

学术讨论

编者按语: 程世祐同志阅读了“弹性圆柱薄壳的一般稳定性”(刊登在本学报第5卷第1期)以后,曾就边界条件对失稳应力的临界值影响这一问题提出了与该文不同的意见,并写了“关于‘弹性圆柱薄壳的一般稳定性’问题”一文。

在程世祐同志的文章写就后,我们曾把它送给“弹性圆柱薄壳的一般稳定性”的原作者罗祖道、吴连元两位同志看过。“弹性圆柱薄壳的一般稳定性”的结束语”是这两位作者对程世祐同志提出的意见所作的解答,现在我们把这两篇有不同看法的短文一并在本期学报上发表。

组织学术讨论是我们经常任务之一,希望广大的读者能陆续对力学领域中的学术问题发表自己的意见,以使我国力学界的学术空气日益热烈。

关于“弹性圆柱薄壳的一般稳定性”问题*

程世祐

(中国科学院力学研究所)

薄壁圆柱壳体的稳定问题,在目前,仍然是弹性力学中的困难问题之一。对于本问题的任何贡献,都应当受到欢迎,罗祖道、吴连元两位同志的“弹性圆柱薄壳的一般稳定性”(刊载于本学报第5卷第1期)一文,自然更会引起热心本问题的读者们的注意。

根据笔者有限的了解,该文作者们的目的是从壳体小挠度的假设出发,用能量法分析了圆柱壳体在轴向、横向以及扭转数种外力联合作用下的一般解法,以便求出在复合载荷情况下,壳体稳定的临界曲线或临界曲面,作为稳定计算时的实际应用。在这篇文章里,作者们讨论了(i)轴向均布压力;(ii)横向均布水压力;(iii)绕中心轴扭转三种单向载荷下的稳定性。在联合外力作用下的情况,讨论了(iv)轴向与横向均布载荷;(v)轴向均布载荷与扭转;以及(vi)横向均布载荷与扭转三种壳体的稳定性。这几个问题,从性质来看,自然都是基本的问题及实际上迫切需要解决的问题。但作者们给出的结果,又不能不使人有发生怀疑的地方。

设 x, y, z 为薄壁圆柱壳体在某一端的轴向、周向及径向坐标, u, v, w 分别为壳体在 x, y, z 方向的位移,取 L 为壳体的长度, r 为壳体的半径, ν 为泊松比,壳体完全的边界条件应当是:

(1) 在简支或铰支的情况下

当 $x = 0$ 或 L 时,

$$u = 0, v = 0, w = 0 \text{ 以及 } \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0;$$

(2) 在固支的情况下

* 1961年8月15日收到。

当 $x = 0$ 或 L 时,

$$u = 0, v = 0, w = 0 \text{ 以及 } \frac{\partial w}{\partial x} = 0.$$

一般來說,在上面常見的两种支承情况下, $u = 0$ 及 $v = 0$ 可能不是主要的,而 $w = 0$ 及 $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$ 或 $w = 0$ 及 $\frac{\partial w}{\partial x} = 0$ 是必要的,但作者們所取的挠度函数

$$w(x, y) = at \cos \left[\frac{n(y + rx)}{r} \right] \cdot \sin \frac{k\pi x}{L}.$$

根据作者們文章中所說,“它符合两端支承的主要几何边界条件,即当 $x = 0$ 或 L 时, $w = 0$.” 笔者认为这种提法,是应当加以說明的.

根据我們熟知的,也就是本文中討論过的单向加载的上临界应力值,在

$$(i) \text{ 軸向均布压力时, } \sigma_{xx} = 0.608 \frac{Et}{r};$$

$$(ii) \text{ 橫向均布水压时, } \sigma_{yy} = 0.926 E \left(\frac{t}{r} \right)^{3/2} \left(\frac{r}{L} \right);$$

$$(iii) \text{ 繞中心軸扭轉时, } \sigma_{xy} = 0.747 E \left(\frac{t}{r} \right)^{5/4} \left(\frac{r}{L} \right).$$

上式中 E 为楊氏模数, t 为壳体厚度. 从这三种情况下的三个上临界值,我們可以看出,在軸向均布压力时,壳体的上临界应力与壳的长度无关(自然也是在一定长度范围之内). 这个道理是可以理解的,因为在均布压力失稳时,只要是中长壳,在軸向可能产生几个半波,因而边界为铰支或固支,不太重要. 試驗証明^[1],在壳长 L 与半径 r 的比值为 1.5 时,边界影响可以忽略不計,而在橫向均布水压的情况下,問題就不能如此处理了.

在橫向均布水压的情况下,壳体失稳的情况随同壳的长度不同而有所不同;例如在长壳的情况下,因为多属二个周向半波失稳,边界条件可以忽略不計;在中长壳的情况下,壳体失稳在軸向是一个半波,在周向则为几个半波,在这种情况下,由于边界固定程度不同,壳体失稳有时会出现跳跃現象. 而在短壳的情况下,周向的半波数因边界支承的情况不同而有显著的不同,壳体失去稳定时多是出現跳跃現象.

讓我們回顾一下过去水压薄壳稳定研究的情况. 远在 1930 年前后,馮·米賽斯(von Mises)^[2]对于本問題的經典結果,經過聞登堡(W. F. Windenburg)^[3]及斯传姆(R. G. Strum)^[4]等人的試驗証明,一直被認為是正确的,并且已經应用在实际設計上. 但是仔細地研究一下这个結論,就会发现,馮·米賽斯的理論是根据铰支边界求得的,而聞登堡等人的試驗結果都接近于固支的情况. 因为二者的条件不同,我們有理由怀疑过去的結論.

在短壳的問題上,問題就表現得更明显,馮·米賽斯的結果,同試驗結果不再一致. 这个問題,很早已經被人指出过^[5]. 今天有許多文章^[6,7]討論均匀外压的壳体稳定,其中問題之一,也就是边界对失稳的影响. 值得指出的是最近依申別也娃的工作^[8],她的試驗結果,也清楚地指出了这一点.

关于繞中心扭轉的問題,笔者认为边界条件的滿足与否,仍然要考虑的. 因为在这个問題上,多数情况下壳体失稳在軸向仍然一个半波,同水压的情况頗多相同的地方. 不过

我們知道,在薄壳的稳定理論中,扭轉問題以及扭轉与內压联合作用下的失穩問題,一直是被認為符合实际情况的,即小挠度理論与实际結果比較,是比較一致的。在这个問題上,我完全同意唐納耳(L. H. Donnell)的論点,他在評論斯传姆的文章^[9]中,清楚地指出边界条件的重要性。作者們一定曾看过这篇簡短的討論。这里就不再重复了。

現在进一步討論复合受力情况的稳定問題。

关于軸压与內压联合作用的問題:作者們今天得到的結果,即內压不影响壳体的稳定性,早在 1932 年弗留格(W. Flügge)^[10]就得到了。作者們知道,这个結論与实际情况是不符合的。在原稿中,作者們曾试图用原始缺陷来解释这个問題。笔者同意,原始缺陷理論可以解释一部分現象,因为內压可以修正原始缺陷,因而也就提高了壳体的稳定性。但有些現象,如波长比随內压的变化問題,我們就无法再用原始缺陷理論来解释了。这个問題可以从大挠度的理論,即馮·卡門及錢^[11]的跳跃理論去探索,但可能遇到一系列困难問題,最近发表的載立門(W. Thielmann),許內耳(W. Schnell)等人的文章^[12],也說明了这一点。

其他联合情况下的問題,軸向均布拉伸与外压,軸向均布載荷与扭轉以及橫向均布載荷与扭轉三种情况。笔者認為都应当考虑到边界条件問題;例如在軸向拉伸及外压联合作用的情况下,如果作者从求解平衡方程式出发,会得到下面的結果:

$$\varphi_1 = \frac{(1 - \nu^2)\lambda^4 + (\lambda^2 + n^2)^4\alpha}{n^2(\lambda^2 + n^2)^2} + \left(\frac{\lambda}{n}\right)^2 \varphi_2,$$

其中

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{q^r(1 - \nu^2)}{Et}, \\ \varphi_2 &= \frac{N_{xx}(1 - \nu^2)}{Et}, \\ \alpha &= \frac{r^2}{12r^2}. \end{aligned}$$

公式中的 N_{xx} 为单位綫长度拉力, q 为单位面积的水压力, λ 为 $\pi - \frac{r}{L}$, n 为周向的半波数。从上列公式中我們可以看出, φ_1 的变化与波长比 λ 是有关系的,也就是說,与边界条件是有关系的。

从上面簡短的討論中,我們可以看出,薄壁圆柱壳体的稳定問題,仍然存在着許多問題,这些問題的主要根源,笔者認為是基本規律还没有澄清,还須要进一步工作,从力学的角度来看这个問題,似乎还应当在簡單受力情况下的問題上多花工夫。因为这些問題不解决,任何建筑在这些不完整理論上的工作,都或多或少缺乏基础,所得到的結果也就很难同实际情况符合。

参 考 文 献

- [1] von Kármán, T., Dunn, L. G., Tsien, H. S., *The Influence of Curvature on the Buckling Characteristics of Structures*, Collected Works of Theodore von Kármán, Vol. IV, p. 7, 1956.
- [2] von Mises, R., *Der Kritische Aussendruck für allseits belastete Zylindrische Rohre*, Festschrift zum 70. Geburtstag von Prof. Dr. A. Stodola, Zurich (1929), ss. 418—430.
- [3] Windenburg, W. F., Trilling, C., *Collapse by Instability of Thin Cylindrical Shell under External Pressure*, *Trans. of A.S.M.E.*, 1934, p. 819.
- [4] Strum, R. G., *A Study of the Collapsing Pressure of Thinwalled Cylinders*, *Engineering Exp. Sta. Bull.*, 329 (1941), University of Illinois.
- [5] Batderf, S. B., *A Simplified Method of Elastic Stability Analysis Shells*, N.A.C.A., T.R., 874.
- [6] Dennell, L. H., *Effect of Imperfections on Buckling of Thin Cylinders under External Pressure*, *Jour. Appl. Mech.*, **23**, 1956, p. 569.
- [7] Dennell, L. H., *Effect of Imperfections on Buckling of Thin Cylinders with Fixed Edges under External Pressure*, *Proc. of the 3rd U. S. National Congress of Applied Mechanics*, 1958, p. 305.
- [8] Исабаева, Ф. С., *Экспериментальное исследование устойчивости круговых цилиндрических оболочек под действием всестороннего внешнего давления*, *Известия КФАН СССР, Серия Физ-Мат. Наук*, № 14, 1960.
- [9] Dennell, L. H., *Discussion on "Stability of Thin Cylindrical Shells in Torsion by R. G. Strum"*, *Trans. A.S.C.E.*, **113**, 1948, p. 651.
- [10] Flugge, W., *Die Stabilität der Kreiszyinderschale*, *Ingenieur-Archiv*, **3**, 1932, pp. 463—506.
- [11] von Kármán, T., Tsien, H. S., *The Buckling Thin Cylindrical Shells under Axial Compression*, Collected Works of Theodore von Kármán, Vol. IV, 1956, p. 107.
- [12] Thielmann, W., Schnell, W., Fischer, G., *Beul- und Nachbeulverhalten Orthotroper Kreiszyinderschalen unter Axial und Innerdruck*, *Z. Flugwiss.*, 1960, Heft 10/11, S. 284.