是 COD 理论中的 Burdekin 公式; 另一个是 J 积分理论中的 Merkle 公式。

##### (1) Burdekin 公式<sup>[11]</sup>

图 18 画出了大量宽板试验结果整理得到的数据, 以无量纲标称应变  $e/e_s$  作横坐标;  $e_s$  是材料的屈服应变, 标称应变  $e = \Delta/L$ , 如图 19 所示, 在通过裂纹中点并与裂纹相垂直的直线上, 选取 E  $\left(0, \frac{L}{2}\right)$  和 F  $\left(0, -\frac{L}{2}\right)$  两点; 测量这两点的相对位移  $\Delta$ , 就得到标称应变  $e = \Delta/L$ 。

纵坐标是无量纲张开位移  $\Phi$ :

$$\Phi = \delta/2\pi e_s a$$

宽板试件的尺寸为  $915 \times 915 \text{mm}$ ; 板厚为  $25 \text{mm}$ ,  $57 \text{mm}$ ,  $75 \text{mm}$ ; 裂纹长度从  $13 \text{mm}$  变化到  $229 \text{mm}$ ; 测定的结果分散在阴影线所示的一个分散带中。Burdekin 建议用分散带上限曲线作为确定容许缺陷尺寸的安全设计曲线, 当  $e/e_s > 1$  时, 这条曲线近似为一直线:

$$\Phi = e/e_s - 0.25 \quad (150)$$

公式 (150) 即是半经验的 Burdekin 公式。

运用 Burdekin 设计曲线就可以对压力容器的断裂控制进行分析, 压力容器内不同区域有不同的应变量, 因而其容许缺陷尺寸也各不相同。

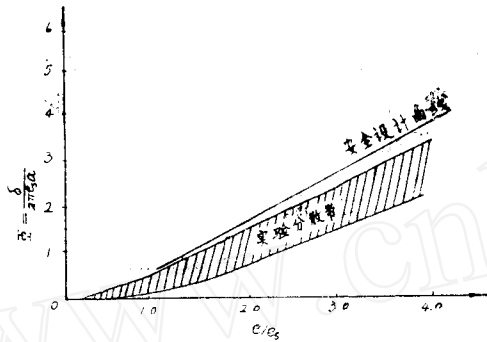


图18

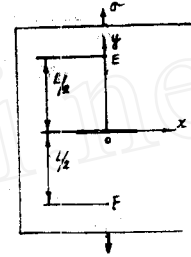


图19

譬如对于喷嘴附近, 实验测定表明, 在工作压力时, 其 \$e/e\_s\$ 等于 2.0, 于是从式 (150) 得:

$$\Phi = 1.75 \quad (151)$$

再由 (149) 式得:

$$a_c = 0.09 (\delta_c / e_s) \quad (152)$$

(2) Merkle公式<sup>[34]</sup>

众所周知, J积分在线弹性情况下与应力强度因子 \$K\_I\$ 之间有如下关系:

$$J = K_I^2 / E \quad (153)$$

又有 (中心裂纹有限宽板条, 板宽为 \$w\$):

$$K_I = Y \left( \frac{a}{w} \right) \cdot \sigma \sqrt{\pi a} \quad (154)$$

\$Y \left( \frac{a}{w} \right)\$ 是边界修正因子, 将 (154) 代入 (153) 得:

$$J = \pi a Y^2 \left( \frac{a}{w} \right) \sigma^2 / E = 2\pi a Y^2 \left( \frac{a}{w} \right) \int_0^e \sigma^* de^* \quad (155)$$

\$e\$ 是加载端附近的应变。

Merkle认为公式 (155) 不仅对线弹性情况成立, 而且对大范围屈服也成立, 对线弹性—理想塑性材料, 应力应变关系如图20所示, 形变功 \$W\$ 等于:

$$W = \int_0^e \sigma de = \sigma_s (e - 0.5e_s) \quad (156)$$

代入 (155) 就得到:

$$J = 2\pi a Y^2 \left( \frac{a}{w} \right) \sigma_s (e - 0.5e_s) \quad (157)$$

另一方面有:

$$J = \sigma_s \cdot \delta \quad (158)$$

对无限宽板, \$Y \left( \frac{a}{w} \right) \cong 1\$, 由此得到:

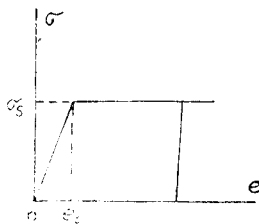


图20

$$\Phi = \frac{\delta}{2\pi a e_s} = (e/e_s - 0.5) \quad (159)$$

公式(159)即是J积分理论的Merkle公式。公式(159)与(150)十分相似,但是(159)中的 $e$ 是加载端附近的当地应变,而(150)中的 $e$ 是标称应变,运用公式(159)也可对压力容器的断裂控制进行工程分析。

### 参 考 文 献

- [ 1 ] Broek, D., Elementary engineering fracture mechanics, Noordhoff Interna. puf., Leyden (1974) .
- [ 2 ] Fedderson, C.E., ASTMSTP 486 (1971) , 50—78.
- [ 3 ] Dugdale, D.S., J.Mech. phys.solids, 8 (1960) , 100—104.
- [ 4 ] Barenblatt, G.I., in “Advances in Applied Mechanics, Vol.Ⅶ”, Academic press, New York (1962) , 55.
- [ 5 ] Bilby, B.A., Cottrell, A.H.and Swinden,K.H., Proc.Roy. Soc. A (1963) , 272, 304.
- [ 6 ] Bilby, B.A., Cottrell, A.H. and Swinden, K.H., Proc.Roy. Soc.A (1964) , 279.1.
- [ 7 ] Burdekin, F.M., Stone, D.E.W., Jour. strain analysis, Vol.1, № 2 , 145 (1966) .
- [ 8 ] Folias, E.S., ①Inter.Jour.Fract.Mechanics, Vol.1 (1965) .104.  
②in thin shell Structure, 1974, Ed Fung, Y.C. and Sechler, E.E., 483—518.
- [ 9 ] Heald, P.T.,Spink, G.M.and Worthington, P.J., Materials science and engineering, Vol.10 (1972) , 129.
- [ 10 ] Hahn, G.T., Sarrater, M. and Rosenfield, A.R., Inter.Jou. fract.Mech., Vol. 5 (1969) , № 3 , 187.
- [ 11 ] Burdekin, F.M.and Dawes, M.G., Conf.on practical Appl.Fracture Mech. to press vessel Tech (1971) , 28—37.
- [ 12 ] Swedlow, J.L., Williams, M.L.and Yang, W.H., in proce. First Int. conf. Fracture, Sendai, Japan (1966) , 259—282.
- [ 13 ] Theocows, P.S. and Glortors, E.E., Inter. Jou. Fracture, 10 (1974) , 549—565.
- [ 14 ] Мусхелишвили, Н.И. , 数学弹性力学的几个基本问题 , 科学出版社 , (赵惠元译) , (1958) .
- [ 15 ] Wells, A.A., British welding Journal, 10 (1963) 563.
- [ 16 ] Nichols, R.W., Burdekin, E.M., et., in practical Fractare mechanics for structural steels, 1969.

- [ 17 ] Elliott, D., Walker, E.F. and MAY, M.J. , in “conference on practical application of fracture mechanics to pressure vessel technology” C 77/71.
- [ 18 ] Pelloux, R.M.N., Eng.Frac.Mech., 1 (1970) , 697.
- [ 19 ] Srawley, J.F., Swedlow, J.L. and Roberts, E., Inter.Jou.Fra. Mech., 6 (1970) , 441—444.
- [ 20 ] Koshiga, F., in conference on prac. appli.frac.mech.to pressure vessel tech., C50/71, 168—174.
- [ 21 ] Smith, E., Eng. Fract.Mech., 7 (1975) , No 2, 285—290.
- [ 22 ] Fearnehough, G.D., et., in “conference on prac.appli.fracture mechanics to pressure vessel technology” C33/71, 119—128.
- [ 23 ] Harrison, T.C. and Fearnehough, G.D., Inter. J. Frac.Mechs, 5 (1969) , 348.
- [ 24 ] 中国科学院力学研究所断裂力学组, 力学, 3 (1975) , 132—140.
- [ 25 ] Cowan, A., et., Jou.Eng.Ind., Trans.Am.So.mech.Engrs, 92 (1970) , series B, 79.
- [ 26 ] Erdogan, F. and RATWANI, M., Inter.Jou.Fract.Mech., Vol. 8 (1972) , No 4, 413—426.
- [ 27 ] Erdogan, F. and Kiber, J.J., Inter, Jou.Fract.Mech., Vol. 5 (1969) , No 3, 229—237.
- [ 28 ] Duncan, M.E. and Sanders, J. L., Inter.J.Frac. Mech., Vol. 5 (1969) , No 2, 133—155.
- [ 29 ] Allen, F.C., ASTMSTP486 (1971) , 16—38.
- [ 30 ] Folias, E.S., Int.Jou.Frac.Mech., Vol. 5 (1969) , No 4 , 327—346.