

# 夹层板方程的变换和四边简支 矩形夹层板的变形问题\*

柳春圖

(中国科学院力学研究所)

## 提 要

本文从杜庆华<sup>[7]</sup>-Прусаков<sup>[8]</sup>各向同性线性理论出发,经过变换把基本方程简化为相当于一个单层薄板的方程和三个弹性地基上的薄膜方程。指出了杜庆华-Прусаков各向同性线性理论与 Hoff<sup>[6]</sup>和 Reissner<sup>[3]</sup>理论之间的主要差别,为相差一个或两个弹性地基上的薄膜方程。导出了均布载荷和集中载荷作用下四边简支板挠度的近似公式,并按几种理论进行了分析比较。此外,提出了1948年 Reissner 型线性理论有关挠度的边界条件。在夹层板的合成内力的计算中,发现弯矩与单层板的弯矩相同。

有关夹层板方面的著作,Куришин<sup>[1]</sup>曾作了综合的评述。文献[2]中有供工程设计人员进行三层板壳计算的部分公式和曲线。在以松软材料为夹心的夹层板计算中,通常都忽略了夹心中平行于表板的应力。关于夹层板的理论有文献[3—8]等。但是,过去的著作很少论及各种夹层板理论的适用范围。Муштару<sup>[9]</sup>曾应用量级估计的方法粗略地分析了三层板壳的适用范围。由于夹层板的参数很多,问题较复杂,因此,简化计算和了解各种理论在不同参数和载荷形式下的适用范围,是一个很重要的问题。如果不考虑表板的非线性因素和夹心各向异性的特征,则上述几种夹层板理论的实质上的差别,将主要是考虑或不考虑表板抗弯刚度和夹心的横向压缩性。

## 一、基本方程的简化

### (一) 基本方程

考虑图1所示夹层板在反对称变形时的横向弯曲问题,边长为  $a, b$ , 表板厚度为  $t$ , 夹心厚度为  $h$ 。引用文献[7]的线性理论,表板平衡方程为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} - \frac{Q_x}{h} &= 0, \\ \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} - \frac{Q_y}{h} &= 0, \\ \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + \frac{t}{2h} \left( \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} \right) - \sigma_x + \frac{q}{2} &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

\* 1963年9月29日收到。

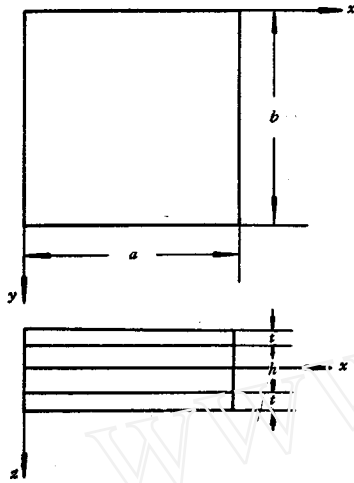


图 1

应力应变关系为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{t}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= \frac{1}{tE_f} (N_x - \nu N_y), \\ \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{t}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= \frac{1}{tE_f} (N_y - \nu N_x), \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - t \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} &= \frac{1}{tG_f} N_{xy}, \\ M_x &= -D_f \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_f \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \\ M_y &= -D_f \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu_f \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \\ M_{xy} &= -D_f (1 - \nu_f) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}; \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

夹心方程为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + 2\sigma_z &= 0, \\ Q_x &= G_c h \left( \frac{2u}{h} + \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial w'}{\partial x} \right), \\ Q_y &= G_c h \left( \frac{2v}{h} + \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{2}{3} \frac{\partial w'}{\partial y} \right), \\ \sigma_x &= \frac{4E_c}{h} w', \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

其中,  $N_x = \frac{1}{2} (N_{x+} - N_{x-})$ ,  $N_y = \frac{1}{2} (N_{y+} - N_{y-})$ ,  $N_{xy} = \frac{1}{2} (N_{xy+} - N_{xy-})$  为上下表板薄膜力差的一半,  $M_x = \frac{1}{2} (M_{x+} + M_{x-})$ ,  $M_y = \frac{1}{2} (M_{y+} + M_{y-})$ ,  $M_{xy} = \frac{1}{2} (M_{xy+} + M_{xy-})$  为上下表板弯矩和的一半,  $u = \frac{1}{2} (u_+ - u_-)$ ,  $v = \frac{1}{2} (v_+ - v_-)$ ,  $w = \frac{1}{2} (w_+ + w_-)$  为位移, 下标 + 与 - 分别表示属于上、下表板的量 (上表板是指  $z > 0$  方向的表板),  $\nu_f$ ,  $D_f$ ,  $E_f$  为表板的 Poisson 比、弯曲刚度和弹性模量。

夹心中各点的挠度  $W$  为

$$W = w - \left( 1 - \frac{4z^2}{h^2} \right) w', \quad (4)$$

其中  $w' = w - w_0$ ,  $w_0$  为夹心中面的挠度。将方程(1),(2),(3)合并并简化, 可得以  $u$ ,  $v$ ,  $w$ ,  $w'$  为参数的基本方程

$$\left. \begin{aligned} -G_c \left[ \frac{2u}{h} + \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial w'}{\partial x} \right] + \left( \frac{tE_f}{1-\nu_f^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + tG_f \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u + \\ + \left( \frac{tE_f \nu_f}{1-\nu_f^2} + tG_f \right) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{t^2 E_f}{2(1-\nu_f^2)} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \\ - \left( \frac{t^2 E_f \nu_f}{2(1-\nu_f^2)} + G_f t^2 \right) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = 0, \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned}
 & -G_c \left[ \frac{2v}{h} + \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{2}{3} \frac{\partial w'}{\partial y} \right] + \left( \frac{tE_f}{1-v_f^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + tG_f \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) v + \\
 & + \left( \frac{tE_f v_f}{1-v_f^2} + tG_f \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{t^2 E_f}{2(1-v_f^2)} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - \\
 & - \left( \frac{t^2 E_f v_f}{2(1-v_f^2)} + G_f t^2 \right) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} = 0, \\
 & G_c h \left[ \frac{2}{h} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \nabla^2 w - \frac{2}{3} \nabla^2 w' \right] + \frac{8E_c}{h} w' = 0, \\
 & D_f \nabla^4 w + \left( 1 + \frac{t}{h} \right) \frac{4E_c}{h} w' - \frac{q}{2} = 0.
 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

引进位移函数  $F$  及  $\varphi^{[10]}$ , 令

$$u = -\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad (6)$$

代入式(5)前两式, 可得

$$\left. \begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial x} \left[ G_c \left( \frac{2}{h} F - w + \frac{2}{3} w' \right) - \frac{tE_f}{1-v_f^2} \nabla^2 \left( F + \frac{t}{2} w \right) \right] - \\
 & - \frac{\partial}{\partial y} \left[ -\frac{2G_c}{h} \varphi + tG_f \nabla^2 \varphi \right] = 0, \\
 & \frac{\partial}{\partial y} \left[ G_c \left( \frac{2}{h} F - w + \frac{2}{3} w' \right) - \frac{tE_f}{1-v_f^2} \nabla^2 \left( F + \frac{t}{2} w \right) \right] + \\
 & + \frac{\partial}{\partial x} \left[ -\frac{2G_c}{h} \varphi + tG_f \nabla^2 \varphi \right] = 0.
 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

与文献[10]类似, 可得

$$G_c \left( \frac{2}{h} F - w + \frac{2}{3} w' \right) - \frac{tE_f}{1-v_f^2} \nabla^2 \left( F + \frac{t}{2} w \right) = 0, \quad (8)$$

$$\nabla^2 \varphi = \frac{2}{ht} \frac{G_c}{G_f} \varphi. \quad (9)$$

由式(8)解出  $w'$ , 代入方程(5)的后两式, 并注意到式(6), 可得

$$\left. \begin{aligned}
 & \left[ D_f + \left( \frac{1}{2} + \frac{t}{2h} \right) \frac{t^2 h E_f}{2(1-v_f^2)} \right] \nabla^4 w + \left( \frac{t}{2h} + \frac{1}{2} \right) \frac{t h E_f}{1-v_f^2} \nabla^4 F - \frac{q}{2} = 0, \\
 & \left[ -h \frac{tE_f}{1-v_f^2} \nabla^4 + \frac{12E_c}{hG_c} \frac{tE_f}{1-v_f^2} \nabla^2 - \frac{24E_c}{h^2} \right] F - \\
 & - \left[ h \frac{t^2 E_f}{2(1-v_f^2)} \nabla^4 - \frac{12E_c}{hG_c} \frac{t^2 E_f}{2(1-v_f^2)} \nabla^2 - \frac{12E_c}{h} \right] w = 0.
 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

引进函数  $\Phi$ , 使得

$$\left. \begin{aligned}
 & w = \left[ 1 - \frac{h}{2G_c} \frac{tE_f}{1-v_f^2} \nabla^2 + \frac{h^3 t E_f}{24E_c(1-v_f^2)} \nabla^4 \right] \Phi, \\
 & F = \left[ \frac{h}{2} + \frac{h}{2G_c} \frac{t^2 E_f}{2(1-v_f^2)} \nabla^2 - \frac{h^3 t^2 E_f}{48E_c(1-v_f^2)} \nabla^4 \right] \Phi,
 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

则方程(10)可化为

$$D_f \frac{h^3 t E_f}{12 E_c (1 - \nu_f^2)} \nabla^4 \Phi - D_f \frac{h}{G_c} \frac{t E_f}{1 - \nu_f^2} \nabla^2 \Phi + 2 \left[ D_f + \frac{t(t+h)^2 E_f}{4(1 - \nu_f^2)} \right] \nabla^4 \Phi - q = 0. \quad (12)$$

方程(12)的函数  $\Phi$ , 可由几个函数的组合求得:

$$\Phi = \left( 1 + \frac{1}{k^2} \nabla^2 \right) \Phi_0 + \Phi_1 + \Phi_2, \quad (13)$$

其中  $\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2$  分别满足下列方程:

$$D \nabla^4 \Phi_0 = q, \quad (14)$$

$$\nabla^2 \Phi_1 - k_1^2 \Phi_1 = q_1 q, \quad (15)$$

$$\nabla^2 \Phi_2 - k_2^2 \Phi_2 = q_2 q. \quad (16)$$

在以上各式中, 有

$$\left. \begin{aligned} k_1^2 &= \frac{A}{2} - \sqrt{\frac{A^2}{4} - B}, \quad k_2^2 = \frac{A}{2} + \sqrt{\frac{A^2}{4} - B}, \quad k^2 = \frac{2G_c(1 - \nu_f^2)}{thE_f} \left[ 1 + 3 \left( 1 + \frac{h}{t} \right)^2 \right], \\ q_1 &= \left[ \frac{1}{2} \frac{1 - \frac{1}{2} \frac{A^2}{B^2}}{\sqrt{\frac{A^2}{4} - B}} - \frac{A}{2B^2} \right] \frac{B}{D}, \quad q_2 = \left[ -\frac{1}{2} \frac{1 - \frac{1}{2} \frac{A^2}{B^2}}{\sqrt{\frac{A^2}{4} - B}} - \frac{A}{2B^2} \right] \frac{B}{D}, \\ A &= \frac{12E_c}{G_c h^2}, \quad B = \frac{24E_c(1 + \nu_f^2)}{h^3 t E_f} \left[ 1 + 3 \left( 1 + \frac{h}{t} \right)^2 \right], \quad D = 2D_f \left[ 1 + 3 \left( 1 + \frac{h}{t} \right)^2 \right]. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

这样我们就把夹层板的基本方程(5)转换为相当于一个单层板的弯曲方程(14)和三个弹性地基上的薄膜方程(15),(16)和(9)。挠度  $w$  和位移函数  $F$  可通过  $\Phi_0, \Phi_1$  和  $\Phi_2$  来表示:

$$\left. \begin{aligned} w &= \left[ 1 - 3 \left( 1 + \frac{h}{t} \right)^2 \frac{1}{k^2} \nabla^2 \right] \Phi_0 - 3 \left( 1 + \frac{h}{t} \right)^2 (\Phi_1 + \Phi_2), \\ F &= \left[ \frac{h}{2} + \frac{h + t \left[ 1 + 3 \left( 1 + \frac{h}{t} \right)^2 \right]}{2k^2} \nabla^2 \right] \Phi_0 + \frac{h + t \left[ 1 + 3 \left( 1 + \frac{h}{t} \right)^2 \right]}{2} (\Phi_1 + \Phi_2). \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

现在考虑简支边界条件。例如, 在边界上  $x = 0, a$  处, 边界条件为

$$w = 0, \quad w' = 0, \quad M_x = 0, \quad v = 0, \quad N_x = 0. \quad (19)$$

用代入法不难验证, 边界条件(19)可改写为

$$\Phi_0 = \nabla^2 \Phi_0 = 0, \quad \Phi_1 = \Phi_2 = 0. \quad (20)$$

## (二) 几个特殊情况

### 1. 忽略表板抗弯刚度和夹心的横向压缩性

这种情况相当于文献[3]类型的理论。在本问题中式(12)可简化为

$$\frac{t(t+h)^2 E_f}{4(1 - \nu_f^2)} \nabla^4 \Phi - \frac{q}{2} = 0, \quad (21)$$

简支边界条件为

$$\Phi = \nabla^2 \Phi = 0,$$

公式(11)化为

$$\omega = \left[ 1 - \frac{h}{2G_c} \frac{tE_f}{1-\nu_f^2} \nabla^2 \right] \Phi. \quad (22)$$

文献[10]已把 Reissner 理论对四边简支问题的解答化为

$$\omega = \left( 1 - \frac{D}{C} \nabla^2 \right) \omega, \quad (23)$$

其中  $C, D$  分别为 Reissner 理论中的剪切刚度和抗弯刚度,  $\omega$  满足下列方程:

$$D\nabla^4\omega = q,$$

在边界上  $\omega = \nabla^2\omega = 0$ .

比较公式(22)和(23), 不难看出, Reissner 公式为本文的一个特殊情况. 由此可在本文理论范围内求得 Reissner 公式的两个系数的计算值

$$D = \frac{tE_f(t+h)^2}{2(1-\nu_f^2)}, \quad C = G_c \frac{(t+h)^2}{h}. \quad (24)$$

在许多文献中刚度取法不一, 从本文看出,  $C, D$  取成式(24)是恰当的, 这与文献[12]中的表达式是一致的.

## 2. 忽略表板抗弯刚度

这种情况相当于文献[4]类型的线性理论. 在这种情况下, 式(12)可化为

$$\frac{t(t+h)^2 E_f}{2(1-\nu_f^2)} \nabla^4 \Phi = q. \quad (25)$$

由表板  $x$  向平衡和夹心的  $x$  向平衡可以看出,  $\sigma_x$  或广义位移  $w'$  可以由方程(5)解出, 挠度参数少了一个, 边界条件  $w = 0$  和  $w' = 0$  就不能得到严格保证. 我们在这里引进了折合位移的概念, 近似地认为剪力不做功, 这时有

$$w_+ Q_{x+} + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xz} W dz + w_- Q_{x-} = 0.$$

经某些变换以后, 简支边界条件为

$$\text{在 } x = 0, a \text{ 处, } \quad v = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad N_x = 0, \quad w - \frac{2w'}{3\left(1 + \frac{t}{h}\right)} = 0. \quad (26)$$

再经过一些变换并注意到式(8), 边界条件(26)可化为有关  $\Phi$  的边界条件:

$$\text{在 } x = 0, a \text{ 处, } \quad \Phi = 0, \quad \nabla^2 \Phi = 0, \quad w = \frac{hq}{12E_c \left(1 + \frac{t}{h}\right)^2}. \quad (27)$$

这个边界条件在文献[4]中没有提及(如果要写出的话, 与挠度有关的边界条件也应与上式类似).

挠度公式(11)化为

$$w = \left[ 1 - \frac{h}{2G_c} \frac{tE_f}{1-\nu_f^2} \nabla^2 \right] w_0 + \frac{hq}{12E_c \left(1 + \frac{t}{h}\right)^2}, \quad (28)$$

其中  $w_0$  是相应于抗弯刚度为  $D_0 = \frac{t(t+h)^2 E_f}{2(1-\nu_f^2)}$  的单层板的挠度.

### (三) 合成弯矩

夹层板的合成弯矩由表板的弯矩和表板内平行于板向的力构成的弯矩组成,由下式表出:

$$\left. \begin{aligned}
 M_x^* &= M_{x+} + M_{x-} + (t+h)N_x = - (t+h) \frac{tE_f}{(1-\nu_f^2)} \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right) - \\
 &\quad - \left( 2D_0 + \frac{t(t+h)^2 E_f}{2(1-\nu_f^2)} \right) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_f \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = \\
 &= -D \left( \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x^2} + \nu_f \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial y^2} \right) = (M_x)_0, \\
 M_y^* &= M_{y+} + M_{y-} + (t+h)N_y = (M_y)_0, \\
 M_{xy}^* &= M_{xy+} + M_{xy-} + (t+h)N_{xy} = (M_{xy})_0,
 \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

其中  $M_x^*$ ,  $M_y^*$ ,  $M_{xy}^*$  是合成弯矩,  $(M_x)_0$ ,  $(M_y)_0$ ,  $(M_{xy})_0$  是单层板的弯矩. 因此本问题的合成弯矩与相应的单层板中的弯矩相同.

## 二、四边简支矩形夹层板在均匀载荷作用下的变形

文献[11]和[13]曾经应用双重级数求得了四边简支夹层板挠度公式的解答,但是没有考虑夹心横向压缩性这一因素,所得公式比较繁,计算工作量较大,各个因素的作用也不易看清. 本节将从简化公式着手来考虑夹层板的挠度问题.

### (一) 忽略夹心的压缩性时的变形

考虑如图1所示的夹层板,板面上受均布载荷  $q$  的作用. 这时  $\Phi$  的解答为

$$\Phi = \left( 1 + \frac{1}{k^2} \nabla^2 \right) \Phi_0 + \Phi_1, \quad (30)$$

其中  $\Phi_0$ ,  $\Phi_1$  分别满足下列方程:

$$\left. \begin{aligned}
 D \nabla^4 \Phi_0 &= q, \\
 \Phi_0 &= \nabla^2 \Phi_0 = 0;
 \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

在边界上

$$\left. \begin{aligned}
 \nabla^2 \Phi_1 - k^2 \Phi_1 &= -\frac{q}{k^2 D}, \\
 \Phi_1 &= 0.
 \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

在边界上

方程(32)为一弹性地基上的薄膜问题,可采用与文献[14]类似的处理方法,也就是在考虑  $x=0$  边界附近的挠度时,把其它三条边推向无穷远. 这样,方程(32)就化为下列问题:

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{d^2}{dx^2} \Phi_1 - k^2 \Phi_1 &= -\frac{q}{k^2 D}, \\
 \text{在 } x=0 \text{ 处 } \quad \Phi_1 &= 0, \\
 \text{在 } x=\infty \text{ 处 } \quad \Phi_1 &\text{ 有限.}
 \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

方程(33)的解答为

$$\Phi_1 = \frac{q}{k^4 D} (1 - e^{-kx}). \quad (34)$$

式(34)表示的  $\Phi_1$  的近似程度是很好的, 当  $ka > 10$  时, 与精确解相比误差小于 1%.

这样, 式(18)第一式便化为

$$w = \left[ 1 - 3 \left( 1 + \frac{h}{t} \right)^2 \frac{1}{k^2} \nabla^2 \right] \Phi_0 - 3 \left( 1 + \frac{h}{t} \right)^2 \frac{q}{k^4 D} (1 - e^{-kx}). \quad (35)$$

上式中, 与  $e^{-kx}$  有关的最后一项是与边界效应有关的量, 它与 1 相比通常小得很多. 在考虑板中间部分挠度时, 可忽略此项. 因此式(35)可化为

$$w = \left[ 1 - 3 \left( 1 + \frac{h}{t} \right)^2 \frac{1}{k^2} \nabla^2 \right] \Phi_0 - 3 \left( 1 + \frac{h}{t} \right)^2 \frac{q}{k^4 D}. \quad (36)$$

于是, 求中点的挠度用式(36), 求边界附近的挠度则用式(35).

## (二) 一般情况下的变形公式

四边简支夹层板在一般情况下的基本方程和边界条件为式(14), (15), (16) 和 (20). 仿照上节的办法, 挠度的近似公式可表示为

$$w = \left[ 1 - 3 \left( 1 + \frac{h}{t} \right)^2 \frac{1}{k^2} \nabla^2 \right] \Phi_0 - 3 \left( 1 + \frac{h}{t} \right)^2 \left[ \frac{q_1}{k_1^2} e^{-k_1 x} + \frac{q_2}{k_2^2} e^{-k_2 x} + \frac{q}{D} \left( \frac{1}{k^4} - \frac{1}{B} \right) \right] \quad (37)$$

或

$$w = \left[ 1 - 3 \left( 1 + \frac{h}{t} \right)^2 \frac{1}{k^2} \nabla^2 \right] \Phi_0 + 3 \left( 1 + \frac{h}{t} \right)^2 \left( \frac{1}{B} - \frac{1}{k^4} \right) \frac{q}{D}. \quad (38)$$

求解边界附近的挠度用式(37), 计算中点附近的挠度则用式(38).

**例** 计算正方板中点的最大挠度. 由文献[15]可得

$$\nabla^2 \Phi_0 = - \frac{M_x + M_y}{D(1 + \nu)} = - \frac{0.0958}{D(1 + \nu)} qa^2, \quad (39)$$

$$\Phi_0 = 0.0443 \frac{qa^4}{Eh^3} = 0.00406 \frac{qa^4}{D}. \quad (40)$$

代入式(38), 可得四边简支正方形夹层板中点的挠度公式为

$$\frac{D}{qa^4} \times 10^3 w_{\max} = w_{\text{I}} + w_{\text{II}} + w_{\text{III}} + w_{\text{IV}}, \quad (41)$$

其中  $w_{\text{I}} = 4.06$  为整体抗弯刚度,  $w_{\text{II}} = 73.7 \times 3 \left( 1 + \frac{h}{t} \right)^2 \frac{A}{Ba^2}$  为由于夹心具有有限剪切刚度而产生的挠度,  $w_{\text{III}} = 3 \left( 1 + \frac{h}{t} \right)^2 \frac{1}{Ba^4} \times 10^3$  为考虑夹心的横向压缩性而产生的挠度,  $w_{\text{IV}} = 3 \left( 1 + \frac{h}{t} \right)^2 \left( \frac{A}{Ba^2} \right)^2 \times 10^3$  为考虑表板抗弯作用而产生的挠度,

$$\frac{A}{Ba^2} = \frac{thE_f}{2a^2G_c(1 - \nu_f^2)} \frac{1}{1 + 3 \left( 1 + \frac{h}{t} \right)^2}, \quad \frac{1}{Ba^4} = \frac{th^3E_f}{24E_c(1 - \nu_f^2)a^4} \frac{1}{1 + 3 \left( 1 + \frac{h}{t} \right)^2}$$

计算表明, 在参数值相当大的范围内, 考虑了表板抗弯刚度和横向夹心压缩性后产生的挠度附加项是可以忽略的, 通常误差小于 1%. 当表板相对于夹心的模量比较小时, 表板抗弯刚度和横向夹心压缩性这两个因素对挠度的作用虽然逐渐显著, 但在通常情况下所占的比重仍然很小, 可以忽略.

## (三) 内力表示式

## 1. 中心附近表板的弯矩

$$\begin{aligned}
 M_{x+} + M_{x-} &= -2D_f \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_f \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = \\
 &= \frac{1}{1 + 3 \left( 1 + \frac{h}{t} \right)^2} \left[ 1 - \frac{3 \left( 1 + \frac{h}{t} \right)^2}{k^2} \nabla^2 \right] (M_x)_0, \\
 M_{y+} + M_{y-} &= \frac{1}{1 + 3 \left( 1 + \frac{h}{t} \right)^2} \left[ 1 - \frac{3 \left( 1 + \frac{h}{t} \right)^2}{k^2} \nabla^2 \right] (M_y)_0, \\
 M_{xy+} + M_{xy-} &= \frac{1}{1 + 3 \left( 1 + \frac{h}{t} \right)^2} \left[ 1 - \frac{3 \left( 1 + \frac{h}{t} \right)^2}{k^2} \nabla^2 \right] (M_{xy})_0.
 \end{aligned} \tag{42}$$

## 2. 边缘附近的弯矩

$$\begin{aligned}
 M_{x+} + M_{x-} &= \frac{1}{1 + 3 \left( 1 + \frac{h}{t} \right)^2} \left[ 1 - 3 \left( 1 + \frac{h}{t} \right)^2 \frac{1}{k^2} \nabla^2 \right] (M_x)_0 + \\
 &+ 6D_f \left( 1 + \frac{h}{t} \right)^2 (q_1 e^{-k_1 x} + q_2 e^{-k_2 x}), \\
 M_{y+} + M_{y-} &= \frac{1}{3 \left( 1 + \frac{h}{t} \right)^2} \left[ 1 - \frac{3 \left( 1 + \frac{h}{t} \right)^2}{k^2} \nabla^2 \right] (M_y)_0 + \\
 &+ 6D_f \left( 1 + \frac{h}{t} \right)^2 \nu_f (q_1 e^{-k_1 x} + q_2 e^{-k_2 x}), \\
 M_{xy+} + M_{xy-} &= \frac{1}{1 + 3 \left( 1 + \frac{h}{t} \right)^2} \left[ 1 - \frac{3 \left( 1 + \frac{h}{t} \right)^2}{k^2} \nabla^2 \right] (M_{xy})_0.
 \end{aligned} \tag{43}$$

## 3. 角点附近的扭矩

$$\begin{aligned}
 M_{xy+} + M_{xy-} &= -2D_f (1 - \nu_f) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \\
 &= \frac{1}{1 + 3 \left( 1 + \frac{h}{t} \right)^2} \left[ 1 - 3 \left( 1 + \frac{h}{t} \right)^2 \frac{1}{k^2} \nabla^2 \right] (M_{xy})_0 - \\
 &- 6D_f (1 - \nu_f) \left( 1 + \frac{h}{t} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (I_1 + I_2), \\
 \frac{\partial^2 I_1}{\partial x \partial y} &= - \frac{q}{\pi D \sqrt{\frac{A^2}{4} - B}} [K_0(k_1 r) - K_0(k_2 r)],
 \end{aligned} \tag{44}$$



$$\frac{\partial^2 I_2}{\partial x \partial y} = -\frac{qA}{\pi DB} \frac{1}{\sqrt{\frac{A^2}{4} - B}} [k_1^2 K_0(k_1 r) - k_2^2 K_0(k_2 r)],$$

其中  $K$  和  $I$  为修正的 Bessel 函数。

### 三、四边简支矩形夹层板在集中载荷作用下的变形

在集中载荷作用的情况下计算作用点的挠度时,由于相应于单层板的剪切挠度项  $\nabla^2 \Phi_0$  趋于无穷,按文献[3]进行计算是不合理的。文献[11]和[13]是根据文献[6]类型的理论用重级数方法进行计算的,其中忽略了夹心的横向压缩性。本文则根据前面得到的简化方程求得了一个近似计算公式,并分析了夹心的横向压缩性对挠度的影响。

#### (一) 忽略横向夹心压缩性

考虑如图 2 所示的夹层板在集中力作用下的挠度。基本方程为

$$\left. \begin{array}{l} D \nabla^4 \Phi_0 = q, \\ \text{在边界上 } \Phi_0 = \nabla^2 \Phi_0 = 0; \end{array} \right\} \quad (45)$$

$$\left. \begin{array}{l} \nabla^2 \Phi_1 - k^2 \Phi_1 = -\frac{q}{Dk^2}, \\ \text{在边界上 } \Phi_1 = 0. \end{array} \right\} \quad (46)$$

挠度的公式为

$$\omega = \left[ 1 - 3 \left( 1 + \frac{h}{t} \right)^2 \frac{1}{k^2} \nabla^2 \right] \Phi_0 - 3 \left( 1 + \frac{h}{t} \right)^2 \Phi_1, \quad (47)$$

其中  $q$  是作用在以点  $D$  为中心,  $c$  为半径的小圆面积上的均布载荷,集中力  $P = q\pi c^2$ 。

式(45)为单层板受集中载荷作用时的方程。求解方程(46)仍仿照均布载荷情况的做法进行。

#### 1. 集中力作用在板中心附近

我们考虑把四个边界推向无穷远处的情形作为我们的近似解。式(46)的解为

$$\Phi_1 = \frac{P}{2D\pi k^2} K_0(kr), \quad (48)$$

其中  $K_0$  为零阶修正 Bessel 函数。

#### 2. 集中力作用在边界附近

可采用熟知的反映法求得

$$\Phi_1 = \frac{P}{2D\pi k^2} [K_0(kr_1) - K_0(kr_2)], \quad (49)$$

其中  $r_1$  和  $r_2$  如图 3 所示,分别为所求点  $A$  到作用点  $P$  和点  $A$  到点  $-P$  之间的距离。

#### 3. 集中力作用在角点附近

$$\Phi_1 = \frac{P}{2D\pi k^2} [K_0(kr_1) + K_0(kr_3) - K_0(kr_2) - K_0(kr_4)], \quad (50)$$

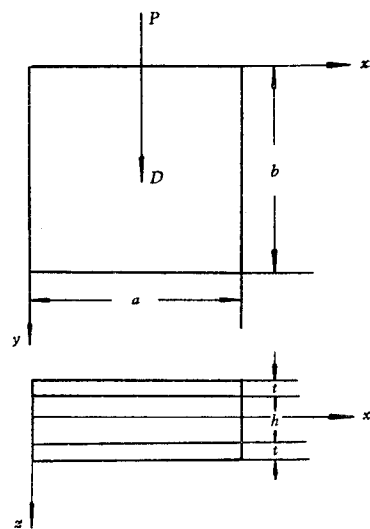


图 2

其中  $r_1, r_2, r_3$  和  $r_4$  如图 4 所示, 分别为所求点到各集中力作用点的距离。

现在求集中力作用在板中心区域的挠度近似公式。将式(48)代入式(47), 可得

$$w = \left[ 1 - 3 \left( 1 + \frac{h}{t} \right)^2 \frac{1}{k^2} \nabla^2 \right] \Phi_0 - 3 \left( 1 + \frac{h}{t} \right)^2 \frac{P}{2D\pi k^2} K_0(kr). \quad (51)$$

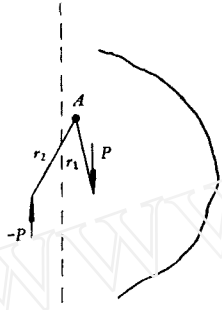


图 3

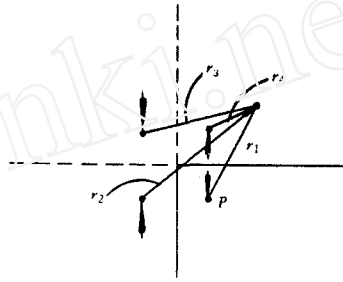


图 4

对于集中力作用点处的挠度, 还需把式(51)加以变换。利用文献[15]第五章的办法, 可将  $\nabla^2 \Phi_0$  展开, 再将  $K_0$  在  $r = 0$  处渐近展开, 可求得作用在矩形板对称轴上集中力附近的挠度近似公式为

$$w = \Phi_0 + 3 \left( 1 + \frac{h}{t} \right)^2 \frac{P}{2\pi D k^2} \left[ \ln \frac{ak}{\pi} \sin \frac{\pi d}{a} + \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2(1+\nu)} + \gamma \right], \quad (52)$$

其中  $d$  为作用点的  $x$  坐标, 常数  $\gamma_1, \gamma_2$  可由文献[15]的表 21 查得,  $\gamma = 0.577216$ 。式(52)与精确解相比, 在通常参数范围内误差小于 1%。

## (二) 一般情况

与上节类似, 可以求得对称轴上作用点附近的挠度近似公式为:

当  $\frac{A^2}{4} - B > 0$  时,

$$w = \Phi_0 + 3 \left( 1 + \frac{h}{t} \right)^2 \frac{P}{2\pi D k^2} \left[ \ln \frac{\sqrt[4]{Ba}}{\pi} \sin \frac{\pi d}{a} + \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2(1+\nu)} + \gamma + \frac{\frac{B}{A} - \frac{A}{2}}{4 \sqrt{\frac{A^2}{4} - B}} \ln \frac{k_2^2}{k_1^2} \right]; \quad (53)$$

当  $\frac{A^2}{4} - B < 0$  时,

$$w = \Phi_0 + 3 \left( 1 + \frac{h}{t} \right)^2 \frac{P}{2\pi D k^2} \left[ \ln \frac{\sqrt[4]{Ba}}{\pi} \sin \frac{\pi d}{a} + \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2(1+\nu)} + \gamma + \frac{\frac{B}{A} - \frac{A}{2}}{2 \sqrt{B - \frac{A^2}{4}}} \left( \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{\frac{A}{2}}{\sqrt{B - \frac{A^2}{4}}} \right) \right]. \quad (54)$$

集中力作用在边界附近时,也可应用式(49)和(50)类似地求得。

**例** 载荷作用在方板中心,求最大挠度。经无量纲化后,式(53)和(54)可以写成:

当  $\frac{A^2}{4} - B > 0$  时,

$$\left(\frac{\pi^4 D}{4 P a^2} w\right)_{\max} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(m^2 + n^2)^2} + 3 \left(1 + \frac{h}{t}\right)^2 \frac{\pi}{8 \left(\frac{ak}{\pi}\right)^2} \left[ \ln \frac{\sqrt[4]{Ba}}{\pi} + 0.412 + \frac{B - \frac{A}{2}}{4 \sqrt{\frac{A^2}{4} - B}} \ln \frac{\frac{B}{2} - \frac{A}{4}}{\frac{A}{4}} \right] \quad (55)$$

当  $\frac{A^2}{4} - B < 0$  时,

$$\left(\frac{\pi^4 D}{4 P a^2} w\right)_{\max} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(m^2 + n^2)^2} + 3 \left(1 + \frac{h}{t}\right)^2 \frac{\pi}{8 \left(\frac{ak}{\pi}\right)^2} \left[ \ln \frac{\sqrt[4]{Ba}}{\pi} + 0.412 + \frac{B - \frac{A}{2}}{4 \sqrt{B - \frac{A^2}{4}}} \left( \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{\sqrt{B - \frac{A^2}{4}}} \right) \right] \quad (56)$$

计算结果见下表:

$h/t = 10$					$h/t = 20$				
$\left(\frac{ak}{\pi}\right)^2$	$\frac{\pi^4 D}{4 P a^2} w$				$\left(\frac{ak}{\pi}\right)^2$	$\frac{\pi^4 D}{4 P a^2} w$			
	忽略夹心的压缩性	考虑夹心的压缩性				忽略夹心的压缩性	考虑夹心的压缩性		
		$\frac{Aa^2}{\pi^2} = 10$	$\frac{Aa^2}{\pi^2} = 5 \times 10^3$	$\frac{Aa^2}{\pi^2} = 10^5$			$\frac{Aa^2}{\pi^2} = 10$	$\frac{Aa^2}{\pi^2} = 5 \times 10^3$	$\frac{Aa^2}{\pi^2} = 10^5$
60	6.126	6.603	6.235	6.187	60	21.57	23.31	21.97	21.80
80	4.922	5.404	5.037	4.982	80	17.19	18.95	17.61	17.41
100	4.140	4.584	4.266	4.214	100	14.33	15.95	14.79	14.60
500	1.287	1.597	1.372	1.336	500	3.940	5.071	4.253	4.119
1000	0.8338	1.058	0.9075	0.8769	1000	2.292	3.109	2.560	2.449
2000	0.5827	0.7574	0.6435	0.6196	2000	1.354	2.015	1.599	1.512

表中

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{ak}{\pi}\right)^2 &= \frac{2(1 - \nu_f^2)}{\pi^2} \frac{G_c}{E_f} \left(\frac{a}{t}\right) \left(\frac{a}{h}\right) \left[ 1 + 3 \left(1 + \frac{h}{t}\right)^2 \right], \\ \frac{Aa^2}{\pi^2} &= \frac{12 E_c}{\pi^2} \left(\frac{a}{h}\right)^2. \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

由以上计算结果可以看出:

1) 在几何尺寸不变的情况下,如果  $G_c/E_f$ ,  $G_c/E_c$  增大,挠度值将逐渐减小,并且前

者增大时挠度减小更为显著。在模量和  $a/h$  不变的情况下, 挠度值随着  $h/t$  的增大而增大。

2) 忽略夹心的横向压缩性对挠度的影响随着  $(ak/\pi)^2$  的增大而增大, 随着  $Aa^2/\pi^2$  的增大而减小, 随着  $h/t$  的增大而增大。当  $Aa^2/\pi^2 = 10$  时, 在表中的参数范围内, 两者的误差较小, 而当  $Aa^2/\pi^2 = 10^3$  时, 误差就大大增加, 在表中参数范围内最大误差超过 30%。因此, 在进行集中载荷计算时, 夹心的横向压缩性通常并不是可以忽略的, 在实际应用时, 对于受集中载荷的板件, 可能要有局部的加强, 但是本文定性的结论仍是适用的。

#### 四、几点结论

1. 杜庆华-Прусаков 各向同性线性理论的基本方程可简化为一个单层板的方程和三个弹性地基上的薄膜方程。

2. 杜庆华-Прусаков 各向同性线性理论与 Hoff 类型理论相差一个弹性地基上的薄膜方程, 与 Reissner 类型理论相差两个弹性地基上的薄膜方程。

3. 对于四边简支、受均匀载荷方板的最大挠度, 求得了一个简单实用的分析表达式 (41), 由此可以清楚地看出夹层板各个因素的作用。可以看出, 在这种情况下, 按 Reissner 理论进行计算即可。在集中载荷的情况下, 按 Hoff 理论进行计算是不够的, 本文给出了一个实用而可靠的近似计算公式。

4. 本文给出了 1948 年 Reissner 理论中有关挠度边界条件的正确提法和讨论了 1947 年 Reissner 理论中的抗弯刚度和剪切刚度的算式。

本文是在胡海昌同志的指导下完成的, 谨此致谢。

#### 参 考 文 献

- [1] Куршин, Л. М., Обзор работ по расчету трехслойных пластин и оболочек, "Расчет пространственных конструкций VII", Госстройиздат, Москва, 1962.
- [2] Александров, А. Я., Брюккер, Л. Э., Куршин, Л. М., Прусаков, А. П., "Расчет трехслойных панелей", Оборонгиз, Москва, 1960.
- [3] Reissner, E., On bending of elastic plates, *Quart. Appl. Math.*, 5, 1947.
- [4] Reissner, E., Finite deflections of sandwich plates, *JAS* 15, 7, 1948.
- [5] Libove, C., Batdorf, S., A general small deflection theory for flat sandwich plates, NACA Rep. 899, 1948.
- [6] Hoff, N. J., Bending and buckling of rectangular sandwich plates, NACA TN 2225, 1950.
- [7] 杜庆华, 三合板的一般弹性理论, 物理学报, 10, 4, 1954.
- [8] Прусаков, А. П., Основные уравнения изгиба и устойчивость трехслойных пластин с легким наполнителем, *ПММ*, 15, 1, 1951.
- [9] Мушгари, Х. М., О применимости различных теорий трехслойных пластин и оболочек, *Изв. АН СССР, ОТН, Мех. и Мат.*, 6, 1960.
- [10] 胡海昌, 各向同性夹层板反对称小挠度的若干问题, 力学学报, 6, 1, 1963.
- [11] Плеханов, В. М., Поперечный изгиб и устойчивость трехслойных пластин, "Прочность авиационных конструкций" МАИ, Оборонгиз, Москва, 1960.
- [12] Seide, P. A., Comment on "bending and buckling of clamped sandwich plates", *JAS*, 24, 10, 1957.
- [13] Yen, K. T., Gunturkin, S., Pohles, F., Deflections of a simply supported rectangular sandwich plate subjected to transverse loads, NACA TN 2581, 1951.
- [14] 胡海昌, 四边简支矩形底球面扁壳楼盖的简化计算方法, 力学学报, 5, 1, 1962.
- [15] Timoshenko, 板与壳学, 商务印书馆, 上海, 1954 (王俊奎译).

## ПРЕОБРАЗОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ТРЕХСЛОЙНЫХ ПЛАСТИНОК И ДЕФОРМАЦИЯ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ШАРНИРНО ОПЕРТОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНКИ

Лю Чунь-ту

(Институт механики АиТ Китая)

Исходя из линейной теории Ду Цзинь-хуа-Прусакова изотропной трехслойной пластинки, используя некоторые преобразования можно превратить основные уравнения в одно уравнение однослойной пластинки и три мембранных уравнения на упругой основе. Отмечено, что главная разница между линейной теорией Ду Цзинь-хуа-Прусакова изотропной пластинки и теорий Хоффа и Рейсснера состоит в применении одного или двух мембранных уравнений на упругой основе. Были выведены приближенные формулы прогибов прямоугольной шарнирно опертой трехслойной пластинки при действии поперечной равномерно распределенной и сосредоточенной нагрузок. Предыдущие теории рассмотрены и сопоставлены. Кроме того, было выдвинуто граничное условие прогиба, которое может быть применено в теории, подобной линейной теории Рейсснера в 1948 году.