第4卷 第2期 力学学报 Vol. 4, No. 2
1960年4月 ACTA MECHANICA SINICA April, 1960

混流式水輪机叶片的設計和計算(一)*†

潘良儒 郑哲敏 鍾万勰 刘 曦 齊景泰 王礼立
(中国科学院力学研究所)

符 号

Q——通过水輪机的总流量
N——水輪机的出力(功率)
H——水头
g——重力加速度
η——水輪机的效率
n——叶片数
ω——水轉机轉动的角速度
ξ_k——水力摩損系数
p——压力
h_s——吸出高度
σ——汽蝕系数
R——任一点至水輪机軸的距离
γ——水的重率
Θ——叶片的包角
$\mathbf{v}$——絕对速度矢量
$\mathbf{w}$——相对速度矢量
q_1, q_2, q_3——三維流动中的正交曲綫坐标系
H_1, H_2, H_3——拉梅系数
F_1——$q_1=$常数的曲面族,即迴轉流面
F_2——$q_2=$常数的曲面族,即迴轉等势面
F_3——$q_3=$常数的曲面族,即子午面
v_1, v_2, v_3——$\mathbf{v}$在q_1, q_2, q_3方向的分量
$\mathbf{v}^{(0)}, \mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)}$代表零次,一次及二次量級的絕对速度
u, z——計算面的正交直角坐标系. 与q_2, q_3組成的眞实流面(物理面)之間按(2.3)式轉換.
w_u, w_z——在u, z面上定义的絕对速度在u, z方向的分量見(2.3)
w_u, w_z——在u, z面上定义的相对速度在u, z方向的分量
φ——势函数(φ有时也代表骨綫在u, z坐标中的傾斜角)
ψ——在u, z坐标系中的流函数
$h_{(z)}$——流层的相对厚度
Φ——$\sqrt{h}\cdot\varphi$
Ψ——$\frac{1}{\sqrt{h}}\psi$
Q_i——每一流层中通过$z=0$处的每单位厚度的流量
φ——骨綫在u, z坐标系中的傾角(有时也代表势函数)
Φ^*——u, z坐标中的势函数(見第五节)
l——骨綫在u, z坐标中的总弧长
s, τ——骨綫上的曲綫正交坐标. 坐标原点取在骨綫中点,至骨綫上某一点的弧长为s, τ与骨綫相垂直.
x, y——相对坐标系, $x=\frac{2s}{l}$, $y=\frac{2\tau}{l}$
t——栅距
u_0, z_0——代表速度場中某点的坐标
u_1, z_1——$u_1=\frac{2\pi}{t}(u_0-u)$,
$$z_1=\frac{2\pi}{t}(z_0-z)$$
z_B, z_{BLI}——离开叶片前后較远处
q_0——点源(汇)强度(源为正)
γ_0——点涡强度(順时針为正)
$\bar{q}_0$——$\frac{1}{\sqrt{h}}q_0$
$\bar{\gamma}_0$——$\gamma_0\cdot\sqrt{h}$
Q_0——$\frac{2}{l}q_0$; $\bar{Q}_0$——$\frac{2}{l}\bar{q}_0$

* 1960年2月12日收到.
† 此項工作曾得到机械研究所、南开大学、武汉大学、杭州大学、复旦大学先后参加协作,特此表示深切感謝. 先后参加部分工作的还有何竹修、薛大为、徐朝仪等同志.

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$q(s)$, $q(x)$——源汇分布函数

$\gamma(s)$, $\gamma(x)$——旋涡分布函数

Γ——繞一个叶片的环量

$\bar{q}$——$\frac{1}{\sqrt{h}}q$

B_i——$\bar{q}$ 多項式中的系数

$\bar{\gamma}$——$\sqrt{h}\cdot\gamma$

A_i——$\bar{\gamma}$ 表达式中各項的系数

$\bar{\Gamma}_1$——$\int_{-1}^{1}\gamma(x)dx$

v_{ou}, v_{oz}——不存在奇点时的未扰动絕对速度

w_{ou}, w_{oz}——不存在奇点时的未扰动相对速度

w_∞——不存在奇点时的未扰动相对速度的模[見(2.42)式]

w'_∞——平均相对速度的模[見(2.42′)式]

v_u^*, v_z^*——奇点扰动的诱导絕对速度

$\bar{v}_u$, $\bar{v}_z$——v_u^*, v_z^* 中扣除奇点后的部分

v'_u, v'_z——v_u^*, v_z^* 中包含对数奇点的部分

v_{ua}, v_{za}——v_u^*, v_z^* 中包含奇点 $\frac{u_1}{u_1^2+z_1^2}$, $\frac{z_1}{u_1^2+z_1^2}$ 的部分

v_x, v_y——v_{ua}, v_{za} 按骨綫近似与直綫时的在 x, y 方向的分量

v_{kx}——考虑骨綫为圆弧时(半径为 r)对 v_x 的修正項

$v_{x\pm}$, $v_{y\pm}$——骨綫正反面的 $v_x(x, \pm 0)$, $v_y(x, \pm 0)$

$w_{x\pm}$——即 $w_x(x, \pm 0)$, w_x 是 x 方向的相对速度

$y_\pm$——叶剖面在骨綫两側的相对坐标值

d——叶剖面厚度 $d=\frac{l}{2}(y_+ + y_-)$

x_d——最大厚度 d_{max} 处的 x 坐标

ρ——叶剖面前緣圓形的曲率半径

ρ_1——$\frac{2}{l}\cdot\rho$

θ——叶剖面末端的尖角(有时用以代表圓柱坐标系)

ε——骨綫的入口迎角

α'——v_u^* 与 v_{ou} 的比例系数

β'——v_z^* 与 v_{oz} 的比例系数

α——$\frac{1}{2}(1+\alpha')$

μ——$(1+\beta')$,排挤系数

ε_1——骨綫上某二点处 $(\omega R)^2$ 之差

ε_2——骨綫上某二点处 $\frac{w_x}{R}$ 之差

ξ, R, θ——圓柱坐标系

v_ξ, v_R, v_θ——絕对速度 $\mathbf{v}$ 在 ξ, R, θ 的分量

$v_{\xi\pm}$, $v_{R\pm}$, $v_{\theta\pm}$——絕对速度 $\mathbf{v}$ 在叶片正反面的分量

$\Delta\mathbf{v}$——$\mathbf{v}_1$ 和 $\mathbf{v}$ 之差

Ω——叶片上的涡旋矢量

Ω_ξ, Ω_R, Ω_θ——涡旋矢量在 ξ, R, θ 的分量

$F(\xi, R)$——叶片的方程中的 θ

P——叶片上某点

P_1——叶片进口緣某点

P_2——叶片出口緣某点

$\Gamma_a(P)$——涡函数[見(3.5)式]

$\bar{n}$——叶片法綫方向

s_1——积分路綫切綫方向

b——和 n, s_1 垂直,即 n, s_1, b 組成正交曲綫坐标

一、緒 言

在水輪机的叶片設計中，軸流式可以近似地应用二維流动来計算. 經过很多科学工作者和設計家的研究,已取得很大成果[1-3]. 但对于混流式及对角綫式的流动問題的研究,則还不充分,因为它涉及到三維流动問題,計算上有很大困难. 目有对于混流式水輪机的設計,系采用二元理論[3],[10]或一元理論[4],对流动的分析比較粗略,汽蚀系数不易估計. 近来发展了三元理論[5-7],其中 C. B. 瓦兰德教授的理論; 为除了应用水輪机通用的三个假設(即流体为不可压縮,位势流,无粘性)外，再假定真实流面是与无叶片时的軸对称的流面一样,而且不随时間变化，把三維流动的計算化为对各流层上流动的計算,此时坐标是两个独立变数了,再应用奇点分布法設計出叶片形状. 其优点是对流动的分析比較細致,

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

并可以估計气蝕系数，为以前所用的方法所不及.

在瓦兰德教授的假設下，K. A. 基謝廖夫[8] 求得了当流层厚度 h 的变化可以近似的用

$$h(z) = (1 - \alpha z)^2, \tag{1.1}$$

$$h(z) = (1 + \alpha z)^{-2} \tag{1.2}$$

表达时的点源栅和点涡栅的解，再应用奇点分布法来設計叶片的問題.

同样，当流层厚度 h 变化如 (1.2) 式时，H. Г. 别列霍娃采用保角变换法对平板叶栅作了研究[9].

瓦兰德教授用展开为无穷級数法求得了当流层厚度 h 任意变化时点源栅和点涡栅的解[6]，并指出可用以解决設計叶片的問題. 但是，这个設計方法有很大的計算工作量.

以上諸作者的工作有一个共同的缺点，是孤立的設計某一流面的叶形而不能把这一流面和另一流面的叶形連系起来.

对对角綫式水輪机和在某种情况下的混流式水輪机的流层厚度变化来看，公式 (1.1) 和(1.2)是不能用来逼近的. 因此，在我們提出的研究工作报告中，除作了以下假定

$$\left(\frac{\frac{dh}{dz}}{h}\right)^2 \ll n^2, \quad \frac{d}{dz}\left(\frac{\frac{dh}{dz}}{h}\right) \ll n^2 \tag{1.3}$$

之外，h 可为任意函数. 因此，可以应用于較广的范围. 所用的方法是奇点分布法，和基謝廖夫的方法差不多，当 $h(z)$ 为(1.1)或(1.2)时，就复原为基謝廖夫的解. 这个解也就是瓦兰德的第一項近似的解.

在本文的第二段中簡述了設計計算中的結果，并根据計算經驗提出一些改进意見.

鉴于 C. B. 瓦兰德教授的假設对流层到流层之間流动状况分析的不够，我們提出把二元理論和瓦兰德教授的理論結合起来的方法，来弥补此缺点.

在本文的第三段中，进一步叙述了其理論和計算方法.

在协作单位的大力协助下，我們应用二、三两节的方法进行了設計計算. 发現了一些問題，并作了部分改进，主要是关于合理选择叶片上的旋涡分布問題，提出了在 $\bar{\gamma}(x)$ 上应当添上

$$A_0 \cdot \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \tag{1.4}$$

一項. 在添上 (1.4) 这項之后，对于叶片进口緣和剖面的計算公式也应当有相应的更动，我們打算在另文中討論，在本文中只得仍旧使用原来的公式来討論.

在第四段中对計算結果进行了討論.

可以指出，本文的內容对卡普兰式水輪机基本上也是适用的.

最后应当指出，本文未能給出叶片所有剖面之形状，而且也沒有可供校核的实驗数据，还須要經过整个叶片設計及实驗校核的工作方可对本文的結果下結論，此工作尙在継續进行中.

二、应用瓦兰德理論計算剖面的实用近似方法

本文每一流层的叶片剖面均采用类似文献[8]的計算方法，为此，将其主要原理及計

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

算步驟作一扼要叙述，并作某些修改．至于各个流层之間相互联系的考虑将在下一节中处理．

§1. 运动方程的推导

問題的处理基于四个假設，即假設流体不可压縮，无粘性，流动是有势的以及通过任一以水輪机軸为中心的圓的所有流綫所組成的流面（叫做 F_1 面）是一迴轉面，且不随时間变化．最后一个就是瓦兰德教授所提出的假設，在这个假設之下，不能滿足所有三个无旋方程，在底下就可見到．在此假設下，如果在設計上要求子午面的流动是势流的流綫的迴轉面作为 F_1 面，則它就可以用文献[3]計算法或水电比拟[6]等法在沒有轉子的情况下求得．

作 F_1 面的正交迴轉面 F_2，再作通过水輪机軸的半平面 F_3．設这三个正交曲面族 F_1，F_2，F_3 的方程分别是：

$$q_1 = 常数,\quad q_2 = 常数,\quad q_3 = 常数. \tag{2.1}$$

q_1，q_2，q_3 組成本問題的正交曲綫坐标系．

在这坐标系中，連續方程及无旋方程在 q_1 軸上的投影分别为[1]：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial(H_2H_3v_1)}{\partial q_1}+\frac{\partial(H_1H_3v_2)}{\partial q_2}+\frac{\partial(H_1H_2v_3)}{\partial q_3}=0,\\&\frac{\partial(H_1v_3)}{\partial q_2}-\frac{\partial(H_2v_2)}{\partial q_3}=0.\end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

H_1，H_2，H_3 是拉梅系数，其中显然可令 $H_1 = R$，R 是指定点到水輪机中心軸的距离，此时 q_3 就是輻角 θ．

引进新的坐标 u，z 和 u，z 面上的速度 v_u，v_z：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{H_2}{H_3}dq_2 = dz,\qquad dq_3 = d\theta = du,\\&v_z = H_3v_2 = Rv_2,\ v_u = H_3v_3 = Rv_\theta,\\&H_1(q_2) = h(z),\end{aligned}\right\} \tag{2.3}$$

并引进如下定义的势函数 $\varphi(u, z)$ 及广义流函数 $\psi(u, z)$：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\varphi}{\partial z} = v_z^{(\varphi)},\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial u} = v_u^{(\varphi)},\\&\frac{\partial\psi}{\partial z} = hv_u^{(\psi)},\qquad \frac{\partial\psi}{\partial u} = -hv_z^{(\psi)}.\end{aligned}\right\} \tag{2.4}$$

考虑到 $v_1 \equiv 0$ 的假設及(1.3)的事实，把 $\left(\frac{h'}{h}\right)^2\left(h' = \frac{dh}{dz}\right)$ 和 $\frac{d}{dz}\left(\frac{h'}{h}\right)$ 从方程中略去后，方程組(2.2)就化为拉普拉斯方程：

$$\nabla^2\Phi = 0,\quad \nabla^2\Psi = 0, \tag{2.5}$$

式中 $\Phi = \sqrt{h}\cdot\varphi$，$\Psi = \frac{1}{\sqrt{h}}\psi$，而 v_u 和 v_z 即由下式确定：

$$v_u = v_u^{(\varphi)} + v_u^{(\psi)} = \frac{\partial\varphi}{\partial u} + \frac{1}{h}\frac{\partial\psi}{\partial z} = \frac{1}{\sqrt{h}}\left[\frac{\partial\Phi}{\partial u} + \frac{\partial\Psi}{\partial z} + \frac{h'}{2h}\Psi\right], \tag{2.6}$$

$$v_z = v_z^{(\varphi)} + v_z^{(\psi)} = \frac{\partial\varphi}{\partial z} - \frac{1}{h}\frac{\partial\psi}{\partial u} = \frac{1}{\sqrt{h}}\left[\frac{\partial\Phi}{\partial z} - \frac{\partial\Psi}{\partial u} - \frac{h'}{2h}\Phi\right]. \tag{2.7}$$

1) 另外二个无旋方程不能同时滿足．

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

本节在以后都是按(2.3)式定义的 u, z 面(或称計算面)进行計算，不再另作說明.

§ 2. 奇点栅的誘导速度

我們底下也用奇点分布法計算，所以就要求奇点栅(涡源栅)的誘导速度. 設 n 代表叶片数目，在 u, z 面上栅距就是 $t=\frac{2\pi}{n}$，奇点的位置为 $(u+mt, z)$, $m=0, \pm1, \pm2, \cdots$, 点源的強度为 q_0, 点涡的強度为 γ_0 (以順时針为正), u_0, z_0 代表速度場的坐标. 此时

$$\left.\begin{aligned}\Phi &= \frac{q_0}{4\pi\sqrt{h(z)}}\ln\{2[\mathrm{ch}\,n(z_0-z)-\cos n(u_0-u)]\},\\ \Psi &= \frac{\gamma_0\sqrt{h(z)}}{4\pi}\ln\{2[\mathrm{ch}\,n(z_0-z)-\cos n(u_0-u)]\}.\end{aligned}\right\}\tag{2.8}$$

代入(2.6)和(2.7)可求得在 u, z 面上源涡栅的誘导速度公式为

$$2t\sqrt{h(z_0)}\,v_u^*(u_0, z_0)=\frac{\bar{q}_0\sin u_1+\bar{\gamma}_0\,\mathrm{sh}\,z_1}{\mathrm{ch}\,z_1-\cos u_1}+\frac{h'(z_0)}{2h(z_0)}\cdot\frac{\bar{\gamma}_0}{n}\ln 2(\mathrm{ch}\,z_1-\cos u_1),\tag{2.9}$$

$$2t\sqrt{h(z_0)}\,v_z^*(u_0, z_0)=\frac{\bar{q}_0\,\mathrm{sh}\,z_1-\bar{\gamma}_0\sin u_1}{\mathrm{ch}\,z_1-\cos u_1}-\frac{h'(z_0)}{2h(z_0)}\cdot\frac{\bar{q}_0}{n}\ln 2(\mathrm{ch}\,z_1-\cos u_1),\tag{2.10}$$

其中

$$\bar{q}_0=\frac{q_0}{\sqrt{h(z)}},\quad \bar{\gamma}_0=\gamma_0\cdot\sqrt{h(z)},\tag{2.11}$$

$$u_1=n(u_0-u)=\frac{2\pi}{t}(u_0-u),\ z_1=n(z_0-z)=\frac{2\pi}{t}(z_0-z).\tag{2.12}$$

这个解也可由瓦兰德[6]的解(4.17)，由(5.11)中取一項(即一次近似)求和而得.

当 z_1 較大时，(2.9)和(2.10)有

$$\left.\begin{aligned}v_u^* &\longrightarrow\begin{cases}\dfrac{\gamma_0}{2t} & \text{当 } z_1 \text{ 是正的大数},\\ -\dfrac{\gamma_0}{2t} & \text{当 } z_1 \text{ 是負的大数},\end{cases}\\ hv_z^* &\longrightarrow\begin{cases}+\dfrac{q_0}{2t} & \text{当 } z_1 \text{ 是正的大数},\\ -\dfrac{q_0}{2t} & \text{当 } z_1 \text{ 是負的大数},\end{cases}\end{aligned}\right\}\tag{2.13}$$

这就是在离开奇点前后較远处的边界条件.

上述的 γ_0 和 q_0 都是定义在 u, z 面上的，但可以証明，它和未变换前的 q_2, q_3 面上的 q_0 和 γ_0 是一样的，并且可以証明流綫也不变[8].

§ 3. 叶剖面的計算

每一流层中叶片間的流动情况都有相应的在变厚度无限薄 u, z 平面上无穷叶栅間的流动. 根据已得出的 u, z 面上源涡栅的誘导速度公式(2.9)和(2.10)，就可应用奇点分布法来計算剖面.

任取一流层，厚度是 $H_1dq_1=h(z)dq_1$, 通过的流量是 $Q_i\,dq_1$, 水头是 H, 水力效率是 η, 轉子的角速度为 ω, 此时，相对速度 $\bar{w}$ 为

$$w_u=v_u-\omega R^2,\ w_z=v_z.\tag{2.14}$$

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

繞叶栅的流动 (v_u, v_z) 是由不存在奇点时的軸对称流动 (v_{ou}, v_{oz}) 和奇点引起的扰动速度 (v_u^*, v_z^*) 迭加而得，即

$$v_u = v_{ou} + v_u^*, \quad v_z = v_{oz} + v_z^*. \tag{2.15}$$

由理論和实驗已知，叶片扰动的不均匀部分仅在叶栅前后不远处有影响，在离开叶片前后約一个栅距处，流动差不多就是軸对称的.

叶栅对流动的扰动是采用分布在骨綫上的点源点涡奇点栅来代替的，奇点分布的选择是使得以下的条件得到滿足：

(1) 骨綫的定义是指翼剖面内的一根曲綫，其二边的平均速度的法向分量为零，也即骨綫本身是"流綫"

$$\frac{du}{v_u^* + v_{ou} - \omega R^2} = \frac{dz}{v_z^* + v_{oz}}, \tag{2.16}$$

其中 v_u^* 和 v_z^* 在骨綫二边是不等的，上式中系指平均速度. 所以在流綫二字上加上引号.

(2) 为使剖面曲綫是封閉的，要求

$$q_0 + \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{1}{2}l} q(s)ds = 0. \tag{2.17}$$

这里，s 是骨綫上中点到骨綫上某点的弧长，q_0 是为了得到叶片前緣的圓形而放置在骨綫前端 $s = \frac{1}{2}l$ 处的集中点源的强度. 同时这根封閉流綫的形状还应滿足某些給定的剖面参数(最大厚度 d_{max} 及其位置 x_d，叶片前緣圓形的曲率半径 ρ 等等).

(3) 保証給定的出力，即分布在骨綫上的旋涡之和应等于給定的繞叶片的环量

$$\Gamma = \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{1}{2}l} \gamma(s)ds. \tag{2.18}$$

(4) 滿足在离叶片較远处的边界条件，即在 $z = z_{上}$ 处的速度应和給定的一致.

(5) 骨綫尾端的分布旋涡 $\gamma(s)$ 必須为零，而且得滿足罕尔德 (Hölder) 条件，即庫塔-茹科夫斯基条件.

假如叶片的骨綫已經給出，則沿骨綫分布的奇点栅所引起的总的誘导速度可由式(2.9)，(2.10)沿骨綫之一积分而得：

$$\left.\begin{aligned} 2t\sqrt{h(z_0)}\, v_u^*(u_0, z_0) = &\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{1}{2}l} \frac{\bar{q}\sin u_1 + \bar{\gamma}\,\mathrm{sh}\, z_1}{\mathrm{ch}\, z_1 - \cos u_1} ds + \\ &+ \int_{-\frac{1}{2}l}^{+\frac{1}{2}l} \frac{h'(z_0)}{2h(z_0)} \cdot \frac{\bar{\gamma}}{n} \ln 2(\mathrm{ch}\, z_1 - \cos u_1) ds + \frac{\bar{q}_0 \sin u_1}{\mathrm{ch}\, z_1 - \cos u_1}, \end{aligned}\right\} \tag{2.19}$$

$$\left.\begin{aligned} 2t\sqrt{h(z_0)}\, v_z^*(u_0, z_0) = &\int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \frac{\bar{q}\,\mathrm{sh}\, z_1 - \gamma \sin u_1}{\mathrm{ch}\, z_1 - \cos u_1} ds - \\ &- \int_{-\frac{1}{2}l}^{+\frac{1}{2}l} \frac{h'(z_0)}{2h(z_0)} \cdot \frac{\bar{q}}{n} \ln 2(\mathrm{ch}\, z_1 - \cos u_1) ds + \\ &+ \frac{\bar{q}_0\,\mathrm{sh}\, z_1}{\mathrm{ch}\, z_1 - \cos u_1} - \frac{h'(z_0)}{2h(z_0)} \frac{\bar{q}_0}{n} \ln 2(\mathrm{ch}\, z_1 - \cos u_1), \end{aligned}\right\} \tag{2.20}$$

式中

$$\bar{q} = \frac{q}{\sqrt{h(z)}}, \quad \bar{\gamma} = \gamma \cdot \sqrt{h(z)}, \quad \bar{q}_0 = \frac{q_0}{\sqrt{h\left(\frac{l}{2}\right)}}. \tag{2.21}$$

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

当 z_1 較大时，即在 $z=z_B$，$z=z_{BM}$ 处，由(2.13)可得

$$\left.\begin{aligned} &v_u^*=\frac{\Gamma}{2t}, \quad v_z^*=0 \quad \text{当 } z_1 \text{ 为正的大数}, \\ &v_u^*=-\frac{\Gamma}{2t}, \quad v_z^*=0 \quad \text{当 } z_1 \text{ 为負的大数}. \end{aligned}\right\} \tag{2.22}$$

为了消除数学上的困难，(2.19)和(2.20)是分为三部分分别进行积分計算的：

$$v_u^*=V_u+v_{ua}+v_u', \quad v_z^*=V_z+v_{za}+v_z', \tag{2.23}$$

其中 v_{ua}，v_{za} 是包含奇点 $\frac{u_1}{u_1^2+z_1^2}$ 及 $\frac{z_1}{u_1^2+z_1^2}$ 的部分，v_u' 和 v_z' 是包含对数奇点的部分，V_u 和 V_z 是常义积分，可用数字积分法計算，則得到：

$$\begin{aligned}
V_u=&\frac{A_0l}{4t\sqrt{h(z_0)}}\left(\frac{63}{640}\pi\bar{a}_1^1-\frac{9}{128}\pi\bar{a}_2^1+\frac{23}{64}\pi\bar{a}_3^1-\frac{9}{64}\pi\bar{a}_4^1+\frac{63}{128}\pi\bar{a}_5^1+\right.\\
&\left.+\frac{167}{640}\pi\bar{a}_6^1\right)+\frac{A_1l}{210t\sqrt{h(z_0)}}(15\bar{a}_1^1+3\bar{a}_2^1+34\bar{a}_3^1+\cdots+3\bar{a}_4^1+15\bar{a}_5^1)+\\
&+\frac{A_2l}{210t\sqrt{h(z_0)}}(-10\bar{a}_1^1-\bar{a}_2^1+\bar{a}_4^1+10\bar{a}_5^1)+\\
&+\frac{A_3l}{630t\sqrt{h(z_0)}}(20\bar{a}_1^1+\bar{a}_2^1+\bar{a}_4^1+20\bar{a}_5^1)+\frac{A_4l}{1890t\sqrt{h(z_0)}}(-40\bar{a}_1^1-\\
&-\bar{a}_2^1+\bar{a}_4^1+40\bar{a}_5^1)+\frac{A_5l}{5670t\sqrt{h(z_0)}}(80\bar{a}_1^1+\bar{a}_2^1+\bar{a}_4^1+80\bar{a}_5^1)-\\
&-\frac{B_1l}{1680t\sqrt{h(z_0)}}(41b_0+216b_1+27b_2+272b_3+27b_4+216b_5+41b_6)-\\
&-\frac{B_2l}{1680t\sqrt{h(z_0)}}(-41b_0-144b_1-9b_2+9b_4+144b_5+41b_6)-\cdots\\
&\cdots-\frac{B_3l}{1680t\sqrt{h(z_0)}}(41b_0+96b_1+3b_2+3b_4+96b_5+41b_6)-\\
&-\frac{B_4l}{1680t\sqrt{h(z_0)}}(-41b_0-64b_1-b_2+b_4+64b_5+41b_6)+\frac{\bar{\varphi}_0l}{4t\sqrt{h(z_0)}}d(x_0,1),
\end{aligned} \tag{2.23.1}$$

$$\begin{aligned}
V_z=&\frac{A_0l}{4t\sqrt{h(z_0)}}\left(\frac{63}{640}\pi b_1-\frac{9}{128}\pi b_2+\frac{23}{64}\pi b_3-\frac{9}{64}\pi b_4+\frac{63}{128}\pi b_5+\frac{167}{640}\pi b_6\right)+\\
&+\frac{A_1l}{210t\sqrt{h(z_0)}}(15b_1+3b_2+34b_3+3b_4+15b_5)+\\
&+\frac{A_2l}{210t\sqrt{h(z_0)}}(-10b_1-b_2+b_4+10b_5)+\\
&+\frac{A_3l}{630t\sqrt{h(z_0)}}(20b_1+b_2+b_4+20b_5)+\\
&+\frac{A_4l}{1890t\sqrt{h(z_0)}}(40b_1-b_2+b_4+40b_5)+\\
&+\frac{A_5l}{5670t\sqrt{h(z_0)}}(80b_1+b_2+b_4+80b_5)+\cdots
\end{aligned}$$

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$$\cdots+\frac{B_1 l}{1680t\sqrt{h(z_0)}}(41\bar{a}_0+216\bar{a}_1+27\bar{a}_2+272\bar{a}_3+27\bar{a}_4+216\bar{a}_5+41\bar{a}_6)+$$
$$+\frac{B_2 l}{1680t\sqrt{h(z_0)}}(-41\bar{a}_0-144\bar{a}_1-9\bar{a}_2+9\bar{a}_4+144\bar{a}_5+41\bar{a}_6)+$$
$$+\frac{B_3 l}{1680t\sqrt{h(z_0)}}(41\bar{a}_0+96\bar{a}_1+3\bar{a}_2+3\bar{a}_4+96\bar{a}_5+41\bar{a}_6)+$$
$$+\frac{B_4 l}{1680t\sqrt{h(z_0)}}(-41\bar{a}_0-64\bar{a}_1-\bar{a}_2+\bar{a}_4+64\bar{a}_5+41\bar{a}_6)+$$
$$+\frac{\bar{Q}_0 l}{4t\sqrt{h(z_0)}}e(x_0,1)-\frac{h'(z_0)}{h(z)\sqrt{h(z_0)}}\frac{\bar{Q}_0 l}{8tn}f(x_0,1), \tag{2.23.2}$$

其中

$$a=\frac{\operatorname{sh}z_1}{\operatorname{ch}z_1-\cos u_1}-\frac{2z_1}{u_1^2+z_1^2};\quad b=\frac{2u_1}{u_1^2+z_1^2}-\frac{\sin u_1}{\operatorname{ch}z_1-\cos u_1};$$
$$c=\ln 2(\operatorname{ch}z_1-\cos u_1)-\ln(u_1^2+z_1^2);$$
$$d=\frac{\sin u_1}{\operatorname{ch}z_1-\cos u_1};\quad e=\frac{\operatorname{sh}z_1}{\operatorname{ch}z_1-\cos u_1};\quad f=\ln 2(\operatorname{ch}z_1-\cos u_1);$$
$$\bar{a}_0^1=a(x_0,-1)+\frac{h'(z_0)}{2h(z_0)n}\cdot c(x_0;1);$$
$$\bar{a}_1^1=a\left(x_0,-\frac{2}{3}\right)+\frac{h'(z_0)}{2h(z_0)n}\cdot c\left(x_0;-\frac{2}{3}\right),$$

.....

$$\bar{a}_0=a(x_0,-1)-\frac{h'(z_0)}{2h(z_0)n}\cdot c(x_0;-1);$$
$$\bar{a}_1=a\left(x_0,-\frac{2}{3}\right)-\frac{h'(z_0)}{2h(z_0)n}\cdot c\left(x_0;-\frac{2}{3}\right);$$

.....

$$v_u'=\frac{h'(z_0)l}{4h^{3/2}(z_0)tn}\Big\{-A_0\pi(\ln 2+x_0)+A_1[(x_0+\eta)^{(0)}-(x_0+\eta)^{(2)}]+$$
$$+A_2[(x_0+\eta)^{(1)}-(x_0+\eta)^{(3)}]+A_3[(x_0+\eta)^{(2)}-(x_0+\eta)^{(4)}]+$$
$$+A_4[(x_0+\eta)^{(3)}-(x_0+\eta)^{(5)}]+A_5[(x_0+\eta)^{(4)}-(x_0+\eta)^{(6)}]+$$
$$+\bar{\Gamma}_1\cdot\ln\frac{\pi l}{t}\Big\}, \tag{2.23.3}$$

$$v_z'=\frac{h'(z_0)l}{4h(z_0)^{3/2}tn}\Big\{-B_1(x_0+\eta)^{(0)}-B_2(x_0+\eta)^{(1)}-B_3(x_0+\eta)^{(3)}-$$
$$-B_4(x_0+\eta)^{(4)}-\left(2B_1+\frac{2}{3}B_3\right)\ln\frac{\pi l}{t}\Big\}; \tag{2.23.4}$$

式中

$$\bar{\Gamma}_1=\int_{-1}^{1}\bar{\gamma}(x)\,dx=\pi A_0+\frac{4}{3}A_1+\frac{4}{15}A_3+\frac{4}{35}A_5,$$

$$(x_0+\eta)^{(m)}=\sum_{n=0}^{m}C_n^m x_0^{m-n}\eta^{(n)},$$

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$C_n^m = \frac{m!}{(m-n)!\,n!};$$

$$\eta^{(n)} = \frac{(1-x_0)^{n+1}}{(n+1)^2}[(n+1)\ln|1-x_0|-1] + (-1)^n\frac{(1+x_0)^{n+1}}{(n+1)^2}[(n+1)\ln|1+x_0|-1].$$

現在来确定未扰动时的流动．由于 v_{ou} 和 v_{oz} 是軸对称的，即与坐标 u 无关，所以按公式(2.2)就有

$$v_{ou} = C_1 = 常数;\quad h(z)v_{oz} = C_2 = 常数. \tag{2.24}$$

C_1 及 C_2 可以根据迭加的速度，v_u, v_z 应满足下列的条件来确定：

(a) 根据連續条件，在 u, z 面的 $z = z_{\text{в}}$, $z = z_{\text{вы}}$ 处有

$$[2\pi h(z)v_z\,dq_1]_{\text{в вы}} = -Q_i\,dq_1$$

或

$$h(z)v_{oz} = v_{z\text{в}}\cdot h(z_{\text{в}}) = Uz_{\text{вы}}\cdot h(z_{\text{вы}}) = -\frac{Q_i}{2\pi}. \tag{2.25}$$

(b) 根据水輪机的基本方程，并且考虑到为了减少叶片出口涡旋动能損失，常取 $v_{2u\text{вы}} = 0$，則有

$$\left.\begin{aligned}\Gamma &= \frac{2\pi}{n}v_{\text{в}u} = \frac{2\pi}{n}v_{\text{в}u} = \frac{2\pi}{n}\frac{\eta gH}{\omega},\\ v_{2u} &= 0.\end{aligned}\right\} \tag{2.26}$$

再由(2.15)，(2.22)可得

$$v_{ou} = \frac{\Gamma}{2t}. \tag{2.27}$$

这样，(2.16) 中各項都可以計算了，骨綫也可由此而得．但在計算 v_u^* 和 v_z^* 时，又要求預先知道骨綫，在其上分布以选定的 γ 和 q 后，才能进行計算．所以实际上骨綫是用逐步近似法求得的．經驗指出，收斂是快的，作二次或三次近似就已足够了．

求得骨綫后，就进而計算剖面．

引入相对坐标 $x = \frac{2s}{l}$, $y = \frac{2\tau}{l}$．此处 s 是骨綫中点至骨綫上某点的弧长，方向是骨綫的切綫方向，τ 垂直于 s，l 是骨綫弧长．

因为剖面的周边是閉合流綫，我們又認为骨綫及其延綫也是流綫，并且注意到沿骨綫分布的源汇所流出来的液体在骨綫二旁各占一半，因而下式成立(图 2.1)：

$$\mp\int_0^{y_\pm} h(x, y)w_x(x, y)dy = \frac{1}{2}\left[\int_x^1 q(x)dx + Q_0\right] \tag{2.28}$$

当 $x<1$ 时，

其中

$$Q_0 = \frac{2}{l}q_0. \tag{2.29}$$

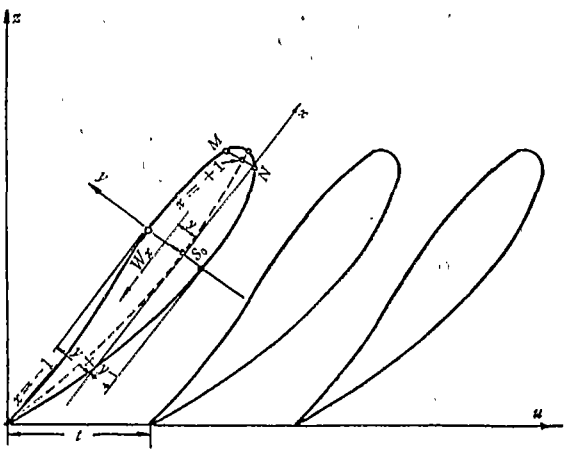

图 2.1

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

式中 w_x 是相对速度 (w_u, w_z) 在骨綫切綫方向的投影：

$$\left.\begin{aligned} w_u &= \frac{\Gamma}{2t} - \omega R^2 + V_u + v_{ua} + v'_u, \\ w_z &= v_{oz} + V_z + v_{za} + v'_z, \end{aligned}\right\} \tag{2.30}$$

$$\left.\begin{aligned} w_x &= w_u \cos\varphi + w_z \sin\varphi = \\ &= \left(\frac{\Gamma}{2t} - \omega R^2 + V_u + v'_u\right)\cos\varphi + (v_{oz} + V_z + v'_z)\sin\varphi + v_x. \end{aligned}\right\} \tag{2.31}$$

因为 w_x 及 h 对坐标 y 的变化，除去剖面的头尾端 $(x = \pm 1)$ 外，都是緩慢的，可用骨綫上的数值代替，而得到一次近似：

$$y_{\pm}^{(1)} = \mp \frac{Q_0 + \int_x^1 q(x)dx}{2h(x, 0)w_x(x, \pm 0)}. \tag{2.32}$$

如果想得到更高的精确度，則可以算二次近似

$$y_{\pm}^{(2)} = \mp \frac{\int_x^1 q(x)dx + Q_0}{h(x, 0)\, w_x(x, \pm 0) + h(x, y_{\pm}^{(1)})\, w_x(x, y_{\pm}^{(1)})}. \tag{2.33}$$

进口端部分的剖面計算比較困难复杂，而且与 γ 的选择等有关，我們将在另文中討論[1]。

§4. 参数与奇点分布函数的选择

在上面的叙述中，概括地給出了在一个流层中骨綫和剖面的計算方法，对一些具体的、但是重要的問題，例如 $\gamma(s)$、$q(s)$ 的选择等等都沒有提及。現在，我們根据这一阶段来的工作，对这些問題作一討論，并把总的計算步驟总結如下：

(1) 选定零次近似骨綫。它可以用直綫（如文献[8]），也可用别的曲綫，但愈是和眞实骨綫接近就越好，就收斂得愈快，也就可以节省計算工作。我們建議按二元理論的方法来定（可参見下一节）。

(2) $\bar{\gamma}(x)$ 的选择。它对于叶片形状和压力分布平均負有主要責任。由計算結果（見第四节）可見，如选得不好会得出不正确的骨綫。文献[8]，曾建議采用

$$\bar{\gamma}(x) = (1 - x^2)[A_1 + A_2 x + A_3 x^2 + \cdots], \tag{2.34}$$

但实际計算表明是不合用的（見第四节）。本文建議采用：

$$\bar{\gamma}(x) = A_0\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + (1 - x^2)(A_1 + A_2 x + A_3 x^2 + A_4 x^3 + A_5 x^4). \tag{2.35}$$

显然，上式是满足§3中条件(5)的。其中的常数則应由調压或其他条件确定。

(3) $\bar{q}(x)$ 的选择。它对于叶片形状的合理及符合強度等要求有很大影响。本文沿用爱金别尔格[2]的建議，取为多項式：

$$\bar{q}(x) = B_1 + B_2 x + B_3 x^2 + B_4 x^3. \tag{2.36}$$

系数 B_i 和 q_0 共五个未定常数，利用以下五个条件确定：

(Ⅰ)所有源汇的总強度为零，即(2.17)式；

(Ⅱ)翼型的最大厚度等于 d_{max}；

(Ⅲ)翼型的最大厚度在点 x_d；

1) 这一节的詳細内容以及公式推导可見中国科学院力学研究所混流式水輪机叶片設計和計算研究工作报告。

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

(Ⅳ)末端的尖角等于 θ;

(Ⅴ)进口处的曲率半径等于 ρ.

經过了一些数学运算后，得到五个相应的方程式：

$$Q_0 + \int_{-1}^{1} \sqrt{h}\,(B_1 + B_2 x + B_3 x^2 + B_4 x^3)\,dx = 0; \tag{2.37}$$

$$\left.\begin{aligned}(y_+ + y_-)_{\max} = \frac{1}{2h(x_d)}\left(\frac{1}{w_x(x_d, +0)} + \frac{1}{w_x(x_d, -0)}\right)\cdot \\ \cdot\left[Q_0 + \int_{x_d}^{1} \sqrt{h}\,(B_1 + B_2 x + B_3 x^2 + B_4 x^3)\,dx\right];\end{aligned}\right\} \tag{2.38}$$

$$B_1 + B_2 x_d + B_3 x_d^2 + B_4 x_d^3 = 0; \tag{2.39}$$

$$\theta = 2\operatorname{arc\,tg}\left[\frac{1}{2w_x(-1, 0)}\cdot\frac{1}{\sqrt{h(-1)}}\cdot(-B_1 + B_2 - B_3 + B_4)\right]; \tag{2.40}$$

$$Q_0 = \frac{4}{3}\pi\rho_1 |w_x(1, 0)|\cdot h(1),\ \rho_1 = \frac{2\rho}{l}. \tag{2.41}$$

以上諸式中之 w_x 均应按(2.31)式計算，但是目前 V, v', v 等值尚不知道，过去，用相似于爱金别尔格对于軸流式水輪机計算时的建議，用 w_∞ 近似代替 w_x. w_∞ 是指未扰动的流动，即本文中的 (w_{ou}, w_{oz})，在混流式中是不均匀的：

$$w_{ou} = \frac{\Gamma}{2t} - \omega R^2,\ w_{oz} = -\frac{Q_i}{2\pi h},$$

$$w_\infty = \sqrt{\left(\frac{\Gamma}{2t} - \omega R^2\right)^2 + v_{oz}^2}. \tag{2.42}$$

在基謝廖夫的計算方法[8]中，曾簡化地取 $w_x \cong w_\infty|_{x=0}$，这样近似的后果，会导致計算出来的剖面与預先要求的参数 $d_{\max}$, x_d, ··· 有較大的偏离，因此，希望能尽可能正确地預先来估算 w_x.

目前，v_{ou} 和 v_{oz} 是已知的，而 v_u^* 和 v_z^* 未知，它只能估計一下平均值，写成以下形式：

$$v_u^* = \alpha'\cdot\frac{\Gamma}{2t},\ v_z^* = -\beta'\cdot\frac{Q_i}{2\pi h}. \tag{2.43}$$

因它們不易估計，只能和二元理論相比較(見下一节)，可知

$$\alpha' = 2\alpha - 1. \tag{2.44}$$

β' 的变化規律主要地反映出源汇点沿骨綫的分布，也即叶剖面厚度变化的情况，它和排挤系数有关：

$$1 + \beta' = \frac{1}{\mu}, \tag{2.45}$$

其中 μ 是排挤系数.

此时相对速度的公式复原为

$$w_u = \alpha\frac{\Gamma}{t} - \omega R^2,\ w_z = -\frac{Q_i}{2\pi\mu h}, \tag{2.46}$$

与(2.42)相对应，引进

$$w'_\infty = \sqrt{\left(\alpha\frac{\Gamma}{t} - \omega R^2\right)^2 + \left(\frac{1}{\mu}v_{oz}\right)^2}. \tag{2.42'}$$

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

顺便提一下，骨綫方程此时就可写成

$$\frac{dz}{du}=\frac{\frac{1}{\mu}v_{oz}}{\alpha\frac{\Gamma}{t}-\omega R^2}. \tag{2.16'}$$

这在以后是要用到的.

应当指出，v_u^* 和 v_z^* 的三部分中［見(2.23)］，v_{ua}，v_{za} 当从骨綫两边趋近时是有間断的，設 v_{ua}，v_{za} 在骨綫上的切向和法向投影为 v_x 和 v_y:

$$\begin{aligned}v_{x\pm}=&\pm\frac{1}{2\sqrt{h(z_0)}}\left[A_0\sqrt{\frac{1+x_0}{1-x_0}}+(1-x_0^2)(A_1+A_2x+A_3x^2+A_4x^3+A_5x^4)\right]+\\&+\frac{B_1}{2\pi\sqrt{h(z_0)}}\ln\frac{1+x_0}{1-x_0}+\frac{B_2}{2\pi\sqrt{h(z_0)}}\left(-2+x_0\ln\frac{1+x_0}{1-x_0}\right)+\\&+\frac{B_3}{2\pi\sqrt{h(z_0)}}\left(-2x_0+x_0^2\ln\frac{1+x_0}{1-x_0}\right)+\\&+\frac{B_4}{2\pi\sqrt{h(z_0)}}\left(-\frac{2}{3}-2x_0^2+x_0^3\ln\frac{1+x_0}{1-x_0}\right)+v_{kx};\end{aligned} \tag{2.23.5}$$

$$\begin{aligned}V_{y\pm}=&\frac{1}{2\sqrt{h(z_0)}}[B_1+B_2x_0+B_3x_0^2+B_4x_0^3]+\frac{A_0}{2\pi\sqrt{h(z_0)}}-\\&-\frac{A_1}{2\pi\sqrt{h(z_0)}}\left[2x_0+(1-x_0^2)\ln\frac{1+x_0}{1-x_0}\right]-\frac{A_2}{2\pi\sqrt{h(z_0)}}\left[-\frac{4}{3}+2x_0^2+\right.\\&\left.+x_0(1-x_0^2)\ln\frac{1+x_0}{1-x_0}\right]-\frac{A_3}{2\pi\sqrt{h(z_0)}}\left[-\frac{4}{3}x_0+2x_0^3+\right.\\&\left.+x_0^2(1-x_0^2)\ln\frac{1+x_0}{1-x_0}\right]-\frac{A_4}{2\pi\sqrt{h(z_0)}}\left[-\frac{4}{15}-x_0^2\left(\frac{4}{3}-2x_0^2\right)+\right.\\&\left.+x_0^3(1-x_0^2)\ln\frac{1+x_0}{1-x_0}\right]-\frac{A_5}{2\pi\sqrt{h(z_0)}}\left[-\frac{4}{15}x_0-x_0^3\left(\frac{4}{3}-2x_0^2\right)+\right.\\&\left.+x_0^4(1-x_0^2)\ln\frac{1+x_0}{1-x_0}\right],\end{aligned} \tag{2.23.6}$$

其中

$$v_{kx}=-\frac{\bar{\Gamma}}{4\pi r^*\sqrt{h(z_0)}}\qquad\left(r^*=\frac{2r}{l}\right),$$

由式中可知，此时骨綫二边 v_x 之差为 $\frac{\bar{\gamma}(x)}{\sqrt{h}}=\gamma$、$v_y$ 之差为 $\frac{q(x)}{\sqrt{h}}=\frac{q}{h}$. 由于在(2.43)及(2.46)中取的是 v_u^* 和 v_z^* 的平均值，实际上是相当于无限多叶片假設下的情况，把那个不連續性抹平了，所以，如果考虑到 v_u、v_z 的不連續性时，w_x 在骨綫二边的值应按下式計算：

$$w_x(x,\pm 0)=w_{x\pm}=\sqrt{\left(\alpha\frac{\Gamma}{t}-\omega R^2\right)^2+\left(\frac{1}{\mu}v_{oz}\right)^2}\pm\frac{\gamma}{2}. \tag{2.47}$$

此时(2.38)成为

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$(y_+ + y_-)_{\max} = \frac{1}{\sqrt{h(x_d)}} \cdot \frac{Q_0 + \int_{x_d}^{1} \sqrt{h}\,(B_1 + B_2 x + B_3 x^2 + B_4 x^3)\,dx}{w'_\infty - \dfrac{\left(\dfrac{\gamma}{2}\right)^2}{w'_\infty}}. \tag{2.48}$$

由此可見，只有当 $\frac{\gamma}{2} \ll w'_\infty$ 及 $\alpha = \frac{1}{2}$，$\mu = 1$ 时，上式才可以用 w_∞ 来代替 w_x，这在高比速的水輪机中是相当近似的，但目前是不妥当的。

为了正确地計算，应采用(2.48)，其中 α，μ 的选择可見下一节。

在式(2.37)，(2.38)中，要用到 $n(n = 2, 3, \cdots, 6)$ 等分的柯切斯数字积分法积分。

方程(2.39)意味着在点 x_d 处，(2.48)中的分子最大。但由于分母并不是常数，所以 x_d 处并不見得是最厚处，一般說来，γ 越往前(x 越大)就越大，而 w'_∞ 就会減小，所以最大厚度处在 x_d 的前面，往前推移多少，則尙待解决。

再強調一遍，由于增加了(1.4)这一項，(2.37)—(2.41)不复正确，已如前面所述。

(4) 确定 $\bar{\gamma}(x)$，$\bar{q}(x)$ 后，即可按照公式計算 V_u，V_z，v'_u，v'_z，$v_{x\pm}$，$v_{y\pm}$。通常把骨綫六等分，即对 $x_0 = 0$，$\pm\frac{1}{3}$，$\pm\frac{2}{3}$，± 1 七个点来进行計算。因为 v_x 的計算中由于 $\bar{q}(x)$ 引起的部分是主值积分，而 $q(x)$ 在 $x = \pm 1$ 点不是零，另外，在 $x = +1$ 处有点源 q_0，所以在 $x = \pm 1$ 点速度的計算中会出現无限大值。但是考虑到在 $x = \pm 1$ 点上的源点存在与否对于骨綫在該点本身处的斜率不应有影响，因此在計算骨綫时，对于这些无穷大的出現可以当作零来处理。于是 $x = \pm 1$ 点也可以同其他点一样进行計算。

(5) 在上述計算中，$\bar{\gamma}(x)$ 的系数 A_i 是未定的，現在就可以根据調压条件来确定。在叶剖面的負压面(凸面)上压力分布越均匀，就能降低气蝕系数。根据相对运动的白努利方程，忽略叶片各点間的水位差后，在各点上压力相等也就是要求 $\left(\frac{w_{x-}}{R}\right)^2 - (\omega R)^2$ 值相等。由于流速沿出口方向增大，汽蝕通常容易在叶片后半部发生，我們建議用解方程的办法使比較靠后的三点的 $\left(\frac{w_{x-}}{R}\right)^2 - (\omega R)^2$ 相等的方法来調压[1]。根据經驗，取 $x = -\frac{2}{3}$，$-\frac{1}{3}$，0 或 $x = -\frac{2}{3}$，0，$\frac{1}{3}$ 为佳，此时在解方程时未取的二点压力都比較大，压力分布較为均匀。

在实际計算中，$\bar{\gamma}(x)$ 取前四項即够，即有 A_0，A_1，A_2，A_3 四个常数，因此要有四个方程来确定。根据三点上的压力相等可列出二个方程，再加上(2.18)，則还缺少一个条件。当然可以令第四点的压力与上述三点相等，但本文建議用指定头部的迎角 ε 为給定值作为最后一个条件。本文中零次骨綫是应用二元理論，在无穷多叶片的假設下得到的，骨綫头部的斜率 $\operatorname{tg}\varphi_0|_{x=1}$ 是已知，在給定迎角 ε 以后，$\varphi|_{x=1}$ 也就确定了：

$$\varphi|_{x=1} = \varphi_0|_{x=1} - \varepsilon. \tag{2.49}$$

1) 南开大学数学系同志們曾建議令所有各点間压力差的平方和为最小的方法来調压。

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

代入 $-\operatorname{tg}\varphi=\dfrac{v_{oz}+V_z+v'_z+\dfrac{v_{y+}+v_{y-}}{2\cos\varphi}}{\dfrac{\Gamma}{2t}-\omega R^2+V_u+V'_u}$ 中，就得到最后一个联系 A_i 的方程，这个方程对于 A_i 来說是綫性的，用起来很方便．ε 值按照 B. C. 克維揚特科夫斯基的研究[4] 可取为 1—4°．

在 w_x 的算式中，A_i 是綫性地出現的，但方程

$$\left[\left(\frac{w_{x-}}{R}\right)^2-(\omega R)^2\right]_{-2/3}=\left[\left(\frac{w_{x-}}{R}\right)^2-(\omega R)^2\right]_{-1/3}=\left[\left(\frac{w_{x-}}{R}\right)^2-(\omega R)^2\right]_0 \tag{2.50}$$

是非綫性的，幸而在某些情况下，可以化为一次的方程来解．在混流式水輪机中，发生气蝕大致在下环附近，假如我們取下环附近的流层来进行調压，則此时 R 的变化不大，(2.50)就可以簡化，取前一个等号为例．令

$$\varepsilon_1=(\omega R)^2_{2/3}-(\omega R)^2_{-1/3}, \tag{2.51}$$

它是很小的因 R 相差不多之故，由(2.50)可知，$\dfrac{w_{x-}}{R}$ 相差也一定不多，記为 ε_2：

$$\left(\frac{w_{x-}}{R}\right)_{-2/3}=\left(\frac{w_{x-}}{R}\right)_{-1/3}+\varepsilon_2. \tag{2.52}$$

把(2.52)和(2.51)代入(2.50)，并略去 ε_2 的平方項，可得

$$\varepsilon_2=\frac{\varepsilon_1}{2\dfrac{w_{x-}}{R}}, \tag{2.53}$$

其中 ε_1 是已知的，w_{x-} 也只要估一个約值就行了，因这一項在(2.52)中起很小影响，有一点誤差并不碍事，w_{x-} 建議采用 $w'_\infty-\dfrac{\gamma}{2}$．求得了 ε_2，方程(2.52)就是綫性的，解起来很方便．經过計算，說明这个方法很有效．

在調压时，w_{x-} 当然可以按(2.31)式計算，但是由于骨綫尚未算出，所以式中的 φ 值系取自零次骨綫的．这样，調压和骨綫計算也可逐步近似，即按零次骨綫 φ_0 进行調压，确定 A_i，可算出骨綫，根据算出的 φ 重新調压，改变 A_i 值，再算出骨綫等等．一般反复一次即可．

(6) 确定了 A_i 之后，就可算出七个等分点处的 φ 值及 $\operatorname{tg}\varphi$ 值．在文献[2,3]中，是用作图法繪制骨綫的，即根据算得的角度 φ 在保持骨綫各段长度不变的情况下作成折綫，再通过各折綫中点作内切的光滑曲綫．显然，这样的誤差較大，本文建議采用数字积分法求出骨綫各等分点的坐标 u_i, z_i．通过这些点作光滑曲綫即得骨綫．在作图时应保証在等分点处的 $\operatorname{tg}\varphi$ 与計算給出的一致．骨綫的长度 l 可以是合其等于預先給定的数，也可以由給定叶片的包角 Θ [也即末端的坐标 $u=-\Theta$]的条件来确定．

(7) 以所得的一次近似骨綫为基础，重复以上全部步驟，就可以得到二次近似骨綫．以此类推，还可以得到更高的近似．在本文提出的方法中，由于零次骨綫是按二元理論算出的，所以收斂得很快，一般作二次近似已足够了．对于气蝕危险性小的流层，在計算并不要求很严格的情况下，甚至作一次近似也够了．

(8) 在求出骨綫后，最后就是繪制剖面．按(2.32)式計算各等分点处的剖面厚度連

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

成光滑的封閉曲綫即得叶剖面，不过在添了(1.4)这項之后，这样算剖面是不妥当的，这将在另文中討論。

至此，轉化在 u, z 面上的一个流层的叶片計算全部完成。

三、上述方法和推广的二元理論联合使用

如上所述，我們已經有了对水輪机中各流层的叶片截面的設計方法了，但这个設計方法是只对一个流层考虑的，而沒有照顧到从流层到流层之間的联系。实际上在水輪机中，这是应当考虑的。在二元理論中（假定叶片数目无限多），当某一流层的叶片骨綫形状确定以后，其他各流层的叶片骨綫形状也随之而定，它們之間的联系是通过函数 $v_\theta R$ 来达到的。在子午面的流动为势流的情况，$v_\theta R$ 在叶片曲面上只是輻角 θ 的函数，它对于各流层是通用的。因为二元理論有这样一个优点，所以我們考虑把它和前一节所述的方法結合起来，以設計叶片，即可避免孤立設計翼剖面的缺点。在本节中除对二元理論加以推广外，并为此方法作了一些理論与算法說明[1]。

二元理論的內容大意如下：

(1) 假定叶片数无限多，流动是軸对称的，叶片就用旋涡层来代替，涡綫恆在叶片曲面上。在涡綫上，函数 $v_\theta R$ 是一个常数。

(2) 在子午面的流动是势流的情况下，旋涡綫在子午面內，因而 $v_\theta R$ 在叶片曲面上也只是輻角 θ 的函数；当变换到 u, z 平面上时，对各流层說来也就只是 u 的函数。

(3) 因为叶片的前后緣就是旋涡綫，所以它們各在一个子午面上，其間的夹角 Θ 称之为包角。

(4) 反过来，假如假定 $v_\theta R$ 在叶片曲面上只是輻角 θ 的函数，换言之，假定旋涡綫在子午面之內，則立刻可以知道此时子午面的流动一定是势流。它是上述的第二条之逆。

将瓦兰德教授的理論和二元理論的推广联合使用时的想法如下：

(1) 叶片是有限多的，叶片也用旋涡层来代替。叶片本身在流場中是一个不連續面，我們把它二面的速度差同旋涡的概念联系起来，定义出面涡向量 Ω 和面涡綫。面涡綫也在叶片曲面上。以后可証明，当叶片数 n 趋于无限多，而流場均匀起来以后，就和二元理論一致了。

(2) 在叶片曲面上定义一个函数 Γ_a，它就相当于二元理論中的 $v_\theta R$。可以証明，它在面涡綫上也是一个常数。这一条和上一条可以同上述的二元理論的第一条相比較。当叶片数目 n 趋于无穷多时，Γ_a 和 $v_\theta R$ 只相差一个常数因子。

(3) 要求面涡綫在子午面內，此时前后緣当然也在子午面內了，而 Γ_a 函数也就只是輻角 θ 的函数；同样，在轉换到 u, z 平面之后，对各流层来說，也就只是 u 的函数。可以証明，面涡綫在子午面內的条件，当叶片数 n 趋于无限多时，就变成子午面流动为势流的条件。这就是联合使用二元理論的推广和瓦兰德教授的理論的根据。用保証面涡綫在子午面內的条件来近似地(当叶片数 n 趋于无限多时就真实了)凑和子午面流动是势流的条件。

(4) Γ_a 函数同第二节的 u, z 平面上的叶片上分布的 γ 有密切关系［見(3.16)式］。

1) 詳細論証請見中国科学院力学研究所 1959 年水輪机研究工作报告。

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

Γ_a 只是 u 的函数这一点就把各流层之間的 γ 給联系起来了．确定了一个流层的 γ，对其他流层的 γ 也就定下来了［見(3.18)式］．联合应用上一节的方法和二元理論的推广也就是通过(3.18)实現的．

以下就对上述这些內容，进行闡明．

先描述一下我們采用的坐标系統．坐标取的是圓柱坐标，以水輪机軸为 ζ 軸；空間某点至 ζ 軸的距离为 R，坐标安放在工作輪上，也即跟着水輪机一起轉动，是相对坐标，輻角取为 θ．用 $\mathbf{v}$ 代表絕对速度，分量为 v_ζ、v_R，v_θ；$\mathbf{w}$ 代表相对速度，即相对于工作輪的速度．絕对速度場是連續无旋的，因为有这一点好处，所以后文証明时都采用絕对速度，而用相对坐标系来描写絕对流动．要求在叶片后緣速度連續[1]．因流場是无旋的，故在流場內部无所謂涡量涡綫．把叶片当作流場中一不連續面，正面的速度記以附标 +，反面的記以附标 −．

在叶片曲面上定义面涡向量 Ω，其分量如下：

$$\left.\begin{aligned}\Omega_\zeta &= \Delta v_\theta \cos(\bar{n}, s) - \Delta v_R \cos(\bar{n}, \theta),\\ \Omega_\theta &= \Delta v_R \cos(\bar{n}, \zeta) - \Delta v_\zeta \cos(\bar{n}, R),\\ \Omega_R &= \Delta v_\zeta \cos(n, \theta) - \Delta v_\theta \cos(n, \zeta).\end{aligned}\right\} \tag{3.1}$$

其中 n 指的是叶片的法綫方向，而 Δ 指的是叶片两面的速度差．显然下一等式成立：

$$\Omega_\zeta \cos(\bar{n}, \zeta) + \Omega_\theta \cos(\bar{n}, \theta) + \Omega_R \cos(\bar{n}, R) = 0. \tag{3.2}$$

这就是向量 Ω 在叶片平面之內的条件．叶片上涡綫的定义为

$$\frac{d\zeta}{\Omega_\zeta} = \frac{R d\theta}{\Omega_\theta} = \frac{dR}{\Omega_R}, \tag{3.3}$$

要求涡綫在子午面內，即是

$$\Omega_\theta = 0 \tag{3.4}$$

的条件．

引进函数 $\Gamma_a(P)$ 如下：

$$\Gamma_a(P) = \int_{P_2}^{P} [\Delta v_\theta R\, d\theta + \Delta v_\zeta d\zeta + \Delta v_R dR], \tag{3.5}$$

其中 P 代表叶片上的某一点，P_2 代表叶片出口緣的某点，积分路綫是在叶片上，这个函数只定义在某一叶片曲面上．

由(3.5)式可知，因 $\Delta\bar{v}$ 在叶片后緣上为零，故 $\Gamma_a(P)$ 在叶片后緣上为零．

显然可以証明，$\Gamma_a(P)$ 和积分路綫无关，而只是 P 点的函数，而且和 P_2 无关．

假如当 P 走到进口緣 P_1，此时

$$\Gamma_a(P_1) = \Gamma, \tag{3.6}$$

它就是一个叶片的环量．

現在再引进一个在叶片上的活动坐标系，坐标軸之一为叶片的法綫 $\bar{n}$，另一为积分路綫的切綫，記为 S_1，其三为垂直于 $\bar{n}$ 和 S_1 的方向，記为 b，取右手坐标系．显然 b 也在叶片的切平面內．$(\bar{n}, S_1, b)$ 和 (R, ζ, θ) 的方向余弦列在表(3.1)內．此时(3.5)式可改写为

1) 一般的三維机翼是有尾旋的，此时在后緣的速度并不連續．但尾旋代表能量有損失，因此在水輪机設計中要求沒有尾旋，即速度連續．

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\Gamma_a(P)=\int_{P_2}^{P}(\Delta v_\theta\gamma_3+\Delta v_\zeta\gamma_2+\Delta v_R\gamma_1)\,dS_1=\int_{P_2}^{P}\Omega_b\,dS_1, \tag{3.7}$$

其中 Ω_b 是 Ω 在 b 方向的分量.

表 3.1

	$\bar{n}$	b	S_1
R	α_1	β_1	γ_1
ζ	α_2	β_2	γ_2
θ	α_3	β_3	γ_3

由(3.7)式可以証明，当 dS_1 的方向和涡綫一致时，此时必然有 $\Omega_b=0$，这就說明了 $\Gamma_a(P)$ 函数在涡綫上是常数. (3.7)式卽是在本情况下的斯篤克斯定理.

也可証明，当叶片数目 n 趋近无穷多时，$n\cdot\Gamma_a$ 就和二元理論中的 $v_\theta R$ 一样了，它們之間只差一个常数.

因絕对速度是无旋的，故 $\operatorname{rot}\bar{v}=0$，又利用斯篤克斯定理，有等式

$$\oint_L \mathbf{v}\cdot\mathbf{dS}=0. \tag{3.8}$$

积分路綫 L 如图 2.1 所示，坐标是相对坐标，現在是用相对坐标系描写絕对速度.

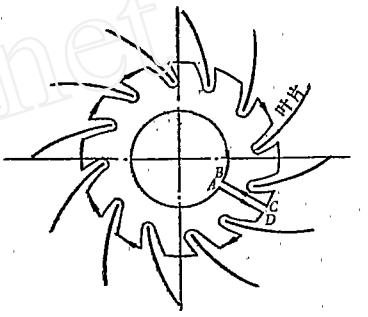

图 2.1

当沿着 AD 及 BC 积分时为零，因其是周期性的緣故. 沿着 BA 部分为

$$2\pi Rv_\theta\big|_{出工作轮后}$$

沿叶片表面的积分为 $n\cdot\Gamma_a$，沿 DC 其余部分积分时为

$$-2\pi Rv_\theta\big|_{平均},$$

而当叶片数趋近无穷大时，流場就均匀了. 又如設計要求，令 $2\pi v_\theta R\big|_{出工作轮后}$ 等于零，則有

$$\lim_{n\to\infty} n\cdot\Gamma_a=2\pi v_\theta R. \tag{3.9}$$

这就說明了 Γ_a 同 $v_\theta R$ 之間的关系.

下面証明，$\Omega_0=0$ 的条件，当叶片数目趋于无限多时就变成子午面为势流的条件，卽

$$\frac{\partial v_R}{\partial\zeta}-\frac{\partial v_\zeta}{\partial R}=0. \tag{3.10}$$

叶片曲面的方程为

$$\theta=F(R,\zeta). \tag{3.11}$$

对无限多叶片情况，可以証明：

$$\frac{\partial F}{\partial R}\frac{\partial v_\theta R}{\partial\zeta}-\frac{\partial F}{\partial\zeta}\frac{\partial v_\theta R}{\partial R}=0. \tag{3.12}$$

由 $\Omega_0=0$ 的条件，可知 Γ_a 在 $F(R,\zeta)$ 等于常数的曲綫上为常数，当 $n\to\infty$ 时，也就是 $v_\theta R$ 为常数，就可写成以下微分形式：

$$\left.\begin{aligned} dF&=\frac{\partial F}{\partial R}dR+\frac{\partial F}{\partial\zeta}d\zeta=0,\\ dv_\theta R&=\frac{\partial v_\theta R}{\partial R}dR+\frac{\partial v_\theta R}{\partial\zeta}d\zeta=0.\end{aligned}\right\} \tag{3.13}$$

因 $F(R,\zeta)$ 为常数并不退化为一个点，故 dR 和 $d\zeta$ 不能同时为零，則它的行列式为零，此卽(3.12)式，这就証明了：当叶片数 $n\to\infty$ 时，条件(3.4)就轉化为条件(3.10). 这些便是二元理論和前一节方法联合使用的根据.

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

在具体运用二元理論和前一节方法来設計水輪机时，采用以下步驟：

1）选定通道后就計算子午面为势流的流动，从而得到流面．再作从流面到 (u,z) 面的轉換．

2）先选择一个最容易发生气蝕的流层（一般在下环附近），用前一节方法經过調压等手續，設計出叶片形状．計算一开始的零次骨綫可用数字积分法解方程

$$\frac{dz}{du}=\frac{\frac{1}{\mu}v_{oz}}{\alpha\frac{\Gamma}{t}-\omega R^2} \tag{3.14}$$

而得，其中 v_{oz} 可見(2.25)，μ 是排挤系数[1]，α 函数可以凭經驗选择．

3）其他流层的 α 函数可以用以上調压而得的骨綫倒推出来（α 作为 u 的函数对各流层通用）：

$$\alpha=\frac{t}{\Gamma}\left[\frac{v_{oz}}{\mu\operatorname{tg}\varphi}+\omega R^2\right]_{\text{調压流层}}. \tag{3.15}$$

然后，再由(3.14)算出零項近似骨綫．

4）再用第二节的方法进行計算骨綫，此时 $\bar{\gamma}$ 函数就不再用調压法确定了，$\bar{\gamma}$ 的确定法体現联合推广的二元理論和前一节法的精神．因为在水輪机中叶片数是相当多的，所以我們就要求 $\Omega_n=0$，即子午面为势流的条件（見第一步）．如前所述，$\Omega_n=0$ 的条件也就是說 Γ_α 函数只是 α 的函数．当变换到 (u,z) 平面后，Γ_α 函数变成：

$$\Gamma_\alpha(u)=\int_{\text{末端}}^{(u,z)}\gamma(S)\,dS \tag{3.16}$$

是 u 的函数，对各流层通用．順便提一句，不难証明，当 $n\to\infty$ 时，$\frac{n}{2\pi}\Gamma_\alpha=\alpha\frac{\Gamma}{t}$．

在实用上，(3.16)并不方便．把它对 u 求导数，有

$$\frac{d\Gamma_\alpha(u)}{du}=\gamma\cdot\frac{dS}{du}=\frac{\bar{\gamma}}{\sqrt{h}\cos\varphi}. \tag{3.17}$$

所以在各流层之間，同一 u 坐标的，应当有

$$\Gamma'_\alpha(u)=\left(\frac{\bar{\gamma}}{\sqrt{h}\cos\varphi}\right)_{\text{調压流层}}=\left(\frac{\bar{\gamma}}{\sqrt{h}\cos\varphi}\right)_{\text{任一流层}}. \tag{3.18}$$

在实用上，使用(3.18)来得方便些．

由(3.18)式得知，当調压流层的 $\bar{\gamma}$ 和骨綫确定以后，其他流层的 $\bar{\gamma}$ 也就确定了．但还要說明二个問題．第一是对于其他流层，当 $\bar{\gamma}$ 尚未求得，因而骨綫也未求得时，何以知道它的 $\sqrt{h}$ 和 $\cos\varphi$；其二是如何把 $\bar{\gamma}$ 写成为形式(2.35)，也即如何确定 A_i 的問題．前一个問題可以这样近似地来做，在第一次用第二节方法計算时，$\cos\varphi$ 和 $\sqrt{h}$ 就采用由二元理論(3.14)求得的零次近似骨綫来計算，若求得的骨綫相差較多时，则应当应用第一次計算求得的 $\cos\varphi$ 作第二次計算，直至收歛得較为滿意为止．

第二个問題可以这样解决，公式(2.35)中的 A_0，因 $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ 在 $x\to1$ 时是无限大，

1）有关排挤系数的討論可見中国科学院力学研究所一九五九年水輪机研究工作报告．

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

所以应当有关系：

$$\left[\frac{A_0}{(\sqrt{h}\cos\varphi)_{x=1}}\right]_{\text{調压流层}}=\left[\frac{A_0}{(\sqrt{h}\cos\varphi)_{x=1}}\right]_{\text{任一流层}}. \tag{3.19}$$

另外几个常数 A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 应当如此确定，使得在 $x=\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}$ 五点满足(3.27)。正好是五个常数五个条件，这样求得的 $\bar{\gamma}$，因为有 $(1-x^2)$ 的因子，必然使 $x=-1$ 点的 $\gamma=0$ 条件（見前一节）及罕尔德条件满足。这种做法等于用一个插值多項式去追近一根曲綫。

需要注意的是，調压流层的 $x=\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}$ 五点的 u 坐标，并不相等于其他各流层的相应点的 u 坐标，換算时必須照顧到这一点。步驟如下：

(1) 算出(3.18)，并作 $\Gamma'_a(u)$-u 图。并找出某流层相应于分点 $x=\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}$ 的 u 坐标的值，再由 Γ'_a-u 图找到相应的 Γ'_a，再由

$$\bar{\gamma}=\sqrt{h}\cos\varphi\,\Gamma'_a \tag{3.20}$$

算得該流层各分点处的 $\bar{\gamma}$。

(2) 由(3.19)得到該流层的 A_0，再把 A_0 項由 $\bar{\gamma}$ 中減去，得到各分点处以下函数值：

$$\bar{\gamma}_a=\bar{\gamma}-A_0\sqrt{\frac{1+x}{1-x}},\ (\bar{\gamma}_a(+1)=\bar{\gamma}_a(-1)=0). \tag{3.21}$$

它应当等于

$$(1-x^2)(A_1+A_2x+A_3x^2+A_4x^3+A_5x^4) \tag{3.22}$$

用插值多項式的公式，簡化之后，可算得各常数如下：

$$\left.\begin{aligned}
A_1&=\bar{\gamma}_a(0),\\
A_2&=0.45\left[\bar{\gamma}_a\left(-\frac{2}{3}\right)-\bar{\gamma}_a\left(\frac{2}{3}\right)\right]-2.25\left[\bar{\gamma}_a\left(-\frac{1}{3}\right)-\bar{\gamma}_a\left(\frac{1}{3}\right)\right],\\
A_3&=-0.675\left[\bar{\gamma}_a\left(-\frac{2}{3}\right)+\bar{\gamma}_a\left(\frac{2}{3}\right)\right]+6.75\left[\bar{\gamma}_a\left(-\frac{1}{3}\right)+\bar{\gamma}_a\left(\frac{1}{3}\right)\right]-11.25\,\bar{\gamma}_a(0),\\
A_4&=-4.05\left[\bar{\gamma}_a\left(-\frac{2}{3}\right)-\bar{\gamma}_a\left(\frac{2}{3}\right)\right]+5.0625\left[\bar{\gamma}_a\left(-\frac{1}{3}\right)-\bar{\gamma}_a\left(\frac{1}{3}\right)\right],\\
A_5&=6.075\left[\bar{\gamma}_a\left(-\frac{2}{3}\right)+\bar{\gamma}_a\left(\frac{2}{3}\right)\right]-15.1875\left[\bar{\gamma}_a\left(-\frac{1}{3}\right)+\bar{\gamma}_a\left(\frac{1}{3}\right)\right]+20.25\,\bar{\gamma}_a(0).
\end{aligned}\right\} \tag{3.23}$$

这样的換算 $\bar{\gamma}$ 法在 $x=\pm1$ 处可能不太准，因为由于 A_0 項之故，由(3.20)和(3.21)而得的 $\bar{\gamma}_a$ 在 $x=\pm1$ 处的斜率是 ∞，而多項式不可能做到这一点。

四、計算結果的討論

在协作单位的大力支持下，应用前二节的理論，曾进行了初步計算。算得的調压流层的叶片形状相当有規則。其他流层的零次近似骨綫，也已用二元理論的方法算得。但对于其他各流层的骨綫和剖面，尙未用第二节方法全部算完。然而，这已說明了，这些方法是有前途的，值得継續进行研究和計算，使之可以用来設計水輪机。在計算中，因为經驗

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

不足，发生了一些問題，也想了一些办法．在本文中，主要只是討論一下重要問題，并不是作計算总結，我們打算以后再作一次計算总結，討論計算結果．

关于水輪机模型的选择及各种参数，都是根据另一篇研究报告給定[1]．所有长度单位都是毫米．

首先是計算通道的子午面势流，未考虑排挤，計算的（按文献[3]所述）和电比拟的方法都做了．但計算法的結果不稳定，这是一个問題．我們采用了电比拟法，測出等位綫，再作流綫，然而电比拟法精度难保証，这也是一个問題．后面的計算就当作这結果是精确的，継續做下去．

各流层的定名如图4.1．第一流层和第七流层就是下环和上冠，比起其他流层流量只有一半，其他各流层的流量是 $Q_i\,dq_1=\frac{1}{6}Q$，Q 是总流量．把 $z=0$ 处（即前緣）的流层厚度取为 dq_1，此时 $h=1$．考虑到第二流层是比較容易发生气蝕的，所以选择第二流层进行調压計算．

图4.1

在計算工作的进程中，最重要的是发現了关于如何合理选择叶片上的旋涡分布問題，对 $\bar{\gamma}$ 的二种分布形式(2.34)和(2.35)都进行了計算．根据結果，我們建議取成(2.35)的形式．在本节中主要討論的就是这二种 γ 的选择問題．

先談一下用(2.34)的 γ 而得的計算結果，分析一下原因及把 $\bar{\gamma}$ 改成(2.35)形式的好处，再談一下应用(2.35)的 $\bar{\gamma}$ 算得的一些結果．

用(2.34)式的 $\bar{\gamma}$ 对第二流层进行了二次近似的調压計算，所得結果如表(4.1)．因为

表4.1

x	-1	$-2/3$	$-1/3$	0	1/3	2/3	1
u	-0.5276	-0.4227	-0.3157	-0.2148	-0.1163	-0.0483	0
z	-0.3642	-0.3287	-0.2906	-0.2468	-0.1895	-0.1016	0
$\left(\frac{w_x}{R}\right)^2-(\omega R)^2$	—	283	283	284	167	-254	—
tg φ	0.3363	0.3447	0.3735	0.4716	0.7030	1.800	3.581
$A_1=11.175\times10^6$		$A_2=7.553\times10^6$		$A_3=2.508\times10^6$		$l=0.676$	

由計算而得的 tg φ 在 $x=1$ 点处过大，因此在积分骨綫时，$x=1$ 点的 tg φ 就取用二元理論的結果，tg $\varphi\cong2.5$，它远比計算結果3.58来得小．气蝕系数可按公式 $H_a'-h_s-\sigma H\geqslant0$[11] 估計．叶片的形状如图(4.2)．在表4.1中可見，叶片后緣的 z 較大，叶片在圓周投影中就拖得很长，超过了通常的长度，这可由图(4.3)中見到．图中有 x 的是通常用二元理論所得的后緣，而⊗是这回調压計算而得的后緣換算到圓周投影图中的位置，它掉下来得太多了．

1）可見中国科学院力学研究所1959年水輪机研究工作报告．

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

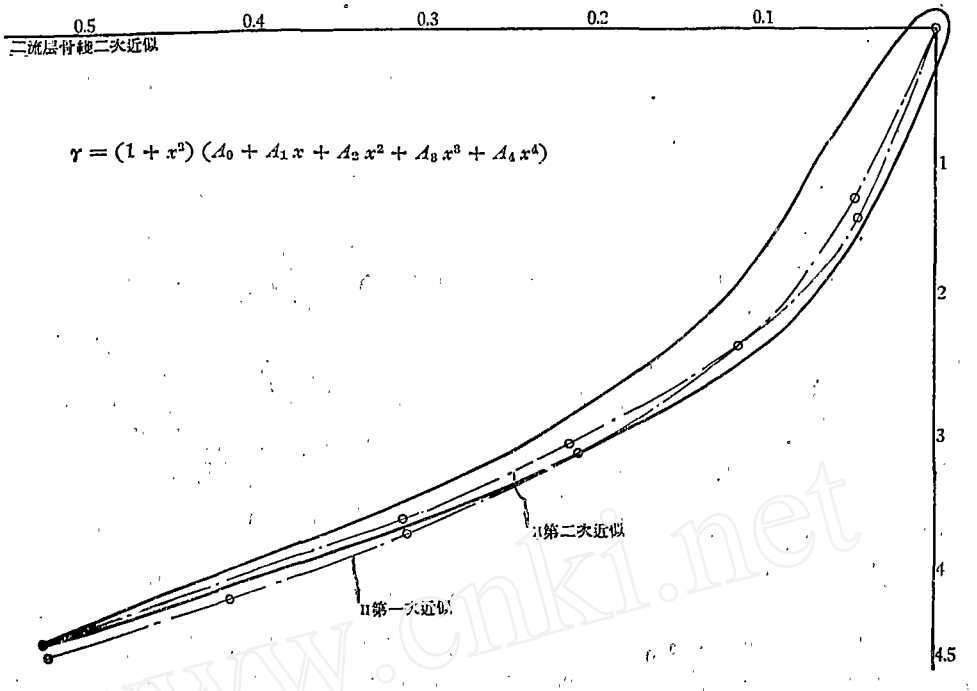

图 4.2

根据这結果，由(3.15)式也求得了 α（考虑了排挤系数），如图(4.4)中曲綫 I 之形，这条曲綫值得注意的是在头上，即 $u = 0$ 附近，降落得很慢；还有是它逐漸变成負的以后又变为正的，在 $x = -1$ 出口处是一个小的正数．这条 α 曲綫不能应用到 4，5，6，7 各流层，原因是 α 在头上跌落得太慢，因为

$$\frac{dz}{du} = \frac{\frac{1}{\mu} v_{oz}}{\alpha \frac{\Gamma}{t} - \omega R^2}$$

中的分母，R 是 z 的函数．在 4，5，6 流层，R 随着 z 降低得很快，可是 α 随着 u 降低得慢，到了一定地方，分母就成为正数了，而 v_{oz} 总是一个負数，故 $\frac{dz}{du}$ 变为負的，零次近似骨綫就向右拐弯了(如图4.5)．实际的骨綫决不会是这样的．

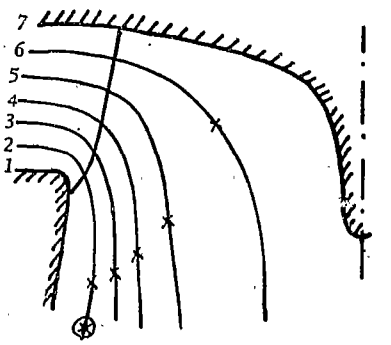

图 4.3

因而，其他流层的零次骨綫后来是用普通二元理論的方法算得的．接着，按(3.18)换算而得各流层的 $\bar{\gamma}$，再用第二节的方法进行計算叶片．結果，所得的骨綫形状很怪，在 $x = 1$ 点，$\operatorname{tg}\varphi$ 远比二元理論所得的为大，甚或是負数．

还值得注意的是，当 $x = \frac{1}{3}$ 左右，γ 很大，而在这些地方，5，6 流层的 $|w'_\infty|$ 竟比不过 $\frac{\gamma}{2}$．因 $w_{x+} \cong w'_\infty + \frac{\gamma}{2}$，故可能有 w_{x+} 是正数的情况，即发生倒流現象．在 $x = 1$ 处不

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

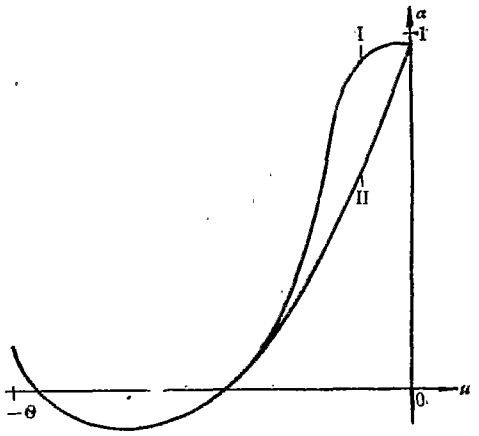

图 4.4

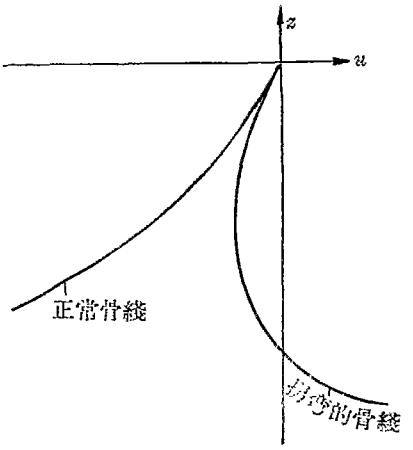

图 4.5

倒流，而在中間倒流，这也是一个反常現象。

为要分析原因，先来分析一下单机翼的情形。在单机翼的情况下，γ 如为 $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$，則相应于骨綫为平板的情况，有正的入口冲角。而 $(1-x^2)$ 等項，相应的骨綫如图 4.6 所示，都有負的入口冲角（我們把叶片前緣的切綫和 $+\infty$ 处来流速度之間的夹角称为入口冲角，也在图 4.6 中标出）。可以想象，叶栅和机翼有相似情况。因为进行調压时要求气蝕系数小，即要求相对速度小。如第二节所述，相对速度大約是 $w'_\infty - \frac{\gamma}{2}$，所以調压結果必然趋于叶片前面的 γ 大，后面的 γ 小（因为气蝕总是发生在后面的）。这样，A_1, A_2, A_3 就都是正的，故如沒有 A_0，則入口冲角一定是負的，这就說明了为何在 $x=+1$ 处算得的 $\operatorname{tg}\varphi$ 总比二元理論的大（二元理論的叶片头部的方向就是入口冲角为零的方向）。根据这个分析，只要添上 $A_0\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ 就可調节而得到适宜的入口冲角。

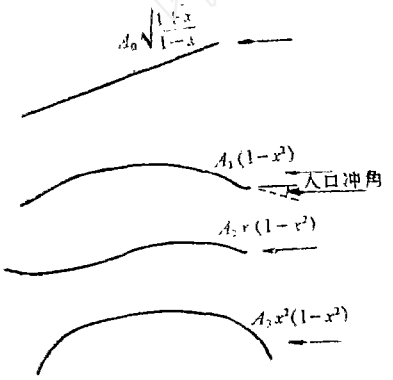

图 4.6

正因为这一点，叶片弯轉得就比較慢，所以叶片就掛下来了，后緣的 $\approx$ 拖得太长，如图 4.3 所示。

正因为叶片弯轉得比較慢，所以 α 在头部降低得就慢了。

現在再分析一下，为何骨綫会象图4.5这样向右拐。列出骨綫的公式(2.16)，或

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{v_{oz} + v_z^*}{\frac{\Gamma}{2t} - \omega R^2 + v_u^*} = \frac{v_z}{v_u - \omega R^2}. \tag{4.1}$$

当叶片較多时，如(2.43)、(2.45)指出的，可近似地認为

$$v_z \cong \frac{1}{\mu} v_{oz}. \tag{4.2}$$

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

又由(2.3)有

$$v_u = v_\theta R.$$

应当指出，对于通常的骨綫，在叶片前部，斜率 $\operatorname{tg}\varphi$ 应当是单調上升的，只有在靠近尾部才可能出現輕微的 S 形，即在叶片前部

$$\frac{d}{du}\operatorname{tg}\varphi > 0. \tag{4.3}$$

在后部則可能略負一些(也許仍旧是正的).

把(4.1)对 u 求导数，因 v_{oz} 和 μ 变化不大，故近似地認为

$$\frac{dv_{oz}}{du} = \operatorname{tg}\varphi \cdot \frac{dv_{oz}}{dz} \cong 0,\quad \frac{d\mu}{du} \approx 0.$$

注意(4.2)和(2.3)，可得

$$\frac{d}{du}\operatorname{tg}\varphi = \frac{-v_z}{(v_u - \omega R^2)^2}\cdot\frac{d}{du}(v_\theta R - \omega R^2).$$

因前一項分数是正的，故只要看后一項的正負号就可以了，因叶片数相当多，可以証明 $n\Gamma_a = 2\pi v_\theta R$. 利用此关系并注意(3.17)式，則

$$\frac{d}{du}(v_\theta R - \omega R^2) = \frac{d}{du}\frac{n\Gamma_a}{2\pi} - 2R\omega\frac{dR}{du} = \frac{n\gamma}{2\pi\cos\varphi} - 2\omega R\operatorname{tg}\varphi\frac{dR}{dz}.$$

应当在叶片前部大于零，于是有

$$\gamma > \frac{1}{n}4\pi R\sin\varphi\frac{dR}{dz}. \tag{4.4}$$

由此式可以看出，(2.34) 的 $\bar{\gamma}$ 是不合理的，因在 $x = 1$ 时 $\gamma = 0$，它不能滿足 (4.4)，因 $4\pi R$，$\sin\varphi$，$\frac{dR}{dz}$ 都是正的.

由此可見，骨綫拐走的原因在选择 γ 时就可粗略地預測到了.

最后是倒流問題，那是因为在头上 $\gamma = 0$，所以中間 γ 就大了. 假如采用(2.35)的形式，把 γ 往前推，此时就在头上有倒流，而这却是当然的. 由图 4.7 看，通常流体对叶片的繞流都是这样的.

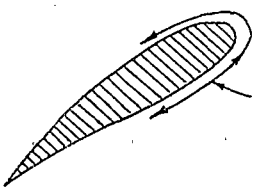

图 4.7

基于以上所述各种情况，我們建議把 $\bar{\gamma}(x)$ 选择成为 (2.35) 的形式，即添上 $A_0\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ 这一項.

用(2.35)形式的 $\bar{\gamma}$，又对第二流层进行調压計算，計算是在以前的(沒有 A_0 的)第二次近似 (在第一次近似骨綫上分布 γ) 基础上进行的. 所有的参数全部相同，重新进行調压，在解 A_0 这个常数时就添了給定头上 $\operatorname{tg}\varphi = 2.3$ 的条件，相当于迎角 1—2°. 方法已如第二节所述，所得結果如表 4.2.

和以前沒有 A_0 这一項的結果 (表 4.1) 相比較，$\left(\frac{w_{x-}}{R}\right)^2 - (\omega R)^2$ 降低了，約使气蝕系数降低了 1%，气蝕系数降低的原因乃是 $A_0\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ 項把 γ 往前推移了，使后面的 γ 降低，因 w_{x-} 近似地是 $w'_\infty - \frac{\gamma}{2}$，它小了就能使气蝕系数降低.

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

表 4.2 計算时的骨綫 $l=0.676$，得到的骨綫 $l=0.642$

x	-1	$-2/3$	$-1/3$	0	1/3	2/3	1
u	-0.5236	-0.4225	-0.3219	-0.2235	-0.1324	-0.0518	0
z	-0.3345	-0.2997	-0.2636	-0.2223	-0.1657	-0.0971	0
$\left(\frac{w_x}{R}\right)^2-(\omega R)^2$	—	251	251	251	113	-172	—
$\operatorname{tg}\varphi$	0.3372	0.3524	0.3640	0.5132	0.6826	1.2167	2.312

$A_0=0.9795\times10^6$, $A_1=8.6524\times10^6$, $A_2=6.2024\times10^6$, $A_3=2.5291\times10^6$

在这次骨綫的基础上，又进行了一次計算，得到的結果如表 4.3. 計算所得的骨綫和剖面見图 4.8.

表 4.3 計算时的骨綫 $l=0.642$

x	-1	$-2/3$	$-1/3$	0	1/3	2/3	1
u	-0.5236	-0.4242	-0.3252	-0.2277	-0.1352	-0.0540	0
z	-0.3257	-0.2906	-0.2547	-0.2149	-0.1647	-0.0972	0
$\left(\frac{w_x}{R}\right)^2-(\omega R)^2$	—	295	295	295			—
$\operatorname{tg}\varphi$	0.3489	0.3558	0.3742	0.4582	0.6498	1.1463	2.299

$A_0=1.3107\times10^6$, $A_1=8.0932\times10^6$, $A_2=6.3939\times10^6$, $A_3=3.2411\times10^6$

比較 4.8 和 4.2二图：前者的叶片前部很快就弯过来了，而后者弯得較慢，这会影响 α 降低的快慢. 后緣的 z 坐标也不同，前者小些，相应的，在圓周投影中就不会拖得很长，象后者在图 4.3 中的形状.

叶片的后半部很平直，二者很相近，所以在图 4.4 中 α 就差不多. 都是由負到正，这点原因尚不很明了.

表 4.3 中 $\left(\frac{w_x}{R}\right)^2-(\omega R)^2$ 又大了，那是因为 l 減小了 γ 就会增加. 另外一个原因是 v_{kx} 引起的，这次計算把平均曲率半径估得比較小，这也引起气蝕系数的增加，因此关于 v_{kx} 的計算似乎也有討論之必要.

由这次計算而得的骨綫，根据 (3.15) 而算得的 α 如图 4.4 的曲綫 II，它已能应用于其他流层計算零次近似骨綫，免除了骨綫向右拐的毛病.

至于其他流层使用第二，三两节的方法計算，則尚未进行，有待以后研究.

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

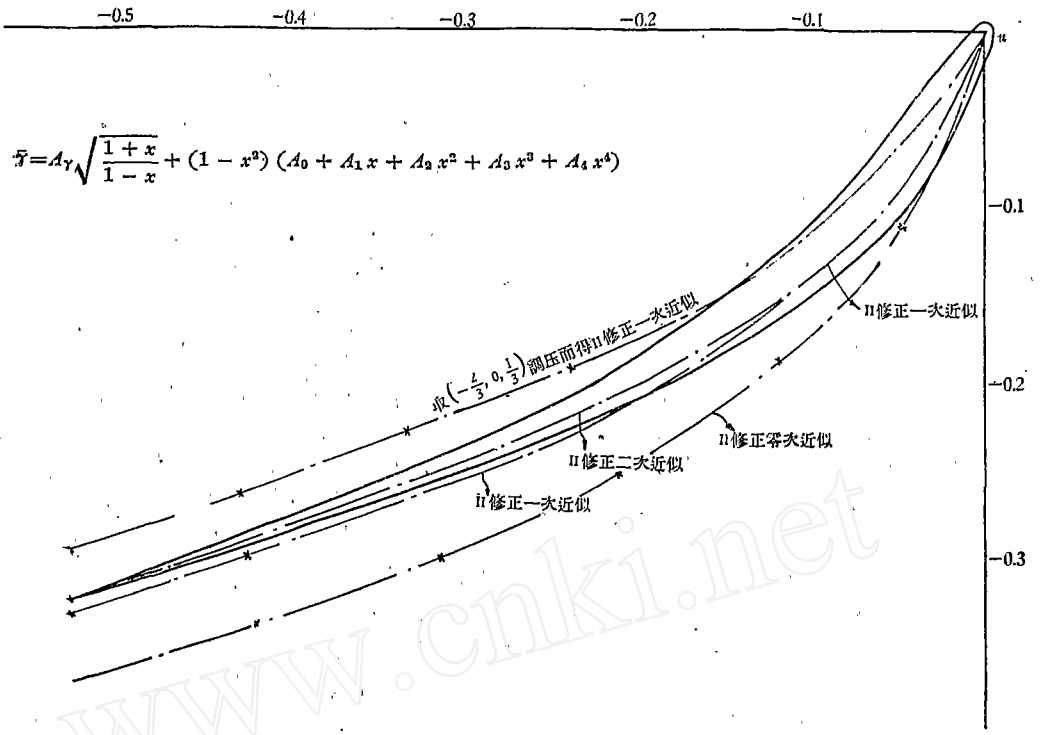

图 4.8

本文是我們 1959 年研究工作报告中的一部分，詳細內容可見中国科学院力学研究所 1959 年水輪机研究工作报告。

参　考　文　献

[1] Лесохин, А. Ф., Расчет лопастей рабочих колес осевых турбин. Энергомашиностроение, Труды ЛПИ, № 5, 1953.

[2] Этинберг, И. Э., Применение метода А. Ф. Лесохина к расчету лопастей рабочего. колеса поворотнолопастной гидротурбины с определением кавитационного коэффициента, Инж. Сб. Т. XXI, стр. 163, 1955.

[3] Колтон, А. Ю. и Этинберг, И. Э., Основы теории и гидродинамического расчета водяных турбин, Машгиз, 1958, М-Л.

[4] Квятковский, В. С., О расчете лопастей рабочих колес радиальноосевых гидротурбин. Труды, ВИГМ, вып. 21, Машгиз, 1958.

[5] Валландер, С. В., Протекание жидкости в турбине. *ДАН СССР* **LXXXIV**, 4 (1952), Новая серия.

[6] Валландер, С. В., 流体在混流式透平中流动的計算. 力学学报, 3 卷 1 期, 1959.

[7] Dreyfus L, A. A., Three-Dimensional Theory of Turbine Flow and Its Application to the Design of Wheel vanes For Francis and Propeller Turbines. *Acta. Polytechnica Mech. Engr. Series* **1**, No. 1 (1947).

[8] Киселев, К. А., 应用奇点分布法設計混流式透平工作輪的叶片形状. *Вест. Ленинг. Госу. Унив.* 1958, № 1.

[9] Белехова, Н. Г., 水輪机工作輪三維流动計算. *Вест. ЛГУ*, 1958, № 1.

[10] Вознесенский, И. Н., Избранные Труды в область Гидромашиностроения и Автоматического регулирования, Машгиз, 1952.

[11] Д. Я. 索科洛夫，水能利用，上卷，77 頁. 水利出版社，1956.

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

THE DESIGN OF THE RUNNER VANES OF FRANCIS WATER TURBINES

PAN LIANG-JU CHENG CHE-MIN TSOON WAN-SHIA
LIU HSI CHYI JING-TAY WANG LI-LI
(Institute of Mechanics, Academia Sinica)

ABSTRACT

Under Vallander's assumption the stream surfaces in a Francis water turbine remain the same with or without the runner vanes. The equation governing the flow in a thin sheet between two adjacent stream surfaces is

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}+\frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial z}\frac{\partial\phi}{\partial z}=0$$

or

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}-\frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial z}\frac{\partial\psi}{\partial z}=0,$$

where ϕ and ψ denote the velocity potential and the stream function, u and z are the transformed coordinates and h is the thickness of the thin stream surface sheet under consideration.

By the transformations, $\phi=\sqrt{h}\,\Phi$ and $\psi=\frac{1}{\sqrt{h}}\Psi$, the pair of equations is reduced to:

$$\nabla^2\Phi=0 \quad \text{and} \quad \nabla^2\Psi=0,$$

if $\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{h}\frac{dh}{dz}\right)$ and $\left(\frac{1}{h}\frac{dh}{dz}\right)^2$ are small by comparison with the square of the member of runner vanes.

The flow around the vanes in a thin stream surface sheet was also treated by Vallander, Kiselev; however, the relation between the flows in two adjacent stream surfaces sheets remains as yet unknown. In the present paper, the same relation is adopted to connect the flows in adjacent sheets as in the Bauersfeld-Voznesensky's two dimensional theory, that is, the circulation along the contour between any two meridianal planes and outside of runner vane is constant.

The solution is based on the method of singularities. At the end of the paper, the vortex distribution function is discussed. It is found that the addition of a term corresponding to the flow about a flat plate results in a definite angle of attack, thereby increases load near the leading edge of a vane which may be desirable in certain cases. But the distribution function is necessarily improved further for a good design.

It is worthy to note that the present solution is also applicable for the case that h' is not constant and small as assumed in Kiselev's method, and that it would avoid the lengthy computation as in Vallander's method. Nevertheless, the Vallander's[1] solution is more accurate.

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net