

# 柔性弦中弹塑性波的传播\*

王礼立

(中国科学院力学研究所<sup>1)</sup>)

## 提 要

本文用 Lagrange 方法研究了弦中弹塑性纵波和横波的传播,对不论是强间断或弱间断建立了一般微分关系式。着重讨论了相似问题。对于无滑动冲击的情况,问题是容易求解的;对于滑动冲击的情况,在补充考察了摩擦条件后,问题也可以求解。此外,论证了能量守恒条件;讨论了理想塑性弦的特殊情况。文中指出了文献[1]和[2]的某些错误。

## 一、引 言

弦的弹塑性动力学问题大约是在二次世界大战期间开始研究的,但直到战后才公开发表。最早的是 Рахматулин<sup>[1]</sup>的工作。随后主要有 Cristescu<sup>[2]</sup> 和 Craggs<sup>[3]</sup> 的工作。在文献[4]中, Cristescu 已经作了一个简要的总结。可以看到,与杆的弹塑性动力学问题的研究比较起来,弦的研究是远非完善的。

但是,首先,杆的纵向冲击只是弹塑性动力学中最简单的问题。在更一般的情况下,杆将受到斜向冲击。这时实际上应该处理梁的弹塑性动力学问题。但大家知道,即使只讨论弹性弯曲波,问题也是十分复杂的。对于细长梁,当可以忽略抗弯刚度时,作为初步近似,可化为对柔性弦的研究。这时问题可以大大简化。另外,膜的冲击问题也可以化为对弦的研究。其次,在某些具体问题的研究中,例如在军事上关于降落伞降落问题的研究和在工业中关于矿井绳索的冲击问题等的研究中,都会直接遇到弦的冲击问题。最后,关于弦的研究也已经应用于材料的动力应力应变关系的研究中了<sup>[5]</sup>。

本文用 Lagrange 方法研究了弦中弹塑性纵波和横波波面的传播,对于不论是强间断或弱间断,建立了一般微分关系式,从而可以用特征线法求解弦的冲击问题。在此基础上着重研究了弦在突加峰值冲击载荷下的相似问题。对于半无限长直弦,问题是容易求解的;对于无限长直弦,需要区分无滑动冲击和滑动冲击两种情况。前者容易化为解半无限长直弦的问题。后者则是一个变边界的问题,需要进一步讨论冲击点本身的传播,这就必须补充考察摩擦条件,从而问题也可以求解。这一问题 Рахматулин<sup>[1]</sup> 早就提出并处理过,但在本文中才得到解决。此外,本文还论证了能量守恒条件和提了一下理想塑性弦的特殊情况,在这两点上不同意 Рахматулин<sup>[1]</sup> 和 Cristescu<sup>[2]</sup> 的观点。

## 二、一般关系式

本文讨论只能承受张力的柔性弦。

\* 1963年8月30日收到。

1) 作者现在工作单位:化学工业部化工机械研究所。

对于在运动中始终保持直线形状的弦,张力的方向始终保持不变.因此,在这种弦中就只传播纵波.对这种情形完全可以应用杆的纵向应力波的理论,不需另作处理.弦中传播横波时,弦的形状必然发生变化,也就是只有张力  $\vec{T}$  的方向发生变化时才会有横向扰动的传播.

如果弦的形状发生折断(强间断),则在折断点的两边,张力  $\vec{T}$  的方向将突然改变.按动量守恒定理,相应地必有横向速度的突然跳跃.反之也对.于是,强间断横波波面必将以折断点的形式在弦中传播.下面就先来讨论这种强间断的传播.

用 Lagrange 变量  $s_0$  和  $t$  来描写弦的运动,  $s_0$  是弦的原始弧长,  $t$  是时间.以  $\vec{u}$  表位移矢量,则质点速度矢量为  $\vec{v} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}$ .注意速度同弦的方向间一般有一夹角  $\beta_0$ .强间断前面和后面的各量分别用下标 1 和 2 表示(图 1).

按动量定理,强间断面上的动力学条件为

$$\rho_0 b (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = \vec{T}_2 + \vec{T}_1, \quad (1)$$

此处  $b = \frac{ds_0}{dt}$  是强间断的传播速度,  $\rho_0$  是弦的原始线密度.

强间断面上的连续条件为  $\vec{u}_2 = \vec{u}_1$ .随着强间断的传播,这条件在间断面上总是成立的,换句话说,沿着强间断面,全微商

$$\frac{\partial \vec{u}_2}{\partial t} + b \frac{\partial \vec{u}_2}{\partial s_0} = \frac{\partial \vec{u}_1}{\partial t} + b \frac{\partial \vec{u}_1}{\partial s_0}. \quad (2)$$

上式可改写为

$$\vec{v}_2 - \vec{v}_1 = -b \left( \frac{\partial \vec{u}_2}{\partial s_0} - \frac{\partial \vec{u}_1}{\partial s_0} \right), \quad (3)$$

式中  $\frac{\partial \vec{u}}{\partial s_0}$  是相对位移矢量.如以  $\vec{s}_0$  和  $\vec{s}_1$  分别表示弦的微小元素  $ds_0$  在变形前后切线方向的单位矢量(图 2),则显然有

$$(1 + \epsilon) \vec{s}_1 = \vec{s}_0 + \frac{\partial \vec{u}_1}{\partial s_0}, \quad (4)$$

式中  $\epsilon = \frac{ds - ds_0}{ds_0}$  是弦的拉伸应变.

不失普遍性,今后设弦作平面运动.这时式(1)和(3)与四个标量方程等价.例如如果沿强间断前的弦段的切向和法向投影,令强间断折断点两边弦的夹角为  $\gamma$ ,并且计及式

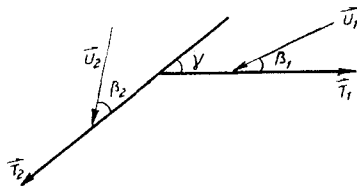


图 1

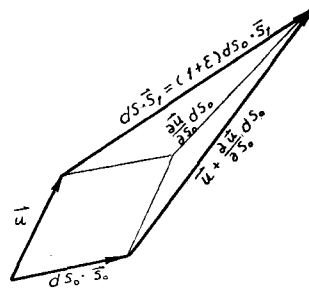


图 2

(4)后(注意  $\mathbf{s}_0$  和  $\mathbf{s}_1$  的夹角在强间断面后边即  $\gamma$  角,在前边则为零),则有

$$\begin{cases} \rho_0 b [v_2 \cos(\beta_2 + \gamma) - v_1 \cos \beta_1] = T_2 \cos \gamma - T_1, & (5) \\ \rho_0 b [v_2 \sin(\beta_2 + \gamma) - v_1 \sin \beta_1] = T_2 \sin \gamma, & (6) \end{cases}$$

$$(I) \begin{cases} v_2 \cos(\beta_2 + \gamma) - v_1 \cos \beta_1 = b[(1 + \varepsilon_2) \cos \gamma - 1 - \varepsilon_1], & (7) \\ v_2 \sin(\beta_2 + \gamma) - v_1 \sin \beta_1 = b(1 + \varepsilon_2) \sin \gamma, & (8) \end{cases}$$

此处假定应力应变关系  $T = T(\varepsilon)$  是已知的,并限于讨论  $\frac{d^2 T}{d\varepsilon^2} \leq 0$  的情况.

由式(6)和(8)立即可得出横波的波速

$$b = \sqrt{\frac{1}{\rho_0} \frac{T_2}{1 + \varepsilon_2}}. \quad (9)$$

再由式(5)和(7)可知

$$\frac{T_1}{1 + \varepsilon_1} = \frac{T_2}{1 + \varepsilon_2}. \quad (10)$$

要想满足这一条件,应使

$$T_1 = T_2, \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_2; \quad (11)$$

或者应使

$$\frac{T_1 - T_2}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} = \frac{T_1}{1 + \varepsilon_1} = \frac{T_2}{1 + \varepsilon_2}. \quad (12)$$

在一般的应力应变关系  $T = T(\varepsilon)$  的情况下,式(10)的解只能是式(11). 这意味着横波不产生应变而只引起弦的形状的改变. 只有当  $T = T(\varepsilon)$  具有如图 3 所示的线性硬化特性,即塑性段的直线延线恰好通过  $\varepsilon = -1$  点时,才能有形如式(12)的解. 这时强间断纵波和强间断横波相重合. 强间断上  $T$  和  $\varepsilon$  的跳跃可以认为是纵波引起的而形状变化(折断)是横波引起的.

当  $\gamma = 0$  时,式(5)–(8)就化为

$$(II) \begin{cases} \rho_0 b [(v \cos \beta)_2 - (v \cos \beta)_1] = T_2 - T_1, & (13) \\ (v \cos \beta)_2 - (v \cos \beta)_1 = b(\varepsilon_2 - \varepsilon_1), & (14) \\ (v \sin \beta)_2 = (v \sin \beta)_1. & (15) \end{cases}$$

这其实就是纵向应力波理论中所谓的 Hugoniot 关系,而  $b$  则化为纵向强间断的波速

$$c = \sqrt{\frac{1}{\rho_0} \frac{T_2 - T_1}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}}.$$

当强间断横波的跳跃值从有限值逐渐减小而趋于无限小时,最后达到的极限情况就

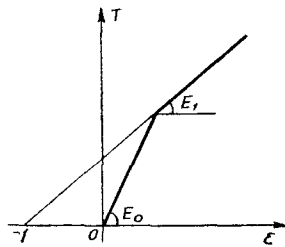


图 3

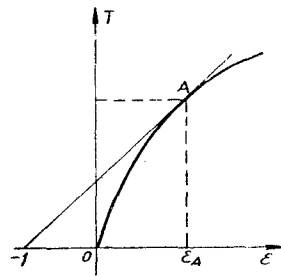


图 4

是弱间断横波。这时用  $d\gamma$  代替  $\gamma$ , 并相应地令  $T_2 = T_1 + dT$ ,  $\varepsilon_2 = \varepsilon_1 + d\varepsilon$ ,  $\beta_2 = \beta_1 + d\beta$ ,  $v_2 = v_1 + dv$ , 则式(5)–(8)就化为弱间断横波波面上的动力学条件和运动学条件:

$$(III) \begin{cases} \rho_0 b [d(v \cos \beta) - v \sin \beta d\gamma] = dT, & (16) \\ \rho_0 b [d(v \sin \beta) + v \cos \beta d\gamma] = T d\gamma, & (17) \\ d(v \cos \beta) - v \sin \beta d\gamma = b d\varepsilon, & (18) \\ d(v \sin \beta) + v \cos \beta d\gamma = b(1 + \varepsilon) d\gamma. & (19) \end{cases}$$

由式(17)和(19)立即得出弱间断横波的波速

$$b(\varepsilon) = \sqrt{\frac{1}{\rho_0} \frac{T(\varepsilon)}{1 + \varepsilon}}. \quad (20)$$

再由式(16)和(18)可知

$$\frac{T}{1 + \varepsilon} = \frac{dT}{d\varepsilon}. \quad (21)$$

要想满足这一条件, 在任意  $\varepsilon$  值的一般情况下, 必须有  $dT = 0$ ,  $d\varepsilon = 0$ . 这也表明横波不改变弦的伸长变形 ( $d\varepsilon = 0$ ) 而只引起弦的形状变化 ( $d\gamma \neq 0$ ). 在特殊情况下, 即在  $\varepsilon = \varepsilon_A$  (如图 4 所示,  $\varepsilon_A$  是  $A$  点的  $\varepsilon$  值,  $A$  点是自  $\varepsilon = -1$  向曲线  $T = T(\varepsilon)$  所作切线的切点) 的情况下, 式(21)也能满足, 这时横波波面与纵波波面相重合.

如果  $d\gamma = 0$ , 式(16)–(19)就回到弱间断纵波传播理论中所熟知的关系 ( $b$  改用符号  $c = \sqrt{\frac{1}{\rho_0} \frac{dT}{d\varepsilon}}$ ):

$$(IV) \begin{cases} \rho_0 c d(v \cos \beta) = dT, & (22) \\ d(v \cos \beta) = c d\varepsilon, & (23) \\ d(v \sin \beta) = 0. & (24) \end{cases}$$

上面得出的四组方程(I)–(IV)是讨论弦中传播弹塑性纵波和横波(并且不论是强间断或弱间断)的基本微分关系, 它们分别表示在不同情况下波面上的动力学条件和运动学条件.

横波以波速  $b = \sqrt{\frac{1}{\rho_0} \frac{T}{1 + \varepsilon}}$  传播, 纵波以波速  $c = \sqrt{\frac{1}{\rho_0} \frac{dT}{d\varepsilon}}$  传播. 在 Lagrange 平面 ( $s_0-t$  平面) 上分别以特征线族  $ds_0 = \pm b dt$  和  $ds_0 = \pm c dt$  代表这两种波面的传播, 基本微分关系(III)和(IV)就是跨过对应的正向特征线亦即是在负向特征线上的微分关系. 至于在正向特征线上的微分关系, 只要改变对应的正负号即可. 从这些微分关系出发, 可以用特征线法求解弦的弹塑性波的传播问题. 当然, 这类问题的求解比在杆的纵向应力波传播理论中所遇到的要复杂得多.

特别要指出, 虽然纵波只产生应变而不改变弦的形状, 横波只引起弦的形状变化而不产生应变, 但应注意, 它们是相互影响着的. 因为对于纵波,  $dT$  和  $d\varepsilon$  与质点切向速度的变化  $d(v \cos \beta)$  有关, 横波改变了弦的形状之后, 就会通过切向速度的变化而影响纵波的传播. 另一方面, 横波波速  $b$  是应变  $\varepsilon$  的函数, 纵波改变了弦的应变之后, 也就立即会影响横波的传播.

在各种不同情况下, 纵波和横波可以是弱间断, 也可以是强间断; 纵波和横波传播的

先后次序也可以是不同的,可以有  $c > b$ , 也可以有  $c < b$ . 这些情况主要取决于应力应变关系  $T = T(\epsilon)$ , 弦的原始形状以及边界条件. 边界条件可以用  $\vec{T}|_{\text{边界}} = \vec{T}_0(t)$ , 或者  $\vec{v}|_{\text{边界}} = \vec{v}_0(t)$ , 或者  $\epsilon|_{\text{边界}} = \epsilon_0(t)$  的形式给出.

在限定讨论应力应变曲线  $T = T(\epsilon)$  凸向  $T$  轴 ( $\frac{d^2T}{d\epsilon^2} \leq 0$ ) 和不发生卸载 ( $\frac{\partial T}{\partial t} \geq 0$ , 亦即  $\frac{\partial \epsilon}{\partial t} \geq 0$ ) 的情况下, 纵波波速  $c = \sqrt{\frac{1}{\rho_0} \frac{dT}{d\epsilon}}$  随  $\epsilon$  的增大而减小, 这时纵波是连续波 (弱间断). 只有当  $T = T(\epsilon)$  上有直线段 (例如线性弹性或线性硬化段) 且边界条件中包含强间断 (突加载荷) 时, 才会形成强间断纵波. 横波的情况就有些不同了. 当  $\epsilon \leq \epsilon_A$  (图 4) 时, 横波波速  $b = \sqrt{\frac{1}{\rho_0} \frac{T}{1 + \epsilon}}$  随  $\epsilon$  的增大而增大, 这时后面的扰动将追上前面的扰动, 最终将形成强间断横波, 它以对应于最大应变  $\epsilon_m$  的波速  $b(\epsilon_m) = \sqrt{\frac{1}{\rho_0} \frac{T(\epsilon_m)}{1 + \epsilon_m}}$  传播. 同时, 因为  $b(\epsilon_m) \leq c(\epsilon_m)$ , 所以横波将落在纵波的后面 (当  $\epsilon < \epsilon_A$  时) 或者将与纵波相重合 (当  $\epsilon = \epsilon_A$  时). 当  $\epsilon > \epsilon_A$  时, 随  $\epsilon$  的增大  $b$  又减小, 粗看起来, 这时似乎会有一系列弱间断横波跟在对应于  $\epsilon_A$  的强间断横波后面. 事实上却不会这样, 因为当  $\epsilon > \epsilon_A$  时有  $\frac{T}{1 + \epsilon} > \frac{dT}{d\epsilon}$ , 即在应变超过  $\epsilon_A$  的弦上, 横波将比纵波传播得快, 而随着横波依次赶上原先在前面传播的纵波的同时,  $\epsilon$  将逐渐减小 (提醒一下,  $\epsilon$  是属于纵波传播的并且  $\epsilon$  愈小则纵波波速愈大), 结果横波的传播速度还是愈来愈快, 最后终于以强间断横波波速  $b(\epsilon_A)$  传播.

由此可见, 横波最终总要形成强间断. 对于一般的逐渐加载边界条件 ( $\frac{\partial T_0}{\partial t} \geq 0$ ,  $\frac{\partial T_0}{\partial t} \neq \infty$ ), 强间断横波是逐渐形成的. 只要在边界条件中外载荷继续随时间增加 ( $\frac{\partial T_0}{\partial t} > 0$ ), 强间断就是不稳定的, 它的强度和波速也就继续变化. 只有当边界条件中出现恒值载荷 ( $\frac{\partial T_0}{\partial t} = 0$ ) 时, 才会最终形成稳定的强间断.

上述情况进一步说明了问题的复杂性.

现在如果把式(1)和(3)对间断后面的弦段的切向和法向投影, 同方程组 (I) 类似, 将有

$$(I') \begin{cases} \rho_0 b [v_2 \cos \beta_2 - v_1 \cos(\beta_1 - \gamma)] = T_2 - T_1 \cos \gamma, & (25) \\ \rho_0 b [v_2 \sin \beta_2 - v_1 \sin(\beta_1 - \gamma)] = T_1 \sin \gamma, & (26) \\ v_2 \cos \beta_2 - v_1 \cos(\beta_1 - \gamma) = b[\epsilon_2 - (1 + \epsilon_1) \cos \gamma + 1], & (27) \\ v_2 \sin \beta_2 - v_1 \sin(\beta_1 - \gamma) = b(1 + \epsilon_1) \sin \gamma. & (28) \end{cases}$$

显然, 方程组 (I) 和 (I') 只有一组是独立的. 对于方程组 (II)–(IV) 也可以依次类推.

### 三、半无限长直弦的突加恒值斜向冲击

现在讨论半无限长直弦, 它的端部受到突加恒值载荷  $v_0, \beta_0$  的作用. 根据上节的讨论, 这时显然在一开始就形成稳定的强间断横波. 在这样的过程中, 不包含特征长度和特征时间, 按照量纲分析理论, 就只存在一个无量纲独立变量  $s_0/V_0 t$ , 这就是所谓的相似间

題. 在  $s_0-t$  图上这时就是一束中心波(图 5, 6).

如果  $\varepsilon_m < \varepsilon_A$  (图 5), 则在半无限长直弦中就将先传播一系列弹塑性纵波, 随后形成一个恒值区, 在此区中又传播一較慢的強間断横波, 弦发生折断, 并且折断点两边都是直綫段. 設弦的初始应变为  $\varepsilon_0$ , 初始速度为零, 则在強間断横波前面的直綫弦段上, 有

$$v_1 = \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon} c(\varepsilon) d\varepsilon; \quad (29)$$

在強間断面上, 按方程組 (I), 有

$$\rho_0 b [v_2 \cos(\beta_2 + \gamma) - v_1] = T_2 \cos \gamma - T_1, \quad (30)$$

$$\rho_0 b [v_2 \sin(\beta_2 + \gamma)] = T_2 \sin \gamma, \quad (31)$$

$$v_2 \cos(\beta_2 + \gamma) - v_1 = b[(1 + \varepsilon_2) \cos \gamma - (1 + \varepsilon_1)], \quad (32)$$

$$v_2 \sin(\beta_2 + \gamma) = b(1 + \varepsilon_2) \sin \gamma; \quad (33)$$

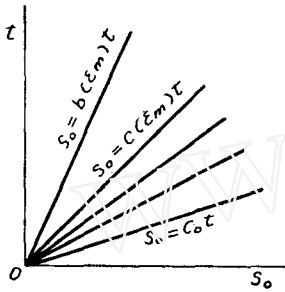


图 5

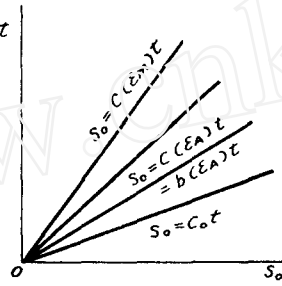


图 6

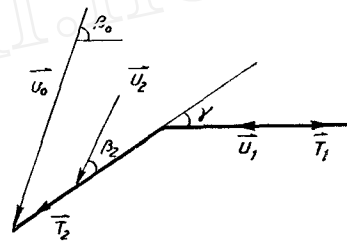


图 7

在強間断后面的直綫弦段上, 应有

$$v \cos \beta = \text{const.}, \quad v \sin \beta = \text{const.},$$

应用給定的冲击端边界条件  $v_0, \beta_0$ , 就有

$$v_2 \sin \beta_2 = v_0 \sin(\beta_0 - \gamma), \quad (34)$$

$$v_2 \cos \beta_2 = v_0 \cos(\beta_0 - \gamma), \quad (35)$$

这里  $\beta_0$  是  $v_0$  与初始弦的夹角(图 7). 既然  $T = T(\varepsilon)$ ,  $\beta_0, v_0$  和  $\varepsilon_0$  是已知的, 则由七个方程(29)---(35)就可以解得七个未知量  $\varepsilon_1, v_1, \varepsilon_2, v_2, \beta_2, b$  和  $\gamma$ .

如果  $\varepsilon_m > \varepsilon_A$  (图 6), 则在传播了一系列弹塑性纵波之后, 在  $\varepsilon = \varepsilon_A$  的纵波上将同时有強間断横波重迭地传播着, 弦发生折断; 此外, 在強間断横波后面的直綫弦段中还有比横波为慢的纵波传播着, 最后是恒值应变区. 这时式(29)---(34)仍然成立, 式(35)則应以

$$v_0 \cos(\beta_0 - \gamma) = \int_{\varepsilon_2}^{\varepsilon_m} c(\varepsilon) d\varepsilon + v_2 \cos \beta_2 \quad (36)$$

来代替, 另外还需补充一个条件  $c(\varepsilon_A) = b(\varepsilon_A)$  或

$$\left. \frac{dT}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=\varepsilon_A} = \frac{T(\varepsilon_2)}{1 + \varepsilon_2}. \quad (37)$$

这样, 八个未知数  $\varepsilon_1, v_1, \varepsilon_2, v_2, \beta_2, b, \gamma$  和  $\varepsilon_m$  就可以由八个方程(29)---(34), (36)和(37)解得.

如果  $T = T(\varepsilon)$  是綫性硬化的(图 8), 則当  $E_1 < T_s/(1 + \varepsilon_s)$  时(图 8 曲綫 1), 横

波在塑性纵波的前面传播(图9);当  $E_1 > T_s/(1 + \epsilon_s)$  时(图8曲线2),横波在塑性纵波的后面传播(图10);当  $E_1 = T_s/(1 + \epsilon_s)$  时(图8曲线3),两者重合(图11). 但横波

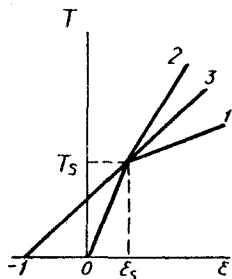


图 8

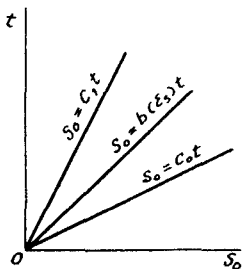


图 9

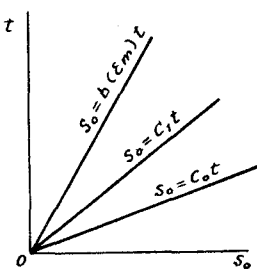


图 10

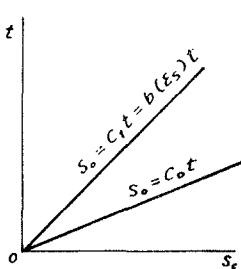


图 11

总不会比弹性纵波传播得更快. 不论属于上述三种情况中的哪一种情况,问题的求解都将比在一般的  $T = T(\epsilon)$  情况下来求解更为容易.

#### 四、无限长直弦的突加恒值斜向点冲击

现在讨论无限长直弦的突加恒值斜向冲击问题. 设外载荷只作用于弦的一点上,即所谓“点冲击”. 同上节一样,这也是相似问题.

但这里需要区别两种不同的冲击类型: 1) 冲击载荷系作用在弦的某个固定质点上,例如在  $s_0 = 0$  上. 冲击物与弦之间没有相对滑动,这种冲击称为无滑动冲击. 2) 弦上的冲击点位置随时间而变化,这相当于冲击物在空间中沿一定方向运动. 这时冲击物与弦之间发生相对滑动,这种冲击称为滑动冲击.

无限长直弦受到突加恒值斜向点冲击时,弦在冲击点处发生折断,冲击点本身也是一个强间断面. 当用 Lagrange 变量描述时,对于无滑动冲击,冲击点本身并不沿弦传播,因而是不动的强间断面;对于滑动冲击,冲击点是运动的强间断面,它以一定的波速  $b_0$  沿弦传播,但从下面可以看到,  $b_0$  比一般的横波波速  $b$  小.

这样,对于无滑动冲击,实际上等于分别处理冲击点前后两边的两根半无限长直弦的冲击问题,这已经在上节讨论过了. Рахматулин<sup>[1,5]</sup> 曾经解决过这个问题,本文用 Lagrange 方法重新加以解决. 对于滑动冲击,由于处理的是变边界问题,外载荷作用的边界本身也是待定的,所以还需对冲击点的传播情况作一些进一步的讨论.

冲击点强间断的传播与前面已讨论过的横波强间断的传播之间有一个不同点,这就是在冲击点强间断面上还有外力  $\vec{T}_0$  的作用. 以下标 3 和 4 分别表示冲击点前面和后面的各量,则动力学条件(1)这时应改写为

$$\rho_0 b_0 (\vec{v}_4 - \vec{v}_3) = \vec{T}_4 + \vec{T}_3 + \vec{T}_0; \quad (38)$$

运动学条件仍然不变,与式(3)类似,有

$$\vec{v}_4 - \vec{v}_3 = -b_0 \left( \frac{\partial \vec{u}_4}{\partial s_0} - \frac{\partial \vec{u}_3}{\partial s_0} \right). \quad (39)$$

注意到图 12 中标明的符号,将矢量方程(38)和(39)沿  $\vec{T}_3$  的切向和法向投影,得到

$$(V) \begin{cases} \rho_0 b_0 [v_4 \cos(\pi - \beta_4 - \gamma_1 - \gamma_2) - v_3 \cos \beta_3] = \\ \quad = T_4 \cos(\gamma_1 + \gamma_2) + T_0 \cos(\pi - \beta'_0 - \gamma_2) - T_3, & (40) \\ \rho_0 b_0 [v_4 \sin(\pi - \beta_4 - \gamma_1 - \gamma_2) - v_3 \sin \beta_3] = \\ \quad = -T_4 \sin(\gamma_1 + \gamma_2) + T_0 \sin(\pi - \beta'_0 - \gamma_2), & (41) \\ v_4 \cos(\pi - \beta_4 - \gamma_1 - \gamma_2) - v_3 \cos \beta_3 = \\ \quad = b_0 [(1 + \varepsilon_4) \cos(\gamma_1 + \gamma_2) - (1 + \varepsilon_3)], & (42) \\ v_4 \sin(\pi - \beta_4 - \gamma_1 - \gamma_2) - v_3 \sin \beta_3 = -b_0 (1 + \varepsilon_4) \sin(\gamma_1 + \gamma_2); & (43) \end{cases}$$

或者沿  $\mathbf{T}_4$  的切向和法向投影, 可得

$$(V') \begin{cases} \rho_0 b_0 [v_4 \cos \beta_4 - v_3 \cos(\pi - \beta_3 - \gamma_1 - \gamma_2)] = \\ \quad = -T_4 + T_0 \cos(\beta'_0 - \gamma_1) + T_3 \cos(\gamma_1 + \gamma_2), & (44) \\ \rho_0 b_0 [v_4 \sin \beta_4 - v_3 \sin(\pi - \beta_3 - \gamma_1 - \gamma_2)] = \\ \quad = T_0 \sin(\beta'_0 - \gamma_1) - T_3 \sin(\gamma_1 + \gamma_2), & (45) \\ v_4 \cos \beta_4 - v_3 \cos(\pi - \beta_3 - \gamma_1 - \gamma_2) = \\ \quad = -b_0 [(1 + \varepsilon_4) - (1 + \varepsilon_3) \cos(\gamma_1 + \gamma_2)], & (46) \\ v_4 \sin \beta_4 - v_3 \sin(\pi - \beta_3 - \gamma_1 - \gamma_2) = -b_0 (1 + \varepsilon_3) \sin(\gamma_1 + \gamma_2). & (47) \end{cases}$$

在动力学条件(40), (41), (44)和(45)中有任何两个是独立的. 在运动学条件(42), (43), (46)和(47)中也有任意两个是独立的. 总共有四个独立的标量方程.

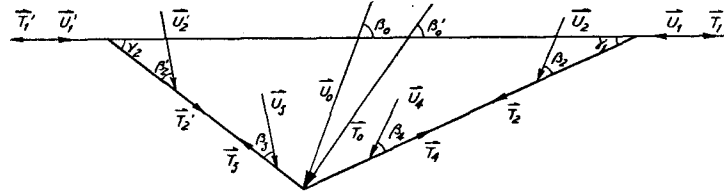


图 12

注意, 一般  $\beta'_0 \neq \beta_0$ , 即  $\bar{T}_0$  和  $\bar{v}_0$  不一定是同一方向的.

由式(41), (43)和由式(45), (47)可得  $b_0$  的表达式为

$$\begin{aligned} b_0^2 &= \frac{1}{\rho_0} \frac{T_4 \sin(\gamma_1 + \gamma_2) - T_0 \sin(\beta'_0 + \gamma_2)}{(1 + \varepsilon_4) \sin(\gamma_1 + \gamma_2)} = \\ &= \frac{1}{\rho_0} \frac{T_3 \sin(\gamma_1 + \gamma_2) - T_0 \sin(\beta'_0 - \gamma_1)}{(1 + \varepsilon_3) \sin(\gamma_1 + \gamma_2)}. \end{aligned} \quad (48)$$

设  $T_3 \neq T_4$ , 进一步演算后可得

$$b_0^2 = \frac{1}{\rho_0} \frac{T_4 \sin(\beta'_0 - \gamma_1) - T_3 \sin(\beta'_0 + \gamma_2)}{(1 + \varepsilon_4) \sin(\beta'_0 - \gamma_1) - (1 + \varepsilon_3) \sin(\beta'_0 + \gamma_2)}, \quad (49)$$

$$T_0 = \frac{T_4(1 + \varepsilon_3) - T_3(1 + \varepsilon_4)}{(1 + \varepsilon_3) \sin(\beta'_0 + \gamma_2) - (1 + \varepsilon_4) \sin(\beta'_0 - \gamma_1)} \sin(\gamma_1 + \gamma_2). \quad (50)$$

此外, 按式(9)和(49)有

$$b_0^2 = b^2(\varepsilon_4) - \frac{T_0}{\rho_0(1 + \varepsilon_4)} \frac{\sin(\beta'_0 + \gamma_2)}{\sin(\gamma_1 + \gamma_2)} = b^2(\varepsilon_3) - \frac{T_0}{\rho_0(1 + \varepsilon_3)} \frac{\sin(\beta'_0 - \gamma_1)}{\sin(\gamma_1 + \gamma_2)}.$$

由此可见,  $b_0^2 < b^2(\varepsilon_4)$ ,  $b_0^2 < b^2(\varepsilon_3)$ , 这表明滑动冲击点传播得较慢.



在方程组(V)和(V')中也可设法消去  $b_0$  和  $T_0$ , 得到联系其他各量间的两个方程, 例如由式(43)和(47)可得

$$\frac{v_4 \sin(\beta_4 + \gamma_1 + \gamma_2) - v_3 \sin \beta_3}{(1 + \varepsilon_4)} = \frac{v_4 \sin \beta_4 - v_3 \sin(\beta_3 + \gamma_1 + \gamma_2)}{(1 + \varepsilon_3)}, \quad (51)$$

由式(40)和(41)消去  $T_0$  再与式(49)消去  $b_0$  后可得

$$\begin{aligned} \rho_0 [v_4 \sin(\beta_4 + \gamma_1 - \beta'_0) - v_3 \sin(\beta_3 + \gamma_2 - \beta'_0)]^2 &= \\ &= [T_4 \sin(\beta'_0 - \gamma_1) - T_3 \sin(\beta'_0 + \gamma_2)] \times \\ &\times [(1 + \varepsilon_4) \sin(\beta'_0 - \gamma_1) - (1 + \varepsilon_3) \sin(\beta'_0 + \gamma_2)]. \end{aligned} \quad (52)$$

应该指出, 在冲击点强间断面上, 两边的质点速度有间断  $v_3 \neq v_4$ , 并且  $v_3$  和  $v_4$  都不等于  $v_0$ . 但是, 根据冲击点速度和弦质点速度两者在弦法线上的分量应相等这一接触条件, 仍应有类似于式(34)的边界条件:

$$v_4 \sin \beta_4 = v_0 \sin(\beta_0 - \gamma_1), \quad (53)$$

$$v_3 \sin \beta_3 = v_0 \sin(\beta_0 + \gamma_2). \quad (54)$$

事实上, 如果注意到  $\vec{v}_0$  也就是冲击点在空间中传播的 Euler 波速, 它与 Lagrange 波速间应满足关系

$$\vec{v}_0 = \vec{v}_3 + (1 + \varepsilon_3) b_0 \vec{s}_3 = \vec{v}_4 + (1 + \varepsilon_4) b_0 \vec{s}_4,$$

利用这个关系, 也立即可以得出式(53)和(54), 这里  $\vec{s}_3$  和  $\vec{s}_4$  分别是沿  $\vec{T}_3$  和  $\vec{T}_4$  方向的单位矢量.

这样, 综合起来后(参看图 12), 对于冲击点前边的弦段, 按前节应有

$$\begin{cases} v_1 = \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon_1} c(\varepsilon) d\varepsilon, & (a) \\ \rho_0 b [v_2 \cos(\beta_2 + \gamma_1) - v_1] = T_2 \cos \gamma_1 - T_1, & (b) \\ \rho_0 b [v_2 \sin(\beta_2 + \gamma_1)] = T_2 \sin \gamma_1, & (c) \\ v_2 \cos(\beta_2 + \gamma_1) - v_1 = b[(1 + \varepsilon_2) \cos \gamma_1 - (1 + \varepsilon_1)], & (d) \\ v_2 \sin(\beta_2 + \gamma_1) = b(1 + \varepsilon_2) \sin \gamma_1, & (e) \\ v_4 \cos \beta_4 = \int_{\varepsilon_2}^{\varepsilon_4} c(\varepsilon) d\varepsilon + v_2 \cos \beta_2, & (f) \\ \left. \frac{dT}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=\varepsilon_2} = \frac{T(\varepsilon_2)}{1 + \varepsilon_2}, & (g) \\ v_4 \sin \beta_4 = v_2 \sin \beta_2; & (h) \end{cases} \quad (VI)$$

对冲击点后边有类似的八个方程, 只需以  $v'_1, \varepsilon'_1, v'_2, \varepsilon'_2, \beta'_2, T'_1, T'_2, \gamma_2, b', v_3, \beta_3, \varepsilon_3$  对应地替换  $v_1, \varepsilon_1, v_2, \varepsilon_2, \beta_2, T_1, T_2, \gamma_1, b, v_4, \beta_4, \varepsilon_4$  即可. 因为  $T = T(\varepsilon)$  是已知函数, 实际上这十六个方程中包含的是二十个未知量. 在冲击点当地, 消去  $b_0$  和  $T_0$  后有四个方程(51)~(54), 但其中又引入了新未知量  $\beta'_0$ . 所以总共是二十个方程二十一个未知量. 从问题的动力学条件、运动学条件、应力应变关系以及边界条件来考虑, 我们已建立, 也只能建立上述的二十个独立方程. 这就必须考察决定滑动的摩擦条件, 以便再补充一个方程而使问题可以求解. 另外应注意, 方程组(VI)是对  $\varepsilon_m > \varepsilon_A$  的情况列出的, 如果  $\varepsilon_m < \varepsilon_A$ , 则只需把其中的最后三式以  $\varepsilon_4 = \varepsilon_2, v_4 = v_2$  和  $\beta_4 = \beta_2$  代替即可, 显然这就更

简单了。

现在来列出摩擦条件。研究有摩擦的一般情况。摩擦力是外载荷  $\vec{T}_0$  沿弦的法线分量与摩擦系数  $f$  的乘积。由于弦的冲击点处恰为一折断点, 因此, 今后均把在该点处弦的法向和切向理解为折断点处弦的夹角的等分线方向及其垂直方向 (图 13)。其实这也就是对夹角两边的法线方向和切线方向分别取平均值而得到的结果。

当外载荷  $\vec{T}_0$  沿弦的切向分量小于摩擦力时, 冲击物不能沿弦滑动, 这属于无滑动冲击情况, 问题已经在前面解决了。只有当  $\vec{T}_0$  的切向分量足以克服摩擦力时, 也就是只有当  $\vec{T}_0$  和弦法线方向之间的夹角

$$\frac{\pi}{2} + \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2} - \beta'_0 = \varphi = \text{arc tg } f \quad (55)$$

时, 才发生滑动冲击。补充上式后, 问题就完全可以求解了。

用二十一个方程解二十一个未知量似乎是十分繁的。但实际上可以容易地利用式 (53) 和 (54) 先把方程组 (VI) 中所有的未知量表为只是  $\epsilon_1$  和  $\epsilon'_1$  的函数, 代入式 (51), (52) 和 (55), 把问题化为只由三个方程解三个未知量  $\epsilon_1$ ,  $\epsilon'_1$  和  $\beta'_0$ 。

最简单的摩擦条件当然是没有摩擦的情况。这时在式 (55) 中令  $f = 0$ , 可得

$$\beta'_0 = \frac{\pi}{2} + \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2}. \quad (56)$$

这表明外载荷  $\vec{T}_0$  的方向就是冲击点处弦的夹角的等分线方向。把式 (56) 代入式 (48) 后, 可得

$$T_3 = T_4, \quad \epsilon_3 = \epsilon_4. \quad (57)$$

这表明在没有摩擦时, 冲击点两边的弦段的张力和应变是相等的。另外可以想见, 任何  $\beta_0 \neq \pi/2$  的斜冲击, 都是滑动冲击。有了式 (57), 在实际求解时就可以不涉及  $\beta'_0$ , 因为方程组 (VI) 加上式 (51), (53), (54) 和 (57), 已有足够的二十个独立方程来求解二十个未知量了。

本节讨论的问题曾由 Рахматулин<sup>[4,5]</sup> 提出并处理过。可惜他的工作在基本方程方面有一些错误。他给出的基本方程中有两个关于冲击点处的方程。其中的连续性方程是正确的, 它与本文式 (51) 等价。至于另一个方程, 他采用了机械工程中常用的绳索绕滑轮的 Euler 公式

$$T_4 - \rho_0 u_s^2 = e^{(\gamma_1 + \gamma_2)} [T_3 - \rho_0 u_s^2].$$

这个方程是不正确的, 因为它是按静力平衡条件导出的, 而这里处理的却是动力学问题<sup>1)</sup>。

但是在没有摩擦的情况下, 按 Euler 公式恰巧也可以得到与式 (57) 一致的结果  $T_3 = T_4$ 。这一巧合使得 Рахматулин 的结果在没有摩擦的特殊情况下成为正确, 虽然其推理依据是错误的。

1) 如果要想把按静力平衡条件导得的 Euler 公式加以修正后应用到动力学问题中去, 对于强间断, 实际上就是本节的处理结果; 对于弱间断 (圆柱体对柔性弦的滑动冲击问题), 令本节中冲击点处强间断跳跃值从有限值逐步减小趋于无限小时, 即可得出所需的有关结果。

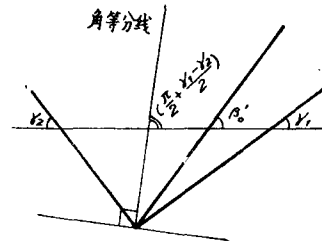


图 13

### 五、关于能量守恒

上述讨论是从动力学条件(动量守恒)和运动学条件(连续性条件)出发的,没有谈及能量守恒条件.

对于  $\frac{d^2T}{d\varepsilon^2} \leq 0$  的材料,在杆中传播纵向应力波时,已知能量守恒条件表现为

$$\text{外功} = \text{应变能} + \text{质点动能}. \quad (58)$$

只有在  $\frac{d^2T}{d\varepsilon^2} > 0$  时,才会多消耗一部分形成冲击波所需的能量.

关于弹塑性纵波和横波在弦中传播的情况,Рахматулин 曾断言只有在  $T = T(\varepsilon)$  是线性关系时式(58)才成立,在其他条件下(他的整个讨论也限于  $\frac{d^2T}{d\varepsilon^2} \leq 0$  的材料)则还有其他形式的能量消耗. 这个断言是错误的.

预先就可以想象到,只要是限于  $\frac{d^2T}{d\varepsilon^2} \leq 0$  的材料,对于纵波,式(58)当然仍成立;而对于横波,由于不论是弱间断或强间断都不引起应变而只会增加弦的质点动能,因此,没有理由可以认为式(58)不成立.

为了具体证明这点,讨论半无限长直弦,其端点受到突加恒值斜向冲击  $v_0, \beta_0$ . 设  $\varepsilon_m < \varepsilon_1$ ,按式(11)有  $T_1 = T_2 = T$ ,  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$ . 在单位时间内,外力  $\vec{T}_0 (= -\vec{T})$  所作的功、应变能和质点动能分别为:

1) 外功  $= \vec{T}_0 \cdot \vec{v}_0 = T \cos \gamma_1 \cdot v_0 \cos \beta_0 + T \sin \gamma_1 \cdot v_0 \sin \beta_0$ . 利用式(30), (31), (34)和(35),上式可改写为

$$\text{外功} = \rho_0 b v_0^2 + \rho_0 b v_0 [(1 + \varepsilon)b - v_1] \cos \beta_0. \quad (59)$$

2) 应变能  $= \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon} c T d\varepsilon = \int_0^{v_1} T d(v \cos \beta)$ . (60)

3) 质点动能  $= \frac{b}{2} \rho_0 v_0^2 + \int_0^{v_1} (c - b) d\left(\frac{1}{2} \rho_0 v^2\right) =$   
 $= \frac{1}{2} \rho_0 b v_0^2 + \frac{1}{2} \rho_0 b \{ [b(1 + \varepsilon)]^2 - [b(1 + \varepsilon) - v_1]^2 \} -$   
 $- \int_0^{v_1} T d(v \cos \beta)$ .

利用式(32)–(35)演算后,最后可得

$$\text{质点动能} = \frac{1}{2} \rho_0 b v_0^2 + \frac{1}{2} \rho_0 b \{ v_0^2 + 2v_0 [b(1 + \varepsilon) - v_1] \cos \beta_0 \} - \int_0^{v_1} T d(v \cos \beta). \quad (61)$$

这就证实了式(58)仍然成立.

注意,  $\vec{v}_0$  的法向分量愈大,质点动能在总的外功中所占的百分比也就愈大. 对于法向冲击 ( $\beta_0 = \pi/2$ ), 式(59)–(61)简化为

$$\text{外功} = \rho_0 b v_0^2,$$

$$\text{应变能} = \int_0^{v_1} T d(v \cos \beta),$$

$$\text{质点动能} = \rho_0 b v_0^2 - \int_0^{v_1} T d(v \cos \beta).$$

这时,在横波强间断通过后,弦段的质点动能就占总的外功的 50%。于是可以想见,对于同样的  $v_0$  值,  $\beta_0$  大则  $\varepsilon$  小 ( $\beta_0 = \pi/2$  时最小),  $\beta_0$  小则  $\varepsilon$  大 ( $\beta_0 = 0$  时最大)。这可以理解为:纵波的传播和质点速度沿弦的切向分量有关,横波的传播则和法向分量有关,而  $\varepsilon$  只能由纵波产生,因此,在同样的  $v_0$  值下,  $\beta_0$  愈小,质点速度的切向分量愈大,  $\varepsilon$  当然也愈大了。注意,这个结论是对无滑动冲击得出的。

## 六、关于理想弹塑性弦的情况

Cristescu<sup>[4]</sup> 曾经讨论过理想弹塑性弦的情况。他认为当载荷达到屈服极限  $T_s$  时(图

14),弦中没有塑性纵波而只有塑性横波,且波速  $b = \sqrt{\frac{1}{\rho_0} \frac{T}{1 + \varepsilon}}$  ( $\varepsilon > \varepsilon_s$ )。

由本文的讨论可知,这种看法是不正确的。因为如前所述,  $\varepsilon$  只能由纵波传播。对于理想弹塑性材料,在载荷到达屈服极限  $T_s$  以后,  $\frac{dT}{d\varepsilon} = 0$ 。这意味着塑性纵波

波速  $c = \sqrt{\frac{1}{\rho_0} \frac{dT}{d\varepsilon}} = 0$ , 即塑性变形就只在冲击点处发生而不会传播出去,因此,这时弦中传播的纵波只能是弹性波。换句话说,在横波到达之前,弦中所能达到的最大

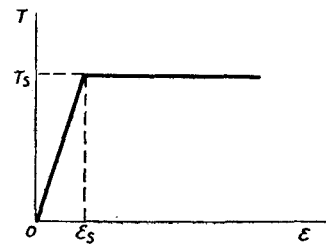


图 14

应变只能是  $\varepsilon_s$ 。横波不能传播应变,只能改变弦的形状,但波速  $b = \sqrt{\frac{1}{\rho_0} \frac{T}{1 + \varepsilon}}$  却取决于  $\varepsilon$ 。这样,横波最终也只能以  $b(\varepsilon_s) = \sqrt{\frac{E}{\rho_0} \frac{\varepsilon_s}{1 + \varepsilon_s}}$  传播。由此可见,理想弹塑性材料

这一假定,从塑性波的观点来看,其意义是不大的。

但对于滑动冲击来说,却有一些例外。因为对于理想弹塑性材料,虽然塑性变形只能在冲击点处发生,但冲击点本身是以波速  $b_0$  传播的,于是塑性变形也将沿弦以  $b_0$  传播出去。

本文写作过程中曾和郑哲敏同志讨论,特此致谢。

## 参 考 文 献

- [1] Рахматулин, X. A., О косом ударе по гибкой нити с большими скоростями при наличии трения, *ПММ*, IX, 6, 1945, 449.
- [2] Кристеску, Н., О волнах нагрузки и разгрузки, возникающих при движении упругой или пластической гибкой нити, *ПММ*, XVIII, 3, 1954, 257.
- [3] Craggs, J. W., Wave motion in plastic-elastic strings, *Jour. Mech. Phys. Solids*, 2, 4, 1954, 286.
- [4] Cristescu, N., European contributions to dynamic loading and plastic waves, *Plasticity, Proc. 2nd. Symp. on Naval Structural Mechanics*, Pergamon Press, New York, 1960, 385.
- [5] Рахматулин, X. A. и Демьянов, Ю. А., Прочность при интенсивных кратко-временных нагрузках, *Физматгиз*, Москва, 1961, 2.

## О РАСПРОСТРАНЕНИИ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИХ ВОЛН В ГИБКОЙ НИТИ

Ван Ли-лей

(Институт механики АН Китая)

### Резюме

В работе исследуется распространение упруго-пластических волн в гибкой нити с помощью лагранжевым методом. Построются общие дифференциальные зависимости как для сильного разрыва, так и для слабого разрыва. Особенно рассматриваются автономные задачи. Среди которых, задача для удара при отсутствии скольжения решается легко, а для удара при существовании скольжения решается правильно только после добавления условия трения. Наряду с этим, подтверждается условие сохранения энергии, рассматривается идеально пластическая нить. Показываются неточности в работах [1] и [2].