

径向收缩等离子体层的运动不稳定性^{*1)}

徐 复

(中国科学院力学研究所)

提 要

本文根据雪橇模型讨论了收缩效应的不稳定性问题。首先导出了具有三个方向扰动的线性化扰动方程,再运用有限时间稳定性理论来判别运动的稳定性。结果表明,无论是 z -收缩还是 θ -收缩,收缩过程都是不稳定的;在加上导体壁和轴向稳定磁场以后,也不能使 z -收缩完全稳定。其次指出,对于径向运动来说,稳定性条件不仅和加速度有关,也和速度等因素有关,因此,它和平面情形的 Rayleigh-Taylor 不稳定性是不同的。

收缩效应装置是目前受控聚变研究中最常用的一种装置。从大量的实验结果已经知道,无论是 z -收缩还是 θ -收缩(后者又称快速磁压缩实验),被磁场约束的等离子体都是不稳定的。引起不稳定性的因素是各式各样的,例如:磁场位形,等离子体的宏观机械运动,有限电导,旋转,不均匀性,等等。这里,我们只讨论收缩过程的运动不稳定性。Kruskal 和 Schwarzschild^[1] 研究过等离子体平面情形的 Rayleigh-Taylor 不稳定性。Jarem 和 Watson^[2] 讨论了平面和柱面情形变加速运动的不稳定性。Wyld^[3] 根据雪橇模型^[4] 讨论了径向扰动的不稳定性。对于收缩效应来说,主要有兴趣的是柱面情形。但是, Jarem 和 Watson 给出的柱面情形的速度分布在对称轴上出现奇点,因此不能应用于收缩效应。Wyld 采用的雪橇模型虽然很好,但是他推导的扰动方程有错误。因此,本文根据雪橇模型重新推导了具有三个方向扰动时的扰动方程,并运用有限时间稳定性理论讨论了收缩效应的运动不稳定性。结果表明,无论是 z -收缩还是 θ -收缩,收缩过程都是不稳定的;在加上完全导体壁和轴向稳定磁场以后,也不能使 z -收缩完全稳定。其次指出,对于径向运动来说,稳定性条件不仅和加速度有关,也和速度等因素有关,因此,它和平面情形的 Rayleigh-Taylor 不稳定性是不同的。

一、基本方程

设在初始时刻 t_0 , 等离子体层某曲面元的柱坐标为 R_0, θ_0, z_0 。若等离子体层不受扰动,则曲面元的运动轨迹为

$$r = R(t), \theta = \theta_0, z = z_0. \quad (1)$$

受扰动之后,轨迹为

$$r = R(t) + \tilde{r}, \theta = \theta_0 + \tilde{\theta}, z = z_0 + \tilde{z}. \quad (2)$$

下面我们采用 Lagrange 描写法,即以 t, θ_0, z_0 为自变量,而以 r, θ, z 为未知函数。这里

* 1964年9月17日收到。

1) 本文主要结果曾在科学通报1964年8月号上报导。

假定 \tilde{r} , $\tilde{\theta}$, \tilde{z} 为一阶小量. 在以后的计算中, 只限于保留一阶小量.

把公式(2)写作矢量形式:

$$\mathbf{r}(t; \theta_0, z_0) = \{R(t) + \tilde{r}(t; \theta_0, z_0)\} \mathbf{e}_r(\theta(t; \theta_0, z_0)) + \{z_0 + \tilde{z}(t; \theta_0, z_0)\} \mathbf{e}_z, \quad (3)$$

其中 \mathbf{e}_r , \mathbf{e}_θ , \mathbf{e}_z 是柱坐标三个方向的单位矢量. 由此, 曲面元的运动速度和加速度分别是

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} = \left\{ \dot{R} + \frac{\partial \tilde{r}}{\partial t} \right\} \mathbf{e}_r + \{R + \tilde{r}\} \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial t} \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial \tilde{z}}{\partial t} \mathbf{e}_z \quad (4)$$

和

$$\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2} = \left\{ \ddot{R} + \frac{\partial^2 \tilde{r}}{\partial t^2} \right\} \mathbf{e}_r + \left\{ 2\dot{R} \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial t} + R \frac{\partial^2 \tilde{\theta}}{\partial t^2} \right\} \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial^2 \tilde{z}}{\partial t^2} \mathbf{e}_z, \quad (5)$$

在这里以及在下面, 字母上的一个圆点表示对 t 的一次导数.

根据 Newton 第二定律, 曲面元的运动方程为

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ dm \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \right\} = - \mathbf{n} \alpha A P_M, \quad (6)$$

其中 dm 是此曲面元由 t_0 至 t 这段时间内所扫过的体积元中等离子体的质量, $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}$ 为由公式(4)给出的速度, \mathbf{n} , 和 dA 分别是曲面元的法向和面积, P_M 是作用在此曲面元上的磁压. 把附录 A 中的表达式代入公式(6), 就可得到 z -收缩和 θ -收缩的基本方程. 然后令扰动量的形式为

$$\left. \begin{aligned} \tilde{r} &= \tilde{r}(t) e^{im\theta_0 + ikz_0}, \\ \tilde{\theta} &= -i\tilde{\theta}(t) e^{im\theta_0 + ikz_0}, \\ \tilde{z} &= -i\tilde{z}(t) e^{im\theta_0 + ikz_0}, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

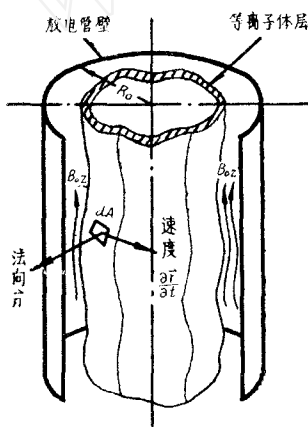


图 1

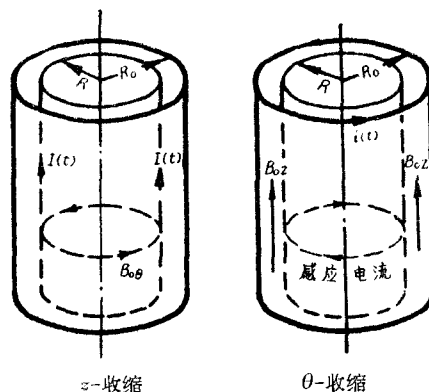


图 2

其中 m 和 k 为周向和轴向波数, 就有:

1. 对 z -收缩

已知电流强度 $I(t)$,

$$B_{0\theta} = \frac{2I(t)}{cR}, \quad P_{M_0} = \frac{B_{0\theta}^2}{8\pi}.$$

其中 $R(t)$ 由方程

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} \rho_0 (R_0^2 - R^2) \frac{dR}{dt} \right\} = -R \frac{B_{0\theta}^2}{8\pi} \quad (8)$$

确定, c 是光速, ρ_0 为等离子体初始体密度, 扰动方程则为

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\rho_0}{2} (R_0^2 - R^2) \ddot{r} - 2\rho_0 R \dot{R} \dot{r} - \rho_0 \dot{R}^2 \ddot{r} - \rho_0 R \dot{R}^2 \left(\frac{m}{R} \dot{s} + k \dot{z} \right) - \\ & - \rho_0 \ddot{R} \int_{t_1}^t \left\{ \frac{\partial R \ddot{r}}{\partial t} + R \dot{R} \left(\frac{m}{R} \dot{s} + k \dot{z} \right) \right\} dt = \\ & = -RP_{M_0} \left(-\frac{\ddot{r}}{R} - \frac{2m^2}{R} \frac{K_m(kR)}{kRK'_m(kR)} \ddot{r} + \frac{m}{R} \dot{s} + k \dot{z} \right), \\ & \frac{\rho_0}{2} (R_0^2 - R^2) \ddot{s} - \rho_0 R \dot{R} \dot{s} = -RP_{M_0} \left(\frac{m}{R} \ddot{r} + \frac{\dot{s}}{R} \right), \\ & \frac{\rho_0}{2} (R_0^2 - R^2) \ddot{z} - \rho_0 R \dot{R} \dot{z} = -RP_{M_0} k \ddot{r}, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

其中 $\dot{s} = R\dot{\theta}$, t_1 为发生扰动的時間, K_m 是純虛变量的 Hankel 函数.

2. 对 θ -收缩

已知面电流密度 $i(t)$, $B_{0z} = \frac{4\pi i(t)}{c}$, $P_{M_0} = \frac{B_{0z}^2}{8\pi}$, 而 $R(t)$ 由方程

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} \rho_0 (R_0^2 - R^2) \frac{dR}{dt} \right\} = -R \frac{B_{0z}^2}{8\pi} \quad (10)$$

确定, 扰动方程则为:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\rho_0}{2} (R_0^2 - R^2) \ddot{r} - 2\rho_0 R \dot{R} \dot{r} - \rho_0 \dot{R}^2 \ddot{r} - \rho_0 R \dot{R}^2 \left(\frac{m}{R} \dot{s} + k \dot{z} \right) - \\ & - \rho_0 \ddot{R} \int_{t_1}^t \left\{ \frac{\partial R \ddot{r}}{\partial t} + R \dot{R} \left(\frac{m}{R} \dot{s} + k \dot{z} \right) \right\} dt = \\ & = -RP_{M_0} \left(\frac{\ddot{r}}{R} - \frac{2kK_m(kR)}{K'_m(kR)} \ddot{r} + m \frac{\dot{s}}{R} + k \dot{z} \right), \\ & \frac{\rho_0}{2} (R_0^2 - R^2) \ddot{s} - \rho_0 R \dot{R} \dot{s} = -RP_{M_0} \left(\frac{m}{R} \ddot{r} + \frac{1}{R} \dot{s} \right), \\ & \frac{\rho_0}{2} (R_0^2 - R^2) \ddot{z} - \rho_0 R \dot{R} \dot{z} = -RP_{M_0} k \ddot{r}. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

方程(8)和(10)的解 $R(t)$ 给出 z -收缩和 θ -收缩沒有扰动时的运动. 扰动运动则分別由方程組(9)和(11)给出. 方程組(9)和(11)是 $\ddot{r}(t)$, $\dot{s}(t)$, $\dot{z}(t)$ 的微分和积分方程組. 我們需要討論这两个方程組的稳定性問題.

二、运动不稳定性

我們运用有限時間稳定性理論来討論收缩效应的运动不稳定性. 稳定性的定义和判別法見附录 B. 采用这种稳定性定义主要有两个原因. 其一, 根据这一定义, 稳定性的判別法就相当于常系数方程組在无限時間稳定性情况下的判別法. 目前討論收缩不稳定性問題, 很多著者都是依照这种判別法的. 这样, 我們可以在同一判別法的情况下来研究

各物理因素对不稳定性的影响。其二,根据实验事实,很难给出一个完全恰当的有限时间稳定性定义。在有限时间内,我们感兴趣的主要是扰动量的增长率,而这个问题还有待于进一步解决。

在把附录 B 的结果应用于方程组 (9) 和 (11) 以前,必须先解决两个问题。第一个问题,在方程组 (9) 和 (11) 中出现带积分的项,而在附录 B 里却没有讨论这个问题。第二个问题,方程组 (9) 和 (11) 中最高阶导数的系数在 $R = R_0(t = t_0)$ 处为零,这也是稳定性理论没有考虑的。如果假定扰动不在初始时刻出现,第二个问题就不会存在了。看来,作了这个假定并不妨碍我们讨论不稳定性的一般特征,因为初始时刻的扰动发展到时刻 t_1 后有一定的数值,我们可以把它们看作是 t_1 时刻的初始扰动。根据实验事实我们知道,这时的扰动仍可看作是小扰动。另一方面,如果我们只需要判断 t_1 时刻的任意扰动是否稳定,那就可以只取与 t_1 充分接近的一段时间来考虑,这样,方程组 (9) 和 (11) 中带积分的项便可以略去了。

对 z -收缩,分为以下几种情形讨论:

1) 一般情形

在任何时刻 $t_1(t_1 > t_0)$, 方程组 (9) 的特征多项式的常数项是

$$\frac{\rho_0}{2} (R_0^2 - R^2) (kR P_{M_c})^2 \ddot{R},$$

由于 $\ddot{R}|_{t_1}$ 为负,故至少有一个特征值具有正实部,因此运动不稳定。

2) $m = 0$, 即只有径向和轴向扰动

这时,特征多项式的常数项是

$$\frac{\rho_0}{2} (R_0^2 - R^2) P_{M_0} (kR)^2 \ddot{R}.$$

由于 $\ddot{R}|_{t_1}$ 为负,故至少有一个特征值具有正实部,因此运动不稳定。

对 θ -收缩,分为以下几种情形讨论:

1) 一般情形

在任何时刻 $t_1(t_1 > t_0)$, 方程组 (11) 的特征多项式的常数项是

$$\frac{\rho_0}{2} (R_0^2 - R^2) (kR P_{M_0})^2 \ddot{R}.$$

由于 $\ddot{R}|_{t_1}$ 为负,故至少有一个特征值具有正实部,因此运动不稳定。

2) $m = 0$, 即只有径向和轴向扰动

这时,特征多项式的常数项是

$$\frac{\rho_0}{2} (R_0^2 - R^2) P_{M_0} (kR)^2 \ddot{R}.$$

由于 $\ddot{R}|_{t_1}$ 为负,故至少有一个特征值具有正实部,因此运动不稳定。

3) $k = 0$, 即只有径向和周向扰动

这时,特征多项式的常数项是

$$\frac{\rho_0}{2} \frac{R_0^2 - R^2}{R} (-\ddot{R}) (1 - m^2).$$

由于 $-\ddot{R}|_{t_1}$ 为正,故 $m > 1$ 的扰动均不稳定。

三、加导体壁和轴向磁场时 z -收缩的稳定性问题

如果等离子体处于平衡状态,则在加上完全导体壁和轴向稳定磁场之后,可以得到在一定参数范围内的稳定状态. 现在要问,对于运动的等离子体是否仍有这个结果?

假定在 $r = R_0$ 有一完全导体壁. 在等离子体内部 $r < R(t)$ 有一轴向稳定磁场. 在等离子体收缩过程中,设轴向稳定磁场 H_z 满足磁通量守恒的条件^[4],就有

$$H_z = H_{0z} \frac{R_0^2}{R^2}. \quad (12)$$

用类似于附录 A 中求磁压的办法可以将外磁压求出. 这样,最后得到的运动方程和扰动方程分别是

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\rho_0}{2} (R_0^2 - R^2) \frac{dR}{dt} \right\} = -R \left(\frac{B_{0\theta}^2}{8\pi} - \frac{H_z^2}{8\pi} \right) \quad (13)$$

和

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\rho_0}{2} (R_0^2 - R^2) \ddot{r} - 2\rho_0 R \dot{R} \dot{r} - \rho_0 \dot{R}^2 \ddot{r} - \rho_0 R \dot{R}^2 \left(\frac{m}{R} \dot{s} + k \dot{z} \right) - \\ & - \rho_0 \ddot{R} \int_{t_1}^t \left\{ \frac{\partial R \tilde{r}}{\partial t} + R \dot{R} \left(\frac{m}{R} \dot{s} + k \dot{z} \right) \right\} dt = \\ & = -R \frac{B_{0\theta}^2}{8\pi} \left\{ -\frac{\tilde{r}}{R} \left[1 + 2m^2 \frac{I_m'(kR_0)K_m'(kR) - K_m'(kR_0)I_m'(kR)}{kK(I_m'(kR_0)K_m'(kR) - K_m'(kR_0)I_m'(kR))} \right] + \right. \\ & \left. + \frac{m}{R} \dot{s} + k \dot{z} \right\} + R \frac{H_z^2}{8\pi} \left\{ -3 \frac{\tilde{r}}{R} + \frac{m}{R} \dot{s} + k \dot{z} \right\}, \\ & \frac{\rho_0}{2} (R_0^2 - R^2) \ddot{s} - \rho_0 R \dot{R} \dot{s} = -R \left(\frac{B_{0\theta}^2}{8\pi} - \frac{H_z^2}{8\pi} \right) \left(\frac{m}{R} \dot{r} + \frac{1}{R} \dot{s} \right), \\ & \frac{\rho_0}{2} (R_0^2 - R^2) \ddot{z} - \rho_0 R \dot{R} \dot{z} = -R \left(\frac{B_{0\theta}^2}{8\pi} - \frac{H_z^2}{8\pi} \right) k \tilde{r}, \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

其中 I_m 为纯虚变量的 Bessel 函数. 我们仍然假定 $t_1 > t_0$, 并略去带积分的项,然后运用附录 B 中的判别法,可得如下的结果:

1) 一般情形

方程组(14)的特征多项式的常数项是

$$\frac{\rho_0}{2} (R_0^2 - R^2) (kR)^2 \left(\frac{B_{0\theta}^2}{8\pi} - \frac{H_z^2}{8\pi} \right) \ddot{R}.$$

所以,至少在初期 $\ddot{R} < 0$ 时,运动是不稳定的.

2) $m = 0$, 即只有径向和轴向扰动

这时,特征多项式的常数项是

$$\frac{\rho_0}{2} (R_0^2 - R^2) (kR)^2 \left(\frac{B_{0\theta}^2}{8\pi} - \frac{H_z^2}{8\pi} \right) \ddot{R}.$$

由此可知,在初期 $\ddot{R} < 0$ 时,以及在后期 $\ddot{R} > 0$, $\frac{B_{0\theta}^2}{8\pi} > \frac{H_z^2}{8\pi}$ 时,运动是不稳定的.

总之,加上完全导体壁和轴向磁场,不能使收缩等离子体层得到完全稳定.

四、討 論

1. Wyld 的方程^[3]中的錯誤

1958 年, Wyld 曾就雪鏟模型推导了径向扰动的方程, 他給出的慣性項是

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \pi \rho_0 [R_0^2 - (R + \tilde{r})^2] \frac{\partial (R + \tilde{r})}{\partial t} \right\},$$

而与之相当的 $dm = \frac{1}{2} \rho_0 [R_0^2 - (R + \tilde{r})^2]$, 与附录 A 的結果相比較, 可見这个表达式是錯誤的。

2. 径向运动的 Rayleigh-Taylor 不稳定性

大家知道, 重流体位于輕流体之上的平衡位形是不稳定的, 这就是 Rayleigh-Taylor 不稳定性. 小密度流体推动大密度流体作加速运动, 在运动坐标系中相当于重流体位于輕流体之上, 所以也是不稳定的. 对磁流体力学来說, 这一結果只在平面情形得到証明^[1]. 对于磁場驱动等离子体作径向运动的情形, 稳定性条件就不一定只取决于加速度的方向. 我們以 Jarem 和 Watson 的解^[2] 为例来說明这点. Jarem 和 Watson 曾給出不可压缩导电流体任意径向运动的一个解, 但是对稳定性条件沒有作充分的討論. 如果假定驱动磁場 \mathbf{B}_0 为軸向, 則扰动方程为

$$\ddot{\tilde{r}} + \frac{\dot{R}}{R} \left(\frac{\phi'_m k R}{\phi_m} + 1 \right) \dot{\tilde{r}} + \left[\frac{\ddot{R}}{R} \left(1 + \frac{k R}{\phi_m} \right) + \frac{\dot{R}^2}{R^2} \left(\frac{\phi'_m k R}{\phi_m} - 1 \right) - k^2 a^2 \frac{\psi_m}{\phi_m} \right] \tilde{r} = 0, \quad (15)$$

其中

$$\phi_m = \frac{I_m(kR)}{I'_m(kR)}, \quad \psi_m = \frac{K_m(kR)}{K'_m(kR)}, \quad a^2 = \frac{1}{\rho_0} \frac{B_0^2}{8\pi},$$

$R(t)$ 是任意函数. 我們按照附录 B 中的判別法来研究稳定性問題. 这时, 不稳定的充分条件是方程(15)里 \tilde{r} 和 $\dot{\tilde{r}}$ 的系数有一个为負. 现在来看 $\dot{\tilde{r}}$ 的系数. 当

$$kR \text{ 較大时, } 1 + \frac{\phi'_m}{\phi_m} kR \rightarrow 1;$$

$$kR \text{ 較小时, } 1 + \frac{\phi'_m}{\phi_m} kR \begin{cases} \rightarrow \frac{1}{4} (kR)^2 & (m=0), \\ \rightarrow 2 & (m \neq 0). \end{cases}$$

因此, 只要 $\dot{R} < 0$ (即等离子体向中心收縮), 在相当广泛的軸向扰动波长范围内, 运动就是不稳定的, 而不管加速度 \dot{R} 的大小和方向如何. 由此可見, 径向运动的不稳定性不同于平面情形的 Rayleigh-Taylor 不稳定性.

实验中也曾观察到一些不是平面 Rayleigh-Taylor 不稳定性所能解释的現象. 例如, 在 Curzon 等的 z -收縮实验里^[5], 可以看出在 $\dot{R} > 0$ 的区域内扰动仍然在增长. 而根据平面情形的 Rayleigh-Taylor 不稳定性, 只有在 $\dot{R} < 0$ 的区域内扰动才会增长. $\dot{R} > 0$ 这种情况的发生, 是由于等离子体的压强大于外磁压, 但在这里的雪鏟模型中沒有考虑等离子体的压强, 因此目前还不能用雪鏟模型的运动不稳定性来解释这种現象.

本文是在郭永怀同志的直接指导下完成的, 这里谨向他表示诚挚的谢意. 参加这一工作的还有徐碩昌同志.

附录 A 对 $-\mathbf{n}dA$, dm 和磁压 P_M 的计算

大家知道

$$\mathbf{n}dA = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta_0} d\theta_0 \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z_0} dz_0, \quad (\text{A1})$$

根据公式(3),

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta_0} &= \frac{\partial \tilde{r}}{\partial \theta_0} \mathbf{e}_r + [R + \tilde{r}] \frac{\partial \theta}{\partial \theta_0} \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial \tilde{z}}{\partial \theta_0} \mathbf{e}_z, \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z_0} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z_0} \mathbf{e}_r + [R + \tilde{r}] \frac{\partial \theta}{\partial z_0} \mathbf{e}_\theta + \left(1 + \frac{\partial \tilde{z}}{\partial z_0}\right) \mathbf{e}_z. \end{aligned}$$

代入公式(A1),得到

$$\mathbf{n}dA = R d\theta_0 dz_0 \left\{ \left(1 + \frac{\tilde{r}}{R} + \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \theta_0} + \frac{\partial \tilde{z}}{\partial z_0}\right) \mathbf{e}_r - \frac{1}{R} \frac{\partial \tilde{r}}{\partial \theta_0} \mathbf{e}_\theta - \frac{\partial \tilde{r}}{\partial z_0} \mathbf{e}_z \right\}, \quad (\text{A2})$$

同时

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{n} &= \left(1, -\frac{1}{R} \frac{\partial \tilde{r}}{\partial \theta_0}, -\frac{\partial \tilde{r}}{\partial z_0}\right), & \mathbf{n} &= \mathbf{n}_0 + \mathbf{n}', \\ \mathbf{n}_0 &= \mathbf{e}_r, & \mathbf{n}' &= \left(0, -\frac{1}{R} \frac{\partial \tilde{r}}{\partial \theta_0}, -\frac{\partial \tilde{r}}{\partial z_0}\right). \end{aligned} \right\} \quad (\text{A3})$$

现在来求 dm . 在雪橇模型中,

$$dm = \rho_0 d\tau, \quad (\text{A4})$$

其中 ρ_0 为等离子体初始体密度, 假定它是一个已知常数, $d\tau$ 则是曲面元 $dA_0 = R_0 d\theta_0 dz_0$ 由 t_0 至 t 这段时间内所扫过的体积元. 因此

$$dm = -\rho_0 \int_{t_0}^t \mathbf{n}dA \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} dt. \quad (\text{A5})$$

若扰动开始于时刻 $t_1 (t_1 > t_0)$, 利用公式(4)和(A2), 就有

$$dm = -\rho_0 \int_{t_0}^t R \dot{R} dt d\theta_0 dz_0 - \rho_0 \int_{t_1}^t \left\{ R \frac{\partial \tilde{r}}{\partial t} + \dot{R} \tilde{r} + R \dot{R} \left(\frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \theta_0} + \frac{\partial \tilde{z}}{\partial z_0} \right) \right\} dt d\theta_0 dz_0. \quad (\text{A6})$$

最后来求磁场和磁压.

对于 z -收缩, 等离子体表面的电流 $I(t)$ 是轴向的, 故外磁场 $B_{0\theta}$ 是圆周方向的. 采用 Gauss 单位, 就有

$$B_{0\theta} = \frac{2I(t)}{cR}, \quad P_{M_0} = \frac{B_{0\theta}^2}{8\pi}, \quad (\text{A7})$$

其中 c 是光速, $I(t)$ 由电路方程确定.

对于 θ -收缩, 等离子体表面的电流 $i(t)$ 是圆周方向的, 外磁场 B_{0z} 是轴向的:

$$B_{0z} = \frac{4\pi i(t)}{c}, \quad P_{M_0} = \frac{B_{0z}^2}{8\pi}, \quad (\text{A8})$$

其中 $i(t)$ 是每单位轴向长度上通过的面电流, 也由电路方程确定.

等离子体受到扰动之后, 外磁场也受到扰动. 设扰动磁场为 \mathbf{B}' . 由于磁场内部无电流, 故扰动磁场有势:

$$\mathbf{B}' = \nabla \varphi. \quad (\text{A9})$$

利用磁通守恒定律,可得

$$\nabla^2 \varphi = 0. \quad (\text{A10})$$

考虑到 $r = \infty$ 处磁场有界这一条件,扰动磁场的解便是

$$\varphi = \varphi_0 K_m(kr) e^{im\theta + ikz}, \quad (\text{A11})$$

这里 φ_0 是待定常数, K_m 是纯虚变量的 Hankel 函数.

现在给出边界条件. 在通过等离子体与外磁场交界面时法向磁场连续, 由于等离子体内没有磁场,故

$$(\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}') \cdot (\mathbf{n}_0 + \mathbf{n}') = 0,$$

或

$$\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{n}' + \mathbf{B}' \cdot \mathbf{n}_0 = 0. \quad (\text{A12})$$

利用这个边界条件可以定出常数 φ_0 , 从而给出总磁压 P_M 的表达式. 对 z -收缩, 有

$$\varphi_0 = \frac{B_{0\theta}}{kRK'_m(kR)} \frac{\partial \tilde{r}}{\partial \theta_0} e^{-im\theta - ikz}, \quad (\text{A13})$$

$$\varphi = \frac{B_{0\theta}}{kRK'_m(kR)} \frac{\partial \tilde{r}}{\partial \theta_0} K_m(kr), \quad (\text{A14})$$

$$\begin{aligned} P_M &= P_{M_0} + P'_M = \frac{B^2}{8\pi} \Big|_{R+\tilde{r}} = \\ &= \frac{B_{0\theta}^2}{8\pi} \left[1 - \frac{2\tilde{r}}{R} + \frac{2im}{R} \frac{K_m(kR)}{kRK'_m(kR)} \frac{\partial \tilde{r}}{\partial \theta_0} \right]. \end{aligned} \quad (\text{A15})$$

在小扰动量中, 无须区别 θ_0 与 θ , z_0 与 z .

对 θ -收缩, 有:

$$\varphi_0 = \frac{B_{0z}}{kK'_m(kR)} \frac{\partial \tilde{r}}{\partial z_0} e^{-im\theta - ikz}, \quad (\text{A16})$$

$$\varphi = \frac{B_{0z}}{kK'_m(kR)} \frac{\partial \tilde{r}}{\partial z_0} K'_m(kR), \quad (\text{A17})$$

$$\begin{aligned} P_M &= P_{M_0} + P'_M = \frac{B^2}{8\pi} \Big|_{R+\tilde{r}} = \\ &= \frac{B_{0z}^2}{8\pi} \left[1 + \frac{2iK_m(kR)}{K'_m(kR)} \frac{\partial \tilde{r}}{\partial z_0} \right]. \end{aligned} \quad (\text{A18})$$

附录 B 关于有限时间运动稳定性的几个问题

在有限时间运动稳定性理论中, 不同的稳定性定义带来不同的稳定性条件. 设系统的微分方程组是

$$\frac{dx_i}{dt} = P_{i1}(t)x_1 + \cdots + P_{in}(t)x_n, \quad (i = 1, 2, \cdots, n), \quad (\text{B1})$$

其中 $P_{ij}(t)$ 是在 $t_0 \leq t < \infty$ 上的有界连续实函数. 我们给出的稳定性定义是:

定义 对于任意给定的一个正数 ε , 都存在一个满秩矩阵 $A = \{a_{ij}\}$, 其中 a_{ij} 为常数, 使得只要

$$\sum_{i=1}^n (a_{i1}x_{10} + \cdots + a_{in}x_{n0})^2 \leq \varepsilon \quad (x_{i0} = x_i|_{t=0}),$$

就会有一个有限时间间隔 $[t_0, t_0 + \tau)$ ($\tau \neq 0$), 在其中

$$\sum_{i=1}^n (a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n)^2 \leq \varepsilon,$$

这时, 我们称未受扰运动在 $t = t_0$ 对满足(B1)的 x_1, x_2, \cdots, x_n 是稳定的. 反之, 如果对所有可能的 A 都有 $\tau = 0$, 就称未受扰运动在 $t = t_0$ 是不稳定的.

Зубов 曾提出过类似的定义^[6], 只是他考虑的方程带有高次项, 给出的稳定性条件是在任意取高次项的情况下得到的. 对于我们所讨论的问题, 容易证明下面的结果:

1. 如果矩阵 P 在 $t = t_0$ 的特征根均有负实部, 则未受扰运动在 $t = t_0$ 是稳定的. 如果矩阵 P 在 $t = t_0$ 的特征根至少有一个具有正实部, 则未受扰运动在 $t = t_0$ 不稳定.

2. 如果矩阵 P 在 $t = t_0$ 的特征多项式中有一个系数为负, 则未受扰运动在 $t = t_0$ 是不稳定的.

参 考 文 献

- [1] Kruskal, M. and Schwarzschild, M., Some instabilities of a completely ionized plasma, *Proc. Roy. Soc.*, **A. 223**, 1954, 348—360.
- [2] Jarem, J. and Watson, M., Taylor instabilities of an incompressible plasma under variable acceleration, *Proc. 5th Inter. Conf. Ioniz. Phenom. Gases*, North Holland Publishing Comp., **2**, 1962, 2299—2309.
- [3] Wyld, H. W., Dynamic Stability of a self-pinch discharge, *Jour. Appl. Phys.*, **29**, 10, 1958, 1460—1465.
- [4] Glasstone, S. and Lovberg, R. H., *Controlled Thermonuclear Reactions*, D. Van Nostrand Comp., Inc., Chap. 7, 1960.
- [5] Curzon, F. L. et al., Experiments on the growth rate of Surface instabilities in a linear pinched *Proc. Roy. Soc.*, **A257**, 1960, 386—401.
- [6] Зубов, В. И., Условие устойчивости на конечном интервале времени, *Bul. Instit. Politech. IASI*, 1—2, 1958, 69—74.

DYNAMIC INSTABILITY OF A PINCHED DISCHARGE

XU FU

(*Institute of Mechanics, Academia Sinica*)

ABSTRACT

The instability of a pinched discharge is studied by the snowplow model. The linearized equations for the three dimensional disturbances are derived at first, and then the stability problems are discussed with the theory of stability of motion over a finite interval of time. The results show that, the contracting process is unstable for z -pinch as well as for θ -pinch; and z -pinch can not be completely stabilized even in a discharge tube surrounded by conducting walls with an axial magnetic field included within the plasma. The stability criterion for the radial motion of plasma not only depends on the acceleration of plasma, but also depends on the velocity and other parameters, and therefore, is different from the two-dimensional case of the Rayleigh-Taylor instability.