

超高速钝体湍流传热问题* 1)

呼和敖德 牛家玉

(中国科学院力学研究所)

摘 要

本文针对沿钝体表面的湍流热交换率作了理论分析和计算. 本文采用了 Mager-Степанов-Mangler 联合转换式把可压缩轴对称边界层问题转化为不可压缩平面问题, 并根据超高速顺压力梯度湍流边界层的特点, 在动量积分方程中引用经典的单参数的摩擦阻力律和型参数, 然后按 Eckert 参考焓针对气体性质的误差作了修正. 最后, 根据近似 Reynolds 比拟关系求得热交换率. 计算结果与实验结果是符合的.

一、引 言

在超高速飞行的情况下, 沿飞行器绝大部分表面上的边界层处于湍流状态, 这将使飞行器表面上的传热率要比处于层流状态下的增加数倍. 因此, 在设计工作中, 准确估计顺压力梯度情况下的湍流热交换率是很重要的.

在最近发表的文献中, 已有许多人, 例如 Spence^[1], Roshotko 和 Tucker^[2] 等人对超声速领域内的上述问题进行了研究. Roshotko 和 Tucker 通过解联立动量和动量矩积分方程, 细致地研究了型参数的变化对结果的影响, 并按 Eckert^[3] 的参考焓修正了由于对气体性质的近似处理而带来的误差. 这种方法虽然比较合理, 但计算工作量太大. 在超声速领域内, Vaglio-Laurin^[4], Libby 和 Cresci^[5,6], Rose, Probstein 和 Adams^[7] 等对沿钝体的边界层作了研究. 在这些研究中, 中心问题是选取一组合理的假设, 如摩擦阻力与根据当地动量边界层厚度所定义的 Reynolds 数之间的关系, 选取驻点或边界层外缘作为修正气体性质误差的参考条件, 选取型参数为常数, 等等. 此外, 还有一种平板参考焓的近似方法^[5]. 这种方法的理论基础是, 在高冷却的条件下, 压力梯度对边界层的影响是可以忽略的.

分析文献[4—7]的各种方法后, 我们发现, 这些方法所得的结果反不如简单的平板参考焓方法得到的结果. 出现这种现象的原因, 是这些作者对一些因素的处理不很合理: 1) 在可压缩边界层的情况下, 把动量积分方程中的型参数取为常数. 在不可压缩、顺压力梯度的问题中, 由于型参数一般变化不大, 因而把它看作是某一适当的常数, 这是一个比较好的近似. 但是, 在可压缩的问题中情况就不是这样了. 例如, 平板可压缩边界层的型参数 δ^*/θ (δ^* 和 θ 分别代表边界层位移厚度和动量厚度) 与不可压缩边界层的型参数 J_i 之间近似地存在着以下关系: $\delta^*/\theta = (T_w/T_e) J_i + (T_r/T_e) - 1$ (T_w , T_e 和 T_r 分别代表表面温度, 边界层外缘温度和恢复温度). 由此可见, 即使不可压缩、顺压力梯度的边界

* 1964年1月9日收到.

1) 本文初稿曾在1963年10月中国力学学会流体力学学术讨论会上宣读.

层型参数 J_i 近似等于常数, 表面温度比和当地 M 数的变化也将使型参数不能保持为常数. 因此, 我们认为, 为了提高计算的准确度, 型参数的变化就应该加以考虑. 2) 选用驻点或边界层外缘作为修正气体性质误差的参考条件. 应当指出, 驻点条件只适用于钝体头部 $M < 1$ 的区域. 但是, 在大部分湍流区域中, M 数可以从 0.3 增加到 3, 因而边界层内温度的变化是很大的. 在这种情况下, 选用驻点作为参考条件就不再适用了. 同样, 选用边界层外缘作为参考条件也不很适合, 因为在高速的情况下, 表面和边界层外缘的温度差往往很大, 这时外缘上的温度自然就不能作为边界层内温度的表征.

在超高速飞行的情况下, 由于强冲击波的出现, 飞行器头部边界层外缘的 M 数比较小, 经过强烈膨胀后, 下游 M 数的大小也只不过是 3, 4 左右. 这种边界层的一般特点是边界层被顺压力梯度所控制, 而且表面与边界层外缘的温度差很大. 根据实验结果^[7,8], 在

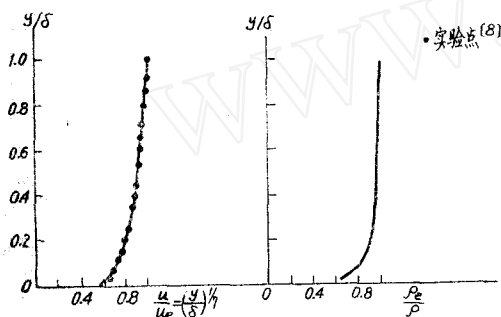


图1 高冷却湍流边界层速度、密度分布曲线

超高速、高冷却的情况下, 边界层的平均速度分布和低速边界层的速度分布一样 (图1), 也可以用幂函数形式来表示. 这说明了脉动混合机理并没有由于速度的增加而改变. 同时, 根据低速边界层的结果, 顺压力梯度对边界层内速度分布规律的影响并不大. 在这种情况下, 通过 Howarth-Dorodnitsyn 转换式, 从运动方程可以清楚看到, 压力梯度的确是可以忽略的, 因为在高冷却的情况下, 压力梯度项的因子

$[\rho_e/\rho - (u/u_e)^2]$ 确实是很小的 (图1).

根据上面的讨论, 我们采用 Mager^[9]-Степанов-Mangler 联合转换式把轴对称边界层方程转换为平面、不可压缩边界层问题. 这样, 我们就可以利用具有充分实验根据的半经验的关系, 从而避开了前人的一些不合理的假设. 为了提高精确度, 我们用 Eckert 的经验的关系, 后来由 Burggraf^[10] 等从理论上验证了的参考焓来修正转换中引进的误差. Burggraf 等指出, Eckert 的参考焓相应于湍流边界层的层流次层和湍流层交界面上的焓值.

为了简化计算起见, 在求得阻力后, 对传热问题我们采用了 Reynolds 比拟关系. 当然, 我们也可以直接对能量方程求解, 但是, 根据 Rubesin^[11] 和 Sibulkin^[12] 的工作, 这种作法并不能提高精确度, 反而增加了计算的复杂性, 这在当前是没有必要的. 我们得到的结果和已发表的一些实验数据^[6,12] 是一致的. 和其它方法比较, 我们的结果不仅更接近于实验的结果, 而且计算工作量也并不太大. 这就证明了, 单参数方法和 Eckert 参考焓方法对处理可压缩湍流边界层都是适用的.

二、处理问题的方法

基本方程的转换 在轴对称的情况下, 高速湍流边界层的运动方程是:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \rho u r}{\partial x} + \frac{\partial r(\rho v + \overline{\rho'v'})}{\partial y} &= 0, \\ \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + (\rho v + \overline{\rho'v'}) \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{dp}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left(u \frac{\partial u}{\partial y} - \overline{\rho v' u'} \right), \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

这里 x, y 是分别与物面平行和垂直的正交曲面坐标; u, v 分别是 x, y 方向的平均速度分量; ρ, p 分别是平均密度和压力; $\overline{\rho'v'}$ 是扰动密度和 y 方向扰动速度的关联; $-\rho\overline{v'u'}$, $r(x)$ 分别是 Reynolds 应力和物面到对称轴的距离(图 2).

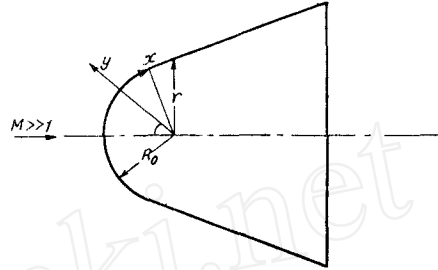


图 2

引言中已提到, 可压缩性对湍流边界层的影响只是使边界层变得更厚(阻力降低)。另一方面, 在顺压力梯度的作用下, 边界层的阻力又会比平板边界层的阻力高。因此, 在顺压力梯度的情况下, 沿钝体的高速边界层应当具有平板边界层的特点。从这一点出发, 钝体头部的边界层也可以转换为不可压缩的湍流问题, 并且为了利用大量的平板问题的资料, 进一步还可以把它转换为平面问题。

我们利用 Mager-Степанов-Mangler 联合转换式

$$\left. \begin{aligned} X &= \int_0^x \left(\frac{r}{R_0}\right)^2 FG dx, \\ Y &= \left(\frac{r}{R_0}\right) F \int_0^y \frac{\rho}{\rho_0} dy, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

其中 X, Y 代表转换后的坐标, $F = a_e/a_0$, $G = (\rho\mu)^*/(\rho\mu)_0$, μ 代表气体的粘性系数, R_0 是头部半径, 下标 0, e 和上标 * 分别代表驻点, 边界层外缘和参考条件。为了得到简单的动量积分方程, 我们引进以下近似假定: 1) 假定 $\rho\mu = (\rho\mu)^*$, 而 $(\rho\mu)^*$ 仅是坐标 x 的函数。由于在超高速边界层中, $\rho\mu$ 随 y 的变化是足够大的, 这种假定一般是很差的; 因此, 为了改进精确度, 我们必须适当地选择 $(\rho\mu)^*$ 的值。2) 假定转换前后的 Reynolds 应力之间满足关系 $-\rho\overline{v'u'} = F^2 G \frac{r}{R_0} (-\rho_0 \overline{V'U'})$ 。经过转换后得¹⁾

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} &= 0, \\ U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} &= U_e \frac{\partial U_e}{\partial X} \frac{H}{H_e} + \frac{\partial}{\partial Y} \left[\mu_0 \frac{\partial U}{\partial Y} - \overline{V'U'} \right], \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

其中 U, V 分别是转换后的坐标 X, Y 方向的速度, H 是总焓。

应当注意, 转换后的动量方程的压力梯度项增加了一个焓比因子 H/H_e 。严格地讲, 由于 H 的出现, 这组方程还是有别于不可压缩的问题的, 并且动量和能量方程仍然是联系在一起。作为第一次近似, 我们可以适当地选取 H 。根据定义, 焓比在边界层内从表面上的 h_w/H_e 增长到边界层外缘的 1 (下标 w 代表表面条件); 如果 $h_w/H_e < 1$, 那么, 在边界层内焓比 H/H_e 是小于 1 的。从实验的结果看, 温度和速度一般在很小的范围内就从表面上的数值上升到最大值, 而且表面温度越是低, 这种上升的速率就越高。因此, 在边界层的绝大部分范围内, H/H_e 是接近于 1 的, 因而我们可以定性地讲, 焓比对速度分布的影响是不大的。根据引言中提到的顺压力梯度对速度分布的影响, 我们可以近似地用

1) 详细过程见附录。

平板的速度分布的形式来表示速度分布;因此, H 也就可以同样选取平板的结果. 在平板的情况下, 当 $P_r \approx 1$ 时, 焓 h 和速度 u 的近似关系是^[3]

$$h = h_w + (h_r - h_w) \frac{u}{u_c} - (h_r - h_c) \left(\frac{u}{u_c} \right)^2.$$

通过上述假定 1) 和 2), 动量积分方程具有以下二維形式:

$$\frac{d\Theta}{dX} = \frac{\Theta}{U_c} \frac{dU_c}{dX} \left[2 + J_i + \left(\frac{h_w}{H_c} - 1 \right) J_{ifp} \right] = \frac{\tau_{wi}}{\rho_0 U_c^2}, \quad (4)$$

其中 Θ 为轉換后的动量厚度:

$$\Theta = \int_0^\Delta \frac{U}{U_c} \left(1 - \frac{U}{U_c} \right) dY,$$

J_i 为轉換后的型参数:

$$J_i = \int_0^\Delta \left(1 - \frac{U}{U_c} \right) dY / \int_0^\Delta \frac{U}{U_c} \left(1 - \frac{U}{U_c} \right) dY,$$

Δ 代表轉換后的边界层厚度, 下标 r 代表表面的恢复条件. 如果近似地用 $(Y/\Delta)^n$ 来描写速度分布, 那么, $J_{ifp} = 1 + 2n$, 一般取 $n = 1/7$. 当 Reynolds 数不大时, 这种选择还是很合理的.

表面摩擦阻力 为了对方程 (4) 求解, 必须先选择阻力律. 在很早 Buri^[4], 后来 Лойцянский 等给出了以单参数表示的阻力公式:

$$\frac{\tau_{wi}}{\rho_0 U_c^2} = f_1(\Gamma) \left(\frac{\Theta U_c}{\nu_0} \right)^{-\frac{1}{N}}, \quad (5)$$

其中单参数

$$\Gamma = \frac{\Theta}{U_c} \frac{dU_c}{dX} \left(\frac{\Theta U_c}{\nu_0} \right)^{\frac{1}{N}}, \quad (6)$$

τ 是表面摩擦阻力, ν 是气体的动粘性系数, N 是指数阻力律的指数, $f_1(\Gamma)$ 是单参数 Γ 的函数. 对平板边界层, $f_1(\Gamma)$ 是常数; 对順压力梯度的边界层, $f_1(\Gamma)$ 的变化比較小; 但在逆压力梯度的情况下, 它的变化很大. 在低速实验中, 这些事实已被証实; 因此, 在我们的分析中也采用了上述阻力公式.

动量积分方程的积分 根据低速湍流边界层的实验数据, 速度分布与压力梯度的关系可以通过 $U/U_c = f(Y/\Delta, J_i)$ 来表示, 而根据定义又有

$$J_i = f_2(\Gamma). \quad (7)$$

把式 (5) 和 (7) 代入方程 (4), 并在两边乘以因子 $(\Theta U_c / \nu_0)$, 整理后得到

$$\frac{d}{dX} \left[\Theta \left(\frac{\Theta U_c}{\nu_0} \right)^{\frac{1}{N}} \right] = \frac{N+1}{N} f_1(\Gamma) - \left[2 + \frac{1}{N} + \frac{1+N}{N} f_2(\Gamma) + D \right] \Gamma, \quad (8)$$

其中 $D = \frac{N+1}{N} \left(\frac{h_w}{H_c} - 1 \right) J_{ifp}$.

在低速的情况下, 通过对大量实验数据的分析, 发现方程 (8) 右边各项在不同压力分布下是 Γ 的綫性函数, 即

$$\frac{1+N}{N} f_1(\Gamma) - \left[2 + \frac{1}{N} + \frac{1+N}{N} f_2(\Gamma) + D \right] \Gamma = a - d\Gamma, \quad (9)$$

其中 a 和 d 均为常数。当然, 在高速高温问题中还有温度效应 D , 但是当 $h_w/H_c \ll 1$ 时, D 的影响是可以忽略的。我们通过为数不多的实验确定了线性函数的两个系数 $a=0.016$, $d=3.5+2.5\left(\frac{h_w}{H_c}-1\right)$ 。把式(9)代入式(8), 根据 $\tilde{s}=0$ 时 $Re_\theta=0$ 的条件 ($\tilde{s}=x/R_0$, $Re_\theta=U_c\Theta/v_0$), 积分后得到:

$$\Theta^{-\frac{1}{N}} = \left(\frac{U_c}{v_0}\right)^{\frac{1}{N(N+1)}} U_c^{\frac{d}{N+1}} \left[a \int_0^x U_c^d dX \right]^{-\frac{1}{N+1}}$$

或

$$\Theta^{-\frac{1}{N}} = F^{-\frac{(1+Nd)}{N(N+1)}} \left(\frac{u_c}{v_0}\right)^{\frac{1}{N(N+1)}} u_c^{\frac{d}{N+1}} \left[a \int_0^x F^{1-d} G \left(\frac{r}{R_0}\right)^2 u_c^d dx \right]^{-\frac{1}{N+1}} \quad (10)$$

三、摩擦阻力系数

根据边界层受顺压力梯度控制时公式(6)中的系数 $f_1(\Gamma^*)$ 随顺压力梯度的变化很小, 可以近似地取 $f_1(\Gamma) = 0.013$ 。于是由公式(6)得

$$C_{fi}/2 = 0.013(Re_\theta)^{-\frac{1}{N}} \quad (11)$$

把式(10)代入式(11), 得到

$$C_{fi}/2 = A(Re_x)^{-\frac{1}{N+1}} (v_c/v_0)^{\frac{1}{N+1}} G^{-\frac{1}{N+1}} (r/R_0)^{-\frac{2}{N+1}} [g(\tilde{s})]^{\frac{1}{N+1}}, \quad (12)$$

其中

$$g(\tilde{s}) = F^{1-d} G \left(\frac{r}{R_0}\right)^2 \tilde{u}_c^d \tilde{s} / \int_0^{\tilde{s}} F^{1-d} G \left(\frac{r}{R_0}\right)^2 \tilde{u}_c^d d\tilde{s}, \quad (13)$$

$C_{fi} = \tau_{wi}/\rho_0 U_c^2$, $\tilde{u}_c = u_c/\sqrt{H_c}$ 。根据转换关系(2)和前述假定 $\rho\mu = (\rho\mu)^*$, 得到转换前后摩擦阻力的关系

$$\tau_w = \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y}\right)_w = F^2 G \frac{r}{R_0} \tau_{wi},$$

所以

$$C_f = (\rho^*/\rho_c)(\mu^*/\mu_c)(r/R_0) C_{fi}. \quad (14)$$

把式(12)代入式(14), 当地摩擦阻力系数具有如下形式:

$$C_f = \left(\frac{\rho^*}{\rho_c}\right)^{\frac{N}{N+1}} \left(\frac{\mu^*}{\mu_c}\right)^{\frac{1}{N+1}} \left(\frac{\mu^*}{\mu_0}\right)^{\frac{N-1}{N+1}} \left(\frac{r}{R_0}\right)^{\frac{N-1}{N+1}} [g(\tilde{s})]^{\frac{1}{N+1}} C_{f0}, \quad (15)$$

其中 $C_{f0} = A(Re_x)^{-\frac{1}{N+1}}$, $Re_x = u_c x/v_c$, $A = 0.0296$ 。

在式(15)中, 因子 $(\rho^*/\rho_c)^{\frac{N}{N+1}} (\mu^*/\mu_c)^{\frac{1}{N+1}} (\mu^*/\mu_0)^{\frac{N-1}{N+1}}$ 反映了对气体性质误差的修正, 压力梯度的影响则主要包括在 $g(\tilde{s})$ 中。对平板问题 $g(\tilde{s}) = 1$ 。为了改进由于转换而引入的误差, 根据前人的经验, 我们认为在具有压力梯度的情况下, 作为参考量, Eckert 的参考焓也是合理的。

式(15)中的粘性系数可按下面的 Sutherland 粘性-温度关系确定:

$$\mu/\mu^* = (T/T^*)^{3/2} \frac{T^* + 122}{T + 122}, \quad (16)$$

其中的 T^* 根据 Eckert 的参考焓

$$h^* = 0.5(h_w + h_c) + 0.22(h_r - h_c) \quad (17)$$

来确定。

四、热交换率

最后,为了计算热交换率,我们采用 Reynolds 比拟关系来代替能量方程。根据许多人的研究,这种方法是足够精确的。我们知道,在平板的情况下,当 $Pr = 1$ 时,动量和热交换率之间存在着一个严格的比拟关系 $St = C_f/2$, St 是热交换率系数。但是,在 $Pr \neq 1$ 并且 $\frac{dP}{dx} \neq 0$ 时,这种比拟关系是不严格的, St 与 C_f 的比例必然随气体性质(例如 Pr 数)的变化而变化。Rubesin^[11] 根据实验提出了适用于平板的 Reynolds 比拟关系 $St = C_f/2S$, 其中比拟因子近似地表示为 $S = Pr^{2/3}$ 。压力梯度的影响究竟如何反映,在这里是很不清楚的。但在顺压力梯度的情况下, Sibulkin^[12] 的研究结果表明,这种影响只有百分之几。此外,可压缩性和表面焓比对 Reynolds 比拟关系的影响也有人研究过,例如 Rubesin^[11] 和 Lobb^[8] 根据实验结果证实了这两种影响也是很小的。因此,我们采用修正的 Reynolds 比拟关系

$$St = \frac{1}{S} \frac{C_f}{2}. \quad (18)$$

根据 St 数的定义, $St = -q_w/\rho_c u_c (h_r - h_w)$ 。利用式(18),热流 q_w 可表示为

$$q_w = Pr^{-2/3} (h_r - h_w) \rho_c u_c C_f / 2. \quad (19)$$

根据热交换率系数 Nu 数的定义,

$$Nu = q_w (C_p)_0 R_0 / k_0 (H_c - h_w), \quad (20)$$

其中 C_p 为定压比热, k 为热传导系数。把式(19)代入式(20),得到用 Nu 数表示的热交换率公式

$$\frac{Nu}{\tilde{Re}_0^{4/5}} = Pr^{1/3} K \tilde{\rho}_c \tilde{u}_c \tilde{Re}_0^{1/5} \varphi_0^{-2/5} C_f / 2, \quad (21)$$

其中取 $Pr = 0.71$, $\tilde{\rho}_c = \rho_c/\rho_0$, $Re_0 = R_0 \sqrt{H_c}/v_0$, $\varphi_0 = P_0/\rho_0 H_c = \frac{\gamma-1}{\gamma}$; γ 为比热比, $\tilde{Re}_0 = Re_0 \varphi_0^{1/2}$, $K = (h_r - h_w)/(H_c - h_w)$ 。最后把式(16)代入式(21),得到热交换率的表达式

$$\frac{Nu}{\tilde{Re}_0^{4/5}} = \frac{0.0296 Pr^{1/3} K}{\varphi_0^{2/5}} \left(\frac{\tilde{u}_c \tilde{s}}{\tilde{v}_c} \right)^{4/5} \frac{(r/R_0)^{3/5}}{\tilde{s}} \left(\frac{\rho^*}{\rho_c} \right)^{4/5} \left(\frac{\mu_c}{\mu^*} \right)^{4/5} \left(\frac{\mu^*}{\mu_0} \right)^{8/5} [g(\tilde{s})]^{1/5}, \quad (22)$$

其中 $\tilde{v}_c = \nu_c/v_0$ 是动粘性系数比。公式(22)是利用指数阻力律得到的,因此,它适用于一般 Re 数的情况。

五、计算结果

为了验证公式(22),利用两组实验来进行比较。一组是利用外罩技术在风洞中对半

球錐体进行实验^[6]。实验結果以及从公式(22)給出的結果表示在图 3 上。另一組是利用射流对球形模型进行实验^[12]。实验結果以及从公式(22)計算的結果表示在图 4 上。为了便于和平板参考焓方法比較,公式(22)中包括的压力梯度和空間效应的因子 $[g(\xi)]^{1/5}$ 表示在图 5 上。

上述計算和实验的比較結果表明,在湍流完全发展了的錐部上,理論計算和实验很符合。在过渡区域,計算結果与实验数据的比值必然偏高。在图 3 和 4 上同时給出了其他理論計算曲綫。Cresci 的方法是取可压缩边界层型参数为 -1,并用边界层外緣条件作为参考,他得到的結果在錐部比实验值約低 20%。但是平板参考焓法得到的結果却比較与实验結果符合。我們的分析也証明了这一点。

六、結 論

上述分析說明了以下几点:

1) 本文的方法适合于計算中等 M 数和一般 Re 数的超高速鈍体湍流传热交換率。

2) 利用动量积分方法求解超高速鈍体湍流传热率时,应该考虑 M 数、焓比和压力梯度对型参数的影响,这时型参数的变化一般是不能忽略的。

3) 在轉換过程中引入的誤差,按 Eckert 参考焓的修正要比其它参考条件更合理,并且也符合实验結果。

4) 图 5 中的計算結果表明,反映压力梯度和空間效应的因子 $[g(\xi)]^{1/5}$,在半球錐体的錐部上趋于 1。这說明錐部上压力梯度和空間效应都变得很小,因此,証明了平板参考焓法的确可以用来計算鈍体后部的湍流传热問題。图 3 和 4 中的計算結果已經說明了这一点。

本文是在郭永怀同志的指导下完成的,謹在这里表示衷心的感谢。

附录: 可压缩湍流边界层的轉換

Mager-Степанов-Mangler 联合轉換式 为了把可压缩軸对称边界层方程轉換为

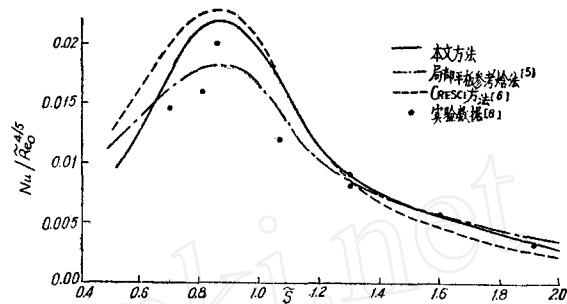


图 3 热交換率分布曲綫

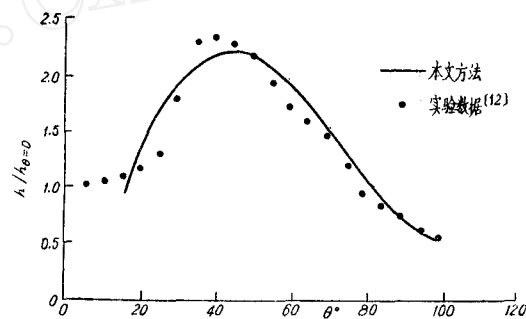


图 4 热交換率分布曲綫

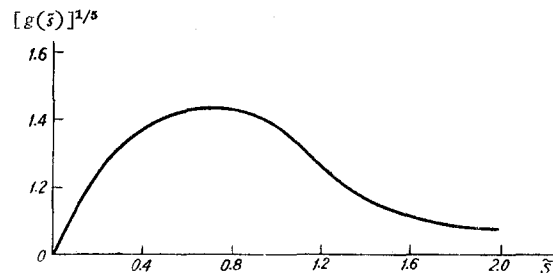


图 5 据根文献[6]的模型算出的 $[g(\xi)]^{1/5}$ 曲綫

不可压缩平面问题,我们采用了 Mager^[9]-Степанов-Mangler 联合转换式

$$\left. \begin{aligned} X &= \int_0^x FG(r/R_0)^2 dx, \\ Y &= F(r/R_0) \int_0^y \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right) dy, \end{aligned} \right\} \quad (\text{A-1})$$

其中 $F = a_c/a_0$, $G = (\rho\mu)^*/(\rho\mu)_0$; a , ρ 和 μ 分别为声速,密度和粘性系数. 引入流函数 ψ , 则

$$\left. \begin{aligned} \rho ur &= \rho_0 R_0 \frac{\partial \psi}{\partial y}, \\ (\rho v + \overline{\rho'v'})r &= -\rho_0 R_0 \frac{\partial \psi}{\partial x}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{A-2})$$

为了简单起见,在转换过程中可以选流函数不变: $\psi = \Psi$. 因此,从式(A-1)和(A-2),我们定义

$$U = \frac{\partial \Psi}{\partial Y}, \quad V = -\frac{\partial \Psi}{\partial X}. \quad (\text{A-3})$$

于是

$$\left. \begin{aligned} U &= Fu, \\ (\rho v + \overline{\rho'v'})r &= \rho_0 R_0 [(r/R_0)^2 FGV - Y_x U]. \end{aligned} \right\} \quad (\text{A-4})$$

基本方程的转换 轴对称可压缩湍流边界层方程为:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \rho ur}{\partial x} + \frac{\partial r(\rho v + \overline{\rho'v'})}{\partial y} &= 0, \\ \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + (\rho v + \overline{\rho'v'}) \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{dp}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \rho \overline{v'u'} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (\text{A-5})$$

假定转换前后的 Reynolds 应力之间满足关系 $-\rho \overline{v'u'} = F^2 G \frac{r}{R_0} (-\rho_0 \overline{V'U'})$, 并假定 $\rho\mu = (\rho\mu)^*$. 利用这些假定将运动方程转换为如下形式:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} &= 0, \\ U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} &= U_c \frac{\partial U_c}{\partial X} \left[\frac{\frac{1}{\rho} + \frac{1}{F} \frac{dF}{dP} u^2}{\frac{1}{\rho_c} + \frac{1}{F} \frac{dF}{dP} u_c^2} \right] + \frac{\partial}{\partial Y} \left[\frac{\mu + \varepsilon}{\mu} v_0 \frac{\partial U}{\partial Y} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (\text{A-6})$$

取 $dF/F = \frac{\gamma-1}{2\gamma} dP/P$, 上式变为:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} &= 0, \\ U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} &= U_c \frac{dU_c}{dX} \frac{H}{H_c} + \frac{\partial}{\partial Y} \left[\frac{\mu + \varepsilon}{\mu} v_0 \frac{\partial U}{\partial Y} \right], \end{aligned} \right\} \quad (\text{A-7})$$

其中 H 为边界层内总焓, p 为压力.

动量积分方程的推导 定义转换后表面摩擦阻力 $\tau_{wi} = \mu_0 (\partial U / \partial Y)$.

将方程(A-7)对 Y 坐标从 0 到 Δ 积分, 得到

$$\frac{d\theta}{dX} + \frac{\theta}{U_c} \frac{dU_c}{dX} \left[2 + J_i + \int_0^{\Delta} \left(\frac{H}{H_c} - 1 \right) dY/\theta \right] = \frac{\tau_{wi}}{\rho_0 U_c^2}, \quad (\text{A-8})$$

其中 Δ 为转换后边界层厚度。

利用平板的焓和速度关系

$$h = h_w + (h_r - h_w) \frac{U}{U_c} - (h_r - h_c) \left(\frac{U}{U_c} \right)^2,$$

或

$$\frac{H}{H_c} = \frac{h_w}{H_c} + \frac{U}{U_c} \frac{(h_r - h_w)}{H_c} - \left(\frac{U}{U_c} \right)^2 \frac{(h_r - h_c)}{H_c}, \quad (\text{A-9})$$

并利用幂函数形式的速度律 $U/U_c = (Y/\Delta)^n$, 得到:

$$\int_0^{\Delta} \left(\frac{H}{H_c} - 1 \right) dY/\theta = \left(\frac{h_w}{H_c} - 1 \right) (2n + 1) \quad (\text{A-10})$$

其中 h_w 为表面焓, h_r 为恢复焓。当引入 $J_{itp} = 1 + 2n$ 时, 方程 (A-8) 变为:

$$\frac{d\theta}{dX} + \frac{\theta}{U_c} \frac{dU_c}{dX} \left[2 + J_i + \left(\frac{h_w}{H_c} - 1 \right) J_{itp} \right] = \frac{\tau_{wi}}{\rho_0 U_c^2}. \quad (\text{A-11})$$

参 考 文 献

- [1] Spence, D. A., The growth of compressible turbulent boundary layer on isothermal and adiabatic wall, ARC, RM 3191 A59.
- [2] Roshotko, E. and Tucker, M., Approximate calculation of the compressible turbulent boundary layer with heat transfer and arbitrary pressure gradient, NACA, TN 4154, 1957.
- [3] Eckert, E. R. G., Engineering relations for friction and heat transfer to surfaces in high velocity flow, *Jour. Aero. Sci.*, **22**, 8, 1955, 585.
- [4] Vaglio-Laurin, R., Turbulent heat transfer on blunt-nosed bodies in two-dimensional and general three-dimensional hypersonic flow, *Jour. Aero. Sci.*, **27**, 1, 1960.
- [5] Libby, P. A. and Cresci, R. J., Evaluation of several hypersonic turbulent heat transfer analyses by comparison with experimental data, WADC, TN 57-72, 1957.
- [6] Cresci, R. J., Mackenzie, D. A. and Libby, P. A., An experimental investigation of laminar, transitional and turbulent heat transfer on blunt-nosed bodies in hypersonic flow, *Jour. Aero. Sci.*, **27**, 6, 1960.
- [7] Rose, P. H., Probst, R. F. and Adams, M. C., Turbulent heat transfer through a highly cooled partially dissociated boundary layer, Heat Transfer and Fluid Mechanics Institute, 1958.
- [8] Lobb, R. K., Winkler, E. M. and Persh, J., Experimental investigation of turbulent boundary layer in hypersonic flow, *Jour. Aero. Sci.*, **22**, 1, 1955.
- [9] Mager, A., Transformation of the compressible turbulent boundary layer, *Jour. Aero. Sci.*, **25**, 5, 1958.
- [10] Burggraf, O. R., The compressibility transformation and turbulent-boundary-layer equation, *Jour. Aero. Sci.*, **29**, 4, 1962.
- [11] Rubesin, M. W., A modified Reynolds analogy for the compressible turbulent boundary layer on a flat plate, NACA, TN 2917, 1958.
- [12] Beckwith, Ivan E. and Gallagher, James J., Heat transfer and recovery temperatures on a sphere with laminar, transitional and turbulent boundary layers at Mach numbers of 2.00 and 4.15, NACA, TN 4125, 1957.
- [13] Spence, D. A., Velocity and enthalpy distribution in the compressible turbulent boundary layer on a flat plate, *Journal of Fluid Mechanics*, **8**, Part 3, 1960.
- [14] Schlichting, Boundary Layer Theory, McGraw-Hill Book Company Inc., New York, Toronto, London, Verlag G. Braun, Karlsruhe, 1960.
- [15] Sibulkin, M., Heat transfer to an incompressible turbulent boundary layer and estimation nozzle throats, *Jour. Aero. Sci.*, **23**, 2, 1956.

HEAT TRANSFER ON BLUNT-BODY IN HYPERSONIC TURBULENT BOUNDARY-LAYER

HUH-AOD NIÚ JIĀ-YÙ

(Institute of Mechanics, Academia Sinica)

ABSTRACT

In this paper, a method of calculation of heat-transfer rate for blunt-bodies in the case of hypersonic turbulent boundary-layer is presented. In order to transform the compressible and axisymmetrical turbulent boundary-layer flow to an incompressible and two-dimensional turbulent boundary-layer flow, the Mager-Степанов-Mangler transformation has been applied. According to the characteristics of hypersonic, turbulent boundary-layer with favourable pressure gradient, the classical single-parameter representation has been chosen for skin-friction and the form factor in the momentum equation; and the error introduced by the transformation is corrected by a suitable choice of the gas temperature according to Eckert's reference enthalpy. Finally, the heat transfer coefficient is obtained by the corrected Reynolds analogy. The results agree well with the available experiments.