

平板在流体作用下的振动*

郑哲敏

(中国科学院力学研究所)

本文讨论平板在流体中的一个振动问题：我们假设平板在 x 方向是无限长的（见图1），而且在等间隔上装有简支铰座，因而在这些简支线上平板的位移等于零。在板和与其平行的墙之间，有一不可压缩和無粘性的水流，它在 x 方向的流速是 U 。

这样一个由板和流体构成的振动体系具有一些特殊的振动特性。我们在本文讨论这个体系的自由振动问题。除了给出它的自由振动形式和相应的频率外，并将分析在不同流速下振动的稳定性。

板的运动方程式可以写作

$$B \frac{d^4 w}{dx^4} - \rho h \omega^2 w = P, \quad (1)$$

其中 $w e^{i\omega t}$ 是板的挠度， t 为时间， ω 是尚待决定的自由振动圆周频率， B 是板的每单位宽度的抗弯刚度， h 是板的厚度， ρ 是密度。

$P e^{i\omega t}$ 表示作用在板上的正压力。 $P e^{i\omega t}$ 中除了包含水压力 $P e^{i\omega t}$ 之外，还包含支点的作用力。这些作用力应当认为是线载荷。

当振动发生后，流体中的速度场发生改变。在微小振动的假定下，这些改变可以视为小量。因此，如果令 $\varphi e^{i\omega t}$ 表示扰动位势函数， p 由下式给出

$$\frac{p}{\gamma} = -i\omega\varphi - U \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad (y=0), \quad (2)$$

γ 是流体的密度。 φ 满足拉氏方程式

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0, \quad (3)$$

而且在 $y=0$ 和 $y=-h$ 处分别满足以下的边界条件，

$$\left. \frac{\partial\varphi}{\partial y} \right|_{y=0} = i\omega w + U \frac{\partial w}{\partial x}, \quad (4)$$

$$\left. \frac{\partial\varphi}{\partial y} \right|_{y=-h} = 0. \quad (5)$$

我们可以假定 w 和 φ 是 x 的周期函数其周期为 $2Nl$ (N 是任意正整数)，而無损于解的一般性。由是，我们可以用富氏级数将 w ， φ 和 P 表示如下：

*本文是1956年9月在第九届国际应用力学会议上所提出报告的一部分，原题为“流体弹性力学”。

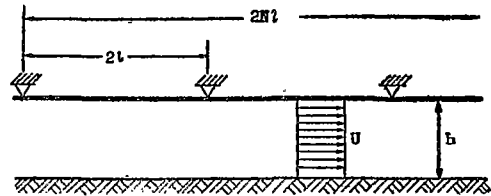


图1.

$$w = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{i \frac{n\pi x}{Nl}} \quad (6)$$

$$\varphi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n(y) e^{i \frac{n\pi x}{Nl}}, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} P &= p + \sum_{k=0}^{N-1} R_k \delta(x-2kl), \quad 0 \leq x < 2Nl; \\ &= p + \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{R_k}{2Nl} e^{-i \frac{2nk\pi}{N} + i \frac{n\pi x}{Nl}}, \quad -\infty < x < \infty. \end{aligned} \quad (8)$$

上式中 $R_k (k=0, \dots, N-1)$ 代表支座加于板的线荷载, 它们也是 x 的周期函数. δ 是狄拉克函数.

w 的表示式必须在支座上满足挠度恒等于零的条件. 因此我们有

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{i \frac{2ns\pi}{N}} = 0, \quad s=0, 1, \dots, N-1. \quad (9)$$

其次, 因为流体假定为不可压缩的, 在任意 N 个跨度内板与墙之间的体积必须保持不变. 因此我们取

$$A_0 = 0. \quad (10)$$

本问题的求解过程在于系数 A_n , R_k 和圆周频率 ω 的决定. 首先, 根据方程式 (3) 和边界条件 (4) 和 (5), φ 可以用 A_n 表示. 将 φ 代入 (2), 我们得到 p 的表示式如下:

$$p = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\omega + U \frac{n\pi}{Nl} \right)^2 \frac{Nl}{n\pi} A_n e^{i \frac{n\pi x}{Nl}} \coth \frac{n\pi h}{Nl}. \quad (11)$$

再将上式代入 (8) 式, 并将 P 代入 (1) 式. 比较富氏级数的诸项系数即得 A_n 与 R_k 的关系如下:

$$A_n = F_n \sum_{k=0}^{N-1} \frac{R_k}{2Nl} e^{-i \frac{2k\pi n}{N}}, \quad (12)$$

其中

$$F_n = F_n(\omega) = \left\{ B \left(\frac{n}{N} \right)^4 \frac{\pi^4}{l^4} - \rho h \omega^2 - \frac{\gamma l}{\pi \left(\frac{n}{N} \right)} \left[\omega + \frac{\pi U}{l} \frac{n}{N} \right]^2 \coth \left(\frac{\pi h}{l} \frac{n}{N} \right) \right\}^{-1}, \quad (13)$$

如将 (12) 式代入挠度在支座上等于零的条件 (公式 9), 便得到决定 R_k 的齐次线性联立方程式. 这组联立方程式的行列式等于零的条件便是决定 ω 的频率方程式.

我们用下述线性转换以简化以上的联立方程: 令

$$n = Nq + s, \quad s=0, 1, \dots, N-1, \quad q = \dots -1, 0, +1, \dots. \quad (14)$$

于是 (12) 式可以写作

$$A_{Nq+s} = T_s F_{q+\frac{s}{N}}, \quad (15)$$

其中

$$T_s = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{R_k}{2Nl} e^{-i \frac{2ks\pi}{N}}. \quad (16)$$

用同样替换, (9) 式变为

$$\sum_{s=0}^{N-1} e^{i \frac{2qs\pi}{N}} \sum_{q=-\infty}^{\infty} A_{Nq+s} = 0.$$

上式的唯一解是

$$\sum_{q=-\infty}^{\infty} A_{Nq+s} = 0.$$

将表示式(15)代入上式即得

$$T_{\frac{s}{N}} \sum_{q=-\infty}^{\infty} F_{q+\frac{s}{N}} = 0, \quad s=0, 1, \dots, N-1. \quad (17)$$

这便是经过线性转换(16)之后的联立方程组。事实上通过这样的转换,它们已经成为互不相关的正则形式了。它们的解或者是 $T_{\frac{s}{N}} = 0, s=0, 1, \dots, N-1$; 或者是

$$\left. \begin{aligned} \sum_{q=-\infty}^{\infty} F_{q+\frac{s}{N}} &= 0, \\ T_{\frac{s}{N}} &\neq 0; \end{aligned} \right\} \quad (18.a)$$

$$T_{\frac{s'}{N}} = 0, \quad s' \neq s. \quad (18.b)$$

在第二种情况下, (18.a)便是频率方程。如果 ω 是(18.a)的一个根, 与其相应的 w 便是

$$w = T_{\frac{s}{N}} e^{i \frac{s\pi\omega}{Nt}} \sum_{q=-\infty}^{\infty} F_{q+\frac{s}{N}} e^{i \frac{q\pi\omega}{t}}. \quad (19)$$

从(16)式又得到

$$R_b = 2i T_{\frac{s}{N}} e^{i \frac{2ks\pi}{N}}. \quad (20)$$

在第一种情况下, 通常 $w=0$ 。这也就是说没有振动。但也有例外的情况。后者可以作为(18)的一个 $T_{\frac{s}{N}} \rightarrow 0$ 的特殊情况, 因而无需分别讨论。

现在就以下几方面讨论所得的解:

(一) 观察公式(13)和(18.a)可见, 在一般情况下, 而且对一定的 $\frac{s}{N}$ 而言, 如果 ω 是一个根, $-\omega$ 便不是根。但是 $-\omega$ 却是另一个, 以 $1 - \frac{s}{N}$ 代替了 $\frac{s}{N}$ 之后的频率方程式的根。这是因为

$$\sum_{q=-\infty}^{\infty} F_{q+(1-\frac{s}{N})}(-\omega) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} F_{-q-(1-\frac{s}{N})}(-\omega) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} F_{q+\frac{s}{N}}(\omega) = 0. \quad (21)$$

因此, 为了求得所有的频率值, 我们仅需令 $\frac{s}{N}$ 为 0 与 $\frac{1}{2}$ 之间的任一分数。

(二) 板的挠度是 $w e^{i\omega t}$ 。由于(18)式所给出的 w 通常是 x 的复函数, 挠度不能表示为 $e^{i\omega t} f(x)$, 其中 $f(x)$ 为实函数。因此, 沿 x 方向板上各点的运动, 虽然具有共同的周期, 却有着不同的相差。例外的情形分别发生于 $U=0$ 和 $\omega=0$ 。

(三) 就一定的 $\frac{s}{N}$ 值, (18.a)有无穷多个分离的根。当 $\frac{s}{N}$ 取 0 与 $\frac{1}{2}$ 之间之任意值时, 所有的根便分别坐落在通常是互相分离的间隔里。在这些间隔里根的分布是密集的, 这一点最容易用没有流体的情况($\gamma=0$)说明,

当 $\gamma=0$ (18.a)式变为

$$\sum_{q=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(q + \frac{s}{N}\right)^4 - \Omega^2} = 0,$$

其中, $\Omega^2 = \rho h \omega^2 l^4 / B \pi^4$. 借余数法, 上式可以写作

$$\cos \frac{2\pi s}{N} = \frac{\sinh 2\pi\sqrt{\Omega} \cos 2\pi\sqrt{\Omega} - \cosh 2\pi\sqrt{\Omega} \sin 2\pi\sqrt{\Omega}}{\sinh 2\pi\sqrt{\Omega} - \sin 2\pi\sqrt{\Omega}}. \quad (22)$$

当 Ω 较大时, 可以渐近地将上式写作

$$\cos \frac{2\pi k}{N} = \sqrt{2} \cos 2\pi \left(\sqrt{\Omega} + \frac{1}{8} \right). \quad (23)$$

作为上式的一个根, Ω 显然只能存在于某些特定的互不相连的间隔内, 而且在这些间隔中根的分布是密集的. 当 $\frac{k}{N} = \frac{1}{2}$, 0.10, 和 $\frac{k}{N} \rightarrow 0$ 时, 最小的根是 $\Omega = \frac{1}{4}$, 0.519, 和 0.568.

(四) 由于流体的单向流动, 同一波长的正弦列波有不同的顺流和逆流前进的速度. 因此当流速 $U \neq 0$ 时, 两个同样波长的正弦列波不能形成固定的结点, 更不能满足在支撑点上板的挠度等于零的条件. 但在某些特定的流速, 不同波长, 但是波长成简单倍数的正弦列波却可以在简支的位置上形成结点. 这时显然 $R_n = 0$ 而且板上各点作不同相角的简谐振动.

作为上述情况的一个例子, 我们可以有这样的一个解

$$w e^{i\omega t} = e^{i\omega t - i \frac{\pi x}{l}} (1 - e^{i \frac{\pi x}{l}}). \quad (24)$$

它满足支撑点位置等于零的要求. 根据(18)式我们要求 ω 满足下列方程式

$$1/E_{-1/3} = -1/E_{2/3} = 0.$$

这样的联立方程同时决定了 ω 和 U 的值. 因此, 我们说, 只有在特定的流速下, 像(24)式那样的简单解方才成立. 在一般情况下, 解必然包含(19)式中所有各项. 图 2 表示在 $\frac{1}{4}$ 周期间板的振动, 所根据的公式是(24)式.

(五) 流体的存在即使在流速等于零的情况下, 对频率, 尤其是较低频率, 有显著的影响.

取 $\gamma l / \rho h = 90$, $H/l = 0.40$. 这时, 相应于 $\frac{s}{N} = \frac{1}{2}$, 0.10 和 $\frac{s}{N} \rightarrow 0$ 的最低频率值各为 $\Omega = 0.0245$, 0.0137, 和 0. 最低的频率值趋近于零, 当 $\frac{s}{N} \rightarrow 0$, 是由于 $\coth \frac{\omega l}{l} \frac{s}{N} \rightarrow \infty$ 的结果, 因而与流体密度的数值无关.

当 $U = 0$ 时, 板上各个的运动便没有相角差.

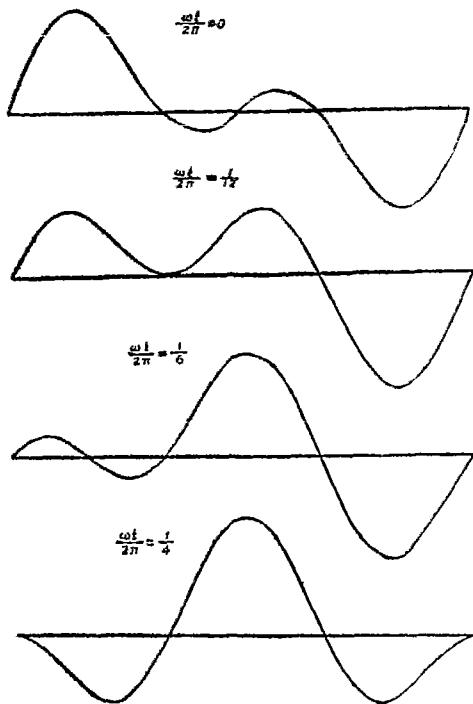


图 2.

(六)当流速增加时, ω 的值随之改变. 仍取 $\gamma l / \rho h = 90$, $H/l = 0.40$, $\frac{s}{N} = 0.5$ 及 0.10 , 我們計算了 Ω 与 U 之間的函数关系如图 3 所示.

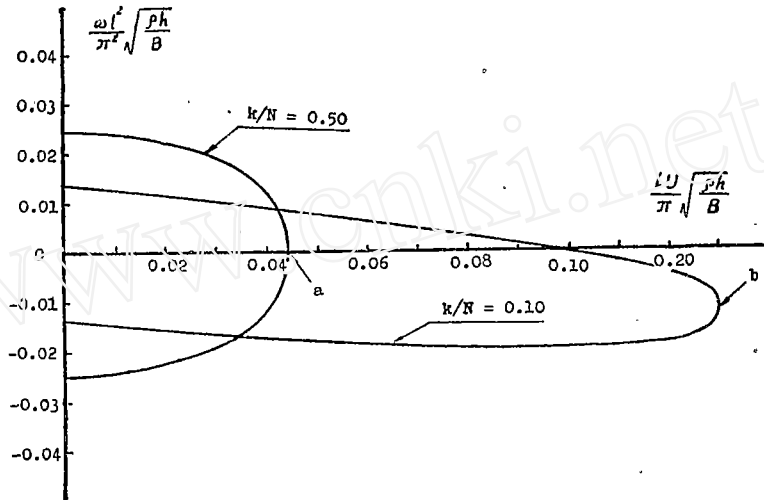


图 3.

特别有趣的是图 3 中的 a 点和 b 点. 在这些点上, 代表频率的曲线有垂直的切线. 在 a, b 点的左边, (18.a) 式的最小根是实数, 在 a, b 点的右边, 根便分别是虚数或复数. 由于 $\pm\omega$ 都是频率方程的根 (虽然一般说来, 相应于不同的 $\frac{s}{N}$ 值) 当 ω 为虚数或复数时, 相应的振动便不是稳定的了. 可以证明, 当流速不大于 a 点所表示的速度时, 没有不稳定的振动. 因此, a 点的流速可以称为临界流速. 临界流速的一般公式是,

$$U^2 = \frac{1}{\gamma} B \left(\frac{\pi}{2l} \right)^3 \tanh \frac{\pi H}{2l}. \quad (25)$$

这个公式是由 $\omega = 0$ 和 $1/F_{\frac{1}{2}} = 0$ 得出的.

VIBRATION OF PANEL IN THE PRESENCE OF A FLUID

CHENG, CHE-MIN

(*Institute of Mechanics, Academia Sinica*)

ABSTRACT

This paper discusses the coupled vibrations of an infinitely long panel and a nearby fluid. The panel is assumed to be supported at equal intervals on rigid, frictionless knife edges. The fluid, nonviscous and incompressible, streams along the length of the panel with average velocity U .

The modes of vibration and the corresponding frequencies are obtained for this coupled hydro-elastic system. The characteristics of motion, distribution of the roots of the frequency equations (i. e. the frequency spectrum), and stability questions are examined in some detail. A numerical example serves to illustrate the various points of interest.