第 8 卷　第 2 期　力 学 学 报　Vol. 8, No. 2
1965 年 6 月　ACTA MECHANICA SINICA　June, 1965

研究簡报

湍流射流在等速流动中的扩散*

謝 象 春
（中国科学院力学研究所）

在工程技术問題中，譬如冲压发动机燃燒室內燃料逆气流方向噴射发展的下游流动以及为了防热目的采用所謂气膜冷却等实际問題中，往往遇到湍流射流在等速流动中的热量扩散与質量扩散过程，本文建議采用扩散系数随流动发展距离与流动速度的乘积而变的关系来求解两个簡单問題：1. 无限平面平行射流的扩散；2. 距射流出口相当远处的扩散.

等速流动中湍流扩散的基本方程可表为

$$\rho u_0 \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{1}{y^\delta} \frac{\partial}{\partial y} [y^\delta(-\rho \overline{v'\theta'})] \tag{1}$$

及

$$G_{\theta T} = \rho \overline{v'\theta'} \tag{2}$$

的形式，其中 x, y 是横坐标与纵坐标，θ 是温度 T 或質量濃度 κ，θ' 是温度脉动 T' 或質量濃度脉动 κ'，ρ 是密度，u_0 是纵向流动速度，v' 是横向速度脉动，$G_{\theta T}$ 是沿 y 軸方向通过流体微团間的湍流扩散流. $\delta = 0$ 对应于平面情形；$\delta = 1$ 对应于軸对称情形. 这里不考虑化学反应，并且为了簡化分析，在推导热量扩散方程时認为热量扩散过程与質量扩散过程相同，即通常所謂湍流 Lewis 数等于 1.

設

$$\rho D_{\theta T} = \frac{-G_{\theta T}}{\dfrac{\partial \theta}{\partial y}}, \tag{3}$$

式中 $D_{\theta T}$ 是湍流扩散系数(热量扩散系数或質量扩散系数). 考虑到

$$\theta' \propto L \frac{\partial \theta}{\partial y}, \tag{4}$$

式中 L 是混合长度. 則計及式(2),(3),(4)后可得

$$D_{\theta T} \propto L v'. \tag{5}$$

如果根据湍流度定义采用 $\varepsilon = v'/u_0$，則式(5)可改写为

$$D_{\theta T} \propto L \varepsilon u_0. \tag{6}$$

一般說来，在射流中 Prandtl 混合长度 L 与流动发展距离 x 成比例[1,2]，同时对于某一

* 1963 年 2 月 13 日收到.

既定的来流情况（譬如对应于一定的入口情况）来說，湍流度 ε 为定値，于是便可假定，在等速流动中，湍流扩散系数随流动速度 u_0 与流动发展距离 x 的乘积而变：

$$D_{\theta T} = k u_0 x, \tag{7}$$

式中 k 是常数.

考虑到无限平面平行射流中热量扩散的边界条件

$$\left.\begin{aligned} &\text{当}\ y = \infty\ \text{时},\quad T = T_0,\ \frac{\partial T}{\partial y} = 0; \\ &\text{当}\ y = -\infty\ \text{时},\ T = T_H, \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

此处 T_0, T_H 分别表示两股射流的温度. 从参数分布相似的条件出发，設 $T = T_0 F(\varphi)$，$\varphi = y/ax$（a 为待定的实験常数），注意到 $\rho \propto 1/T$，并利用基本假定(7)，可把方程(1)变为

$$FF'' + \varphi FF' - F'^2 = 0, \tag{9}$$

其中 $a^2 = k$，撇号"$'$"表示对 φ 的微商. 求解后即得热量扩散时的温度分布

$$\frac{T - T_H}{T_0 - T_H} = 0.3109 \exp\left(\int_0^{\varphi} e^{-\varphi^2/2} d\varphi\right) - 0.0888. \tag{10}$$

由图 1 可看出，所得結果与 Бородачев 的实験結果[3]符合（采用 $a = 0.06$）.

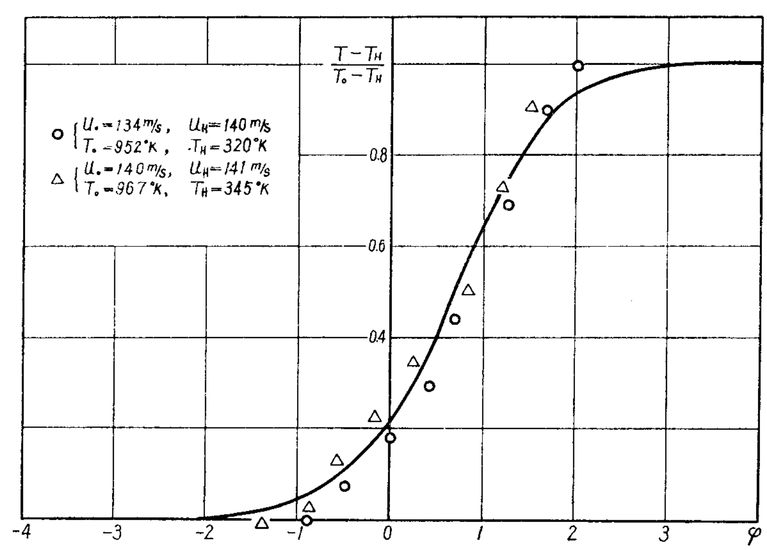

图 1

对于无限平面平行射流的質量扩散情形，我們主要討論非等温性对質量扩散的影响（假定相混合的两流体在等温时的密度相差不大）. 考虑到边界条件当 $y = \infty$ 时，$\kappa = \kappa_0$（κ_0 表示其中一股射流的某一初始質量浓度），$T = T_0$；当 $y = -\infty$ 时，$\kappa = 0, T = T_H$，則仿照前面的办法可得

$$\frac{H''}{H'} - \frac{F'}{F} + \varphi = 0, \tag{11}$$

其中 $H(\varphi) = \kappa/\kappa_0$. 求解后得

$$\frac{\kappa}{\kappa_0}=\frac{\int_0^{\varphi}Fe^{-\varphi^2/2}d\varphi-\int_0^{-\infty}Fe^{-\varphi^2/2}d\varphi}{\int_0^{\infty}Fe^{-\varphi^2/2}d\varphi-\int_0^{-\infty}Fe^{-\varphi^2/2}d\varphi}. \tag{12}$$

把方程(9)中解得的函数 F 代入上式,积分后即得質量扩散时的浓度分布 κ/κ_0. 图 2 表示温度比 $n=T_H/T_0$ 对浓度分布 κ/κ_0 的影响.

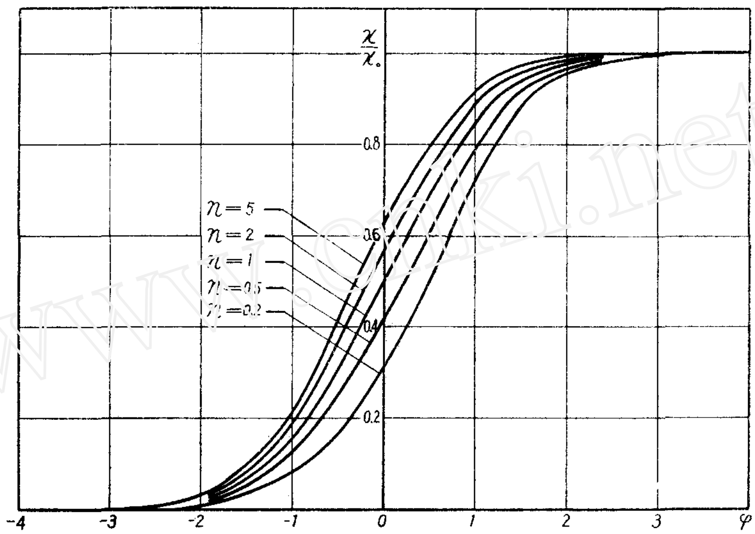

图 2

现在討論距射流出口相当远处的热量与質量扩散問題. 此时由于 $T_1=T-T_H\ll T_H$ (T_H 是伴随流温度)及 κ 相当小,方程(1)可写成下列綜合形式:

$$u_0\frac{\partial\theta_1}{\partial x}=\frac{1}{y^\delta}\frac{\partial}{\partial y}\left(y^\delta D_{0T}\frac{\partial\theta_1}{\partial y}\right), \tag{13}$$

式中 θ_1 代表 T_1 或 κ. 边界条件为:

$$\left.\begin{aligned}&\text{当 } y=0 \text{ 时}, \ \frac{\partial\theta_1}{\partial y}=0;\\&\text{当 } y=\infty \text{ 时}, \ \theta_1=0.\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

平面与軸对称問題的积分条件为:

$$\left.\begin{aligned}&\text{平面問題: } \int_0^\infty\rho_H u_0 z_1\,dy=\rho_0 u_0\Delta z_0\,h,\\&\text{軸对称問題: } 2\pi\int_0^\infty\rho_H u_0 z_1 y\,dy=\pi\rho_0 u_0\Delta z_0 r^2,\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

此处 z_1 分别表示对应于热量扩散与質量扩散情形的 c_pT_1 与 κ, Δz_0 分别表示 $c_p(T_0-T_H)$ 与 κ_0(T_0 与 κ_0 分别表示射流出口处的流体温度与流体某一質量浓度), ρ_0 与 ρ_H 分别表示射流出口处与伴随流的流体密度, h 与 r 分别表示平面射流出口厚度与軸对称射流出口半径.

为了求解方程(13),設 $\theta_1=F(\varphi)/x^\alpha$, $\varphi=y/ax^\beta$ (α,β 为待定的系数). 按照假定(7),有 $b\propto x^\beta$(b 是射流扩展宽度). 于是由量綱分析可得 $\alpha=\beta=1$(平面情形), $\alpha=2$,

$\beta = 1$（軸对称情形），从而方程(15)变为：

$$\begin{aligned} &\text{平面情形：} F'' + \varphi F' + F = 0, \\ &\text{軸对称情形：} \varphi F'' + F' + \varphi(\varphi F' + 2F) = 0. \end{aligned} \Bigg\} \tag{16}$$

求解方程(16)后可得

$$\frac{T - T_H}{T_m - T_H} = \frac{\kappa}{\kappa_m} = e^{-\varphi^2/2}, \tag{17}$$

$$\frac{T_m - T_H}{T_0 - T_H} = \frac{\kappa_m}{\kappa_0} = \frac{\sqrt{2}\,\rho_0/\rho_H}{\sqrt{\pi}\,\tilde{x}} \text{（平面）}, \tag{18}$$

$$\frac{T_m - T_H}{T_0 - T_H} = \frac{\kappa_m}{\kappa_0} = \frac{\rho_0/\rho_H}{2\tilde{x}^2} \text{（軸对称）}, \tag{19}$$

此处 T_m 与 κ_m 分别表示射流軸綫上的温度与质量浓度值，$\tilde{x} = \frac{ax}{h}$（平面），$\tilde{x} = \frac{ax}{r}$（軸对称）。

由以上結果可以看出，在等速流动中，离射流出口相当远处的热量扩散与质量扩散，其参数分布均按概率曲綫 $e^{-\varphi^2/2}$ 的規律变化；至于射流軸心参数，对于平面情形，則与 $\tilde{x}$ 成反比，对于軸对称情形，則与 $\tilde{x}^2$ 成反比。

参　考　文　献

[1] Абрамович, Г. Н., Теория турбулентных струй, Физматгиз, Москва, 1960.
[2] Schlichting, H., Boundary Layer Theory, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1960.
[3] Бородачев, В. Я., Теоретическое и экспериментальное исследование воздушно-заградительного охлаждения плоской пластины, Оборонгиз, 1956.

ДИФФУЗИЯ ТУРБУЛЕНТНОЙ СТРУИ ПРИ РАВНОМЕРНОМ ТЕЧЕНИИ

Се Сян-чунь
(*Институт механики АН Китая*)