

跨声射流问题的屈科米方程解法*

卞 蔭 貴

(中国科学院力学研究所)

提 要

本文所討論的二維跨声速射流的問題需要在速度圖內求屈科米方程的解。我們先利用了此方程在超声速区域的一般解,从而得出流函数和其偏微商在声速綫上的函数关系,把本題簡化为一个純亞声速的边界值問題。可是直接求解仍有困难。在克服这个困难时,我們根据亞声速区域内的边界条件,找出声速綫上的流函数和其偏微商的另—函数关系。从这两个互不接触的关系,便可以决定声速綫上之流函数数值或其偏微商。

一. 引言

在最近研究二維跨声气流文献中,很多是依据享有盛名的屈科米(Tricomi)論文^[1]。一般說,当处理非常繁雜的跨声气流运动时,我們主要希望知道的是沿声速綫(气流速等于声速各点之轨迹)最鄰近区域内之气流形态。在这个区域内用一級近似所得到的速度圖方程(本文第2节)是与屈科米的綫性方程相同:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} - \xi \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} = 0.$$

此式屬於混合型的偏微分方程。因为当 ξ 是負数时,它屬橢圓形类,当 ξ 是正数时,屬双曲綫形类。虽然有关这个方程的几个边界值問題已得到了解决,比如托模堤卡(Tomotika, S.)和特馬他(Tamato, K.)^[2]处理跨声气流經過一个收斂和發散的气管;葛得奈(Guderley, G.)和越希哈拉(Yoshihara, H.)^[3]解出了当自由气流馬赫数为1时的二維尖劈問題;柯尔(Cole, J. D.)^[4]也曾处理同样問題;斐声堤(Vincenti, W. G.)^[5]用数字計算了分离击波与尖劈間的气流情况。可是这些解法都只能适用于特殊情况下。一个比較通用并且有效的求解办法,目前还没有。

本文要討論的是跨声速射流的問題(第3节)。我們所用的方法是把跨声速問題(一部分区域是亞声速,另一部分超声速)轉化为一个單純亞声速問題。这个办法是和偏微分方程理論分不开的。在超声速区域内($\xi > 0$),屈科米方程是双曲綫式而且可以改变为熟知的欧拉-泊松(Euler-Poisson)方程。它的普通解为已知,但是包括两个未定函数,正如一般二元二阶双曲綫形的偏微方程一样。因为本題的超声速区域内边界条件只給在一个

* 1957年8月5日收到。

特征綫上,所以仅此条件不可能决定这两个未定函数。可是它们在声速綫上却有一定的函数关系(第4节)。这个关系就可以用来作为亞声速区内另一边界条件。如此,本問題就被轉化为一个亞声速(或橢圓式方程)的边界值問題。虽然如此,求解的时候,仍然有困难。本文第5节内用格林公式再把亞声速边界值問題改为求一个奇异积分方程的解。最后在第6节中,我們采用卡尔勒門(Carleman)^[6]的方法对付这个奇异积分方程。

二. 基本方程

一个沒有粘性的可压缩气体在定常二維和無旋的气流运动中,是依据下列几个基本方程:

$$\text{連續方程} \quad \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0; \quad (1)$$

$$\text{無旋条件} \quad \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0; \quad (2)$$

$$\text{絕热状态方程} \quad p = \text{常数} \cdot \rho^\gamma; \quad (3)$$

$$\text{伯努利方程} \quad \frac{1}{2} q^2 + \frac{1}{\gamma-1} a^2 = \text{常数}. \quad (4)$$

上列四个方程包含四个未知数。如压力 p , 密度 ρ , 以及沿 x 与 y 方向的两个速度分量 u 和 v 。其中 a 是声速 ($a^2 = \gamma \frac{p}{\rho}$), q 是速度量 ($q^2 = u^2 + v^2$), γ 是比热的比数。从方程(1)和(2)可以引进流函数 ψ 及位势 φ , 因此

$$u = \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\rho_0}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial x}; \quad (5)$$

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}. \quad (6)$$

右下角的指标,是代表駐点上的物質量。在上述情况下的气体运动問題便是求出位势 φ 或者流函数 ψ 的解来。从方程(1)到(6),并不困难的可以推演出一个方程只包含 φ 或者只包含 ψ 。但这將是一个非綫性二元二阶的偏微分方程,求其普通解确是極端困难的。正因为如此,远在五十年前查浦利金(Chaplygin)^[7]很成功的采用了以速度量 q 及以 x 軸为淮的速度方向角 θ 为两个新变数。用 q, θ 为自变数所推演出包含 φ (或者 ψ) 的方程將是綫性的,求解比較容易。在下面,我們把 x, y 为自变数的一系列方程轉换成以 q, θ 为自变数的方程。这种方法在‘气动力学’上称之为速度圖法。根据公式(5)和(6)的定义,我們写出 φ 和 ψ 的全微分来

$$d\varphi = u dx + v dy,$$

$$d\psi = -\frac{\rho}{\rho_0} v dx + \frac{\rho}{\rho_0} u dy.$$

或者一并写成

$$dz = \frac{e^{i\theta}}{q} \left(d\varphi + i \frac{\rho_0}{\rho} d\psi \right), \quad (7)$$

其中

$$dz = dx + i dy, \quad i = \sqrt{-1};$$

$$u = q \cos \theta, \quad v = q \sin \theta.$$

当 q, θ 作为自变数时(7)式可再写为:

$$dz = \frac{e^{i\theta}}{q} \left\{ \left[\frac{\partial \psi}{\partial q} dq + \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} d\theta \right] + i \frac{\rho_0}{\rho} \left[\frac{\partial \psi}{\partial q} dq + \frac{\partial \psi}{\partial \theta} d\theta \right] \right\}. \quad (7a)$$

如果使上式兩边之实数与虚数部分分別相等, 并且再利用式之左边是一个正确微分的条件, 我們便可以得到一对綫性而且准确的方程

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} &= \frac{\rho_0 q}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial q}, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial q} &= -\frac{\rho_0}{\rho q} (1-n^2) \frac{\partial \psi}{\partial \theta}. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

上兩式是研究二維气体运动用速度圖法的基本方程。为了更适合于进一步分析和討論跨声速問題, 我們再將(8)式进行簡化。所以引进自变数 σ 如下:

$$\sigma = \int_q^{a^*} -\frac{\rho}{\rho_0 q} dq. \quad (9)$$

在此选定临界速度 a^* 为积分上限是为了將声速放在 $\sigma=0$ 的地方。以 σ 代替 q , 則方程(8)变为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} &= -\frac{\partial \psi}{\partial \sigma}, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} &= K(\sigma) \frac{\partial \psi}{\partial \theta}. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

式中

$$K(\sigma) = \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right)^2 (1-n^2). \quad (11)$$

是一个 σ 的隱含函数。如果根据(9)式把 σ 与 $\frac{q}{a^*}$ 用圖解表示出来^[2](見圖 1),

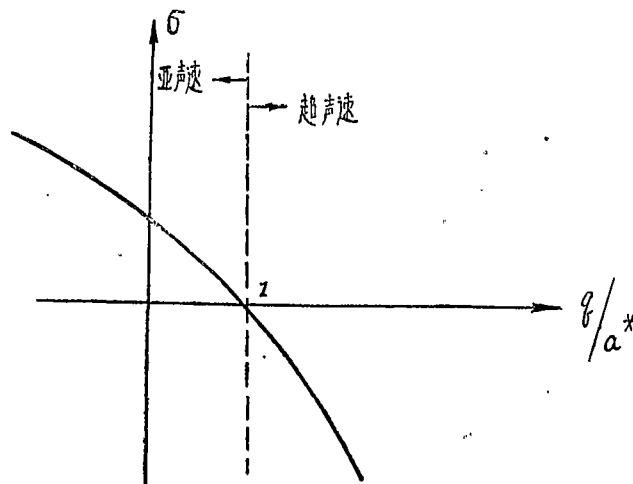


圖 1.

再把 K 与 $\frac{q}{a^*}$ 关系从(11)式及伯努利方程中計算之后, 那末 K 与 σ 的关系也就可以圖解

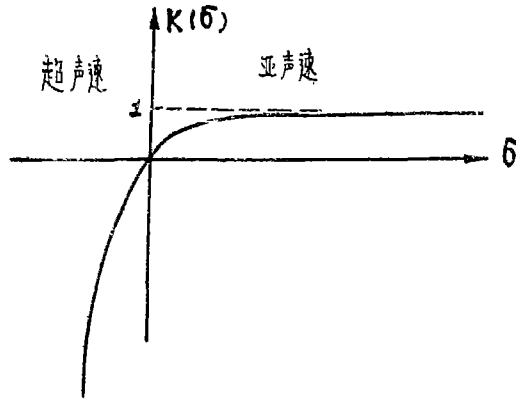


图 2.

出来(見圖 2)。

很显明的可以从圖上看出, K 是与 σ 相应的增加。在声速, 即 $\sigma=0$, 附近, K 之数值分布也是一目了然。现在如果我们的目的是要进行简化以便了解声速附近的气流状况, 那末 K 函数在 $\sigma=0$ 附近的綫段就可以用其切綫来代替。也就是把 K 函数用泰勒級数展开并且略去 σ 的平方以上的項数。經計算即得

$$K(\sigma) = 2 \left(\frac{\gamma+1}{2} \right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} \sigma. \quad (12)$$

再令
$$\xi = - \left(\frac{\gamma+1}{2} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} (\gamma+1)^{\frac{1}{3}} \sigma, \quad (13)$$

則从方程(10)消去 φ 便可得出跨声气流在速度圖中的簡化方程

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} - \xi \frac{\partial^2 \psi}{\partial \sigma^2} = 0. \quad (14)$$

这种簡化程序是和跨声速理論中的一級近似把 $q-a$ 当作微量的办法完全一样。可以証明只要把 ξ 和 $q-a$ 用下式联系就是

$$\xi = (\gamma+1)^{\frac{1}{3}} \frac{q-a}{a}. \quad (14)$$

从上式也可以知道 ξ 的物理意义, 它是一个無綱量, 代表气流速度与声速之差。

三. 跨声速射流的边界值問題

关于射流問題的研究, 历史悠久。查浦里金^[7]曾把亞声速射流詳加处理。至于跨声速射流, 葛得奈^[8]和弗蘭克尔^{[9], [10]}也曾作初步探討。其边界值的組成如圖 3 所示。两个固壁是与 x 軸对称, 其夾角等于 $2\theta_0$ 。假設中間流綫 O_A 的流函数 $\psi=0$, 沿两个固壁的流函数 $\psi = \pm \frac{Q_m}{2}$ 。 Q_m 是射流的最大質量流。虛点綫 BAB' 表示声速綫, 其形状事先还不能够确定。当气体射出口徑 BB' 后, 沿着边缘的两个流綫形状也未定。但是通过伯努利关系, 沿着边缘之速度是一常数。

上面的边界值也可以在相应的速度圖上表注出来。如圖 4 所示, 根据跨声速一級近似原則, 相应于物理平面的 O 点是在速度圖平面的無穷远处。相应于固壁的是两个与 ξ 軸平行綫 OB, OB' 。这里方向角度 θ 已

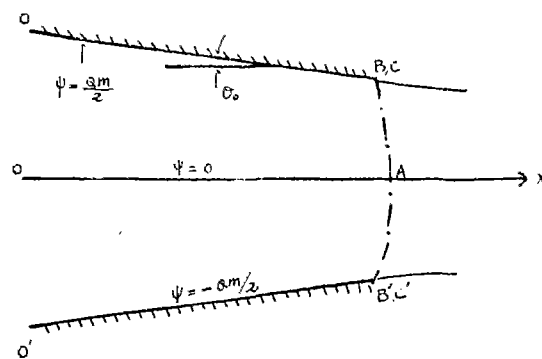


图 3. 射流物理平面

度圖上表注出来。如圖 4 所示, 根据跨声速一級近似原則, 相应于物理平面的 O 点是在速度圖平面的無穷远处。相应于固壁的是两个与 ξ 軸平行綫 OB, OB' 。这里方向角度 θ 已

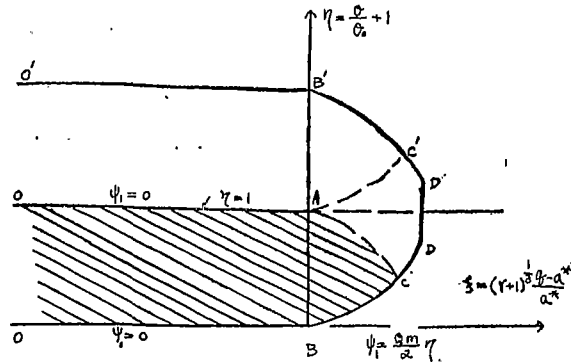


圖 4. 射流速度圖平面

为無綱量 η 所代替,

$$\eta = \frac{\theta}{\theta_0} + 1. \quad (15)$$

AC 与 BC 是两个特征綫。因为屈科米方程 (T) (將 θ 换成 η) 是綫性, 所以特征綫的方程也是固定的 (当 $\xi > 0$)。

$$\left. \begin{aligned} \eta - \frac{2}{3} \xi^{\frac{3}{2}} &= 1, & BC \text{ 特征綫;} \\ \eta + \frac{2}{3} \xi^{\frac{3}{2}} &= 0, & AC \text{ 特征綫.} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

在射流器出口角上, 气流經過一个普郎多-馬尔扩散波。所以 B, C 在物理平面只是一点, 而在速度圖平面內則相当于特征綫 BC 。既然气流是与中間流綫完全对称, 因此我們只要决定气流在 $OACBO$ 区域就行。所以本題便是根据下列边界条件去求屈科米方程 (T) 的解,

$$\left. \begin{aligned} \text{当 } \eta=0, & \text{ 就是沿 } OA \text{ 綫: } & \psi=0; \\ \text{当 } \eta=0, & \text{ 就是沿 } OB \text{ 綫: } & \psi=\frac{Q_m}{2}; \\ \text{当 } \eta=\frac{2}{3} \xi^{\frac{3}{2}}, & \text{ 就是沿特征綫 } BC: & \psi=\frac{Q_m}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

为了計算方便起見, 我們再引进一个新函数 ψ_1 , 它与原来流函数 ψ 的关系如下:

$$\psi_1 = \psi - \frac{Q_m}{2} (1 - \eta). \quad (18)$$

显然的, ψ_1 也滿足方程 (T)。至此我們的任务是解决这样一个数学問題: 在 $OACBO$ 区域内寻找一个有定限函数 ψ_1 去滿足屈科米方程

$$\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \xi^2} - \xi \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \eta^2} = 0. \quad (T)$$

同时也要滿足下列边界条件 (参照 (17) 式):

$$\left. \begin{aligned} \text{在 } OB \text{ 綫上: } & \psi_1=0; \\ \text{在 } OA \text{ 綫上: } & \psi_1=0; \\ \text{在特征綫 } BC \text{ 上: } & \psi_1=\frac{Q_m}{2} \eta. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

四. 方程(T)在超声速区域ABC内的解 f(η)与g(η)的积分关系(I)

如果引用特征变数

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \eta - \frac{2}{3} \xi^{\frac{3}{2}}, \\ \beta &= \eta + \frac{2}{3} \xi^{\frac{3}{2}}, \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

则屈科米方程(T)在超声速区域内, ($\xi > 0$), 可以写成一般双曲线方程的典则形式

$$\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \alpha \partial \beta} - \frac{1}{6(\alpha - \beta)} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha} - \frac{\partial \psi_1}{\partial \beta} \right) = 0. \quad (T_1)$$

当 $\alpha = \beta$ 时, 也就是在声速线上 ($\xi = 0$), 此式是奇异的. 屈科米特意证明即使哥西支给线与奇异线 AB 重合, 哥西问题仍可适用. 也就是说, 如果函数 ψ_1 及其法向偏微商在 AB 线上给定, 那末 ABC 区域内就有唯一的解. 同时, 方程 (T_1) 是和古典的欧拉-柏松方程相同, 其普通解早为前人求得. 现在我们令 $f(\eta)$ 为 ψ_1 在声速线 AB 上的函数值, $g(\eta)$ 为 ψ_1 在 AB 上的 ξ 一偏微商值, 即是

$$f(\eta) = \psi_1(0, \eta), \quad g(\eta) = \frac{\partial \psi_1}{\partial \xi}(0, \eta).$$

那末方程 (T_1) 的普通解可以写为^{[1], [5]}

$$\psi_1(\xi, \eta) = c_1 \int_0^1 \frac{f\left[\eta + \frac{2}{3} \xi^{\frac{3}{2}}(2t-1)\right]}{t^{\frac{5}{6}}(1-t)^{\frac{5}{6}}} dt + c_2 \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{2}{3}} \xi \int_0^1 \frac{g\left[\eta + \frac{2}{3} \xi^{\frac{3}{2}}(2t-1)\right]}{t^{\frac{5}{6}}(1-t)^{\frac{5}{6}}} dt, \quad (21)$$

式中 $c_1 = \frac{2^{\frac{2}{3}} \pi}{3 \Gamma^3\left(\frac{1}{3}\right)}, c_2 = \frac{3^{\frac{1}{6}} \Gamma^3\left(\frac{1}{6}\right)}{4 \pi^2}$; Γ 是指普通的伽马函数.

很明显的, 如果在声速线 AB 上的 $f(\eta)$ 和 $g(\eta)$ 可以预知, 则超声区域 ABC 的解便可用 (21) 式来表示. 不但如此, ψ_1 在特征线 BC 上唯一函数值也可以计算出来. 然而本题的边界条件不是这样. 参照公式 (19), ABC 区域内只有特征线 BC 上 ψ_1 的函数值是规定的. 因此必然的, $f(\eta)$ 和 $g(\eta)$ 相互间有一定关系. 推演这个关系, 我们只要把公式 (19) 的条件代入 (21) 式再稍加调整即得

$$\frac{Q_m}{4} \eta = c_1 \int_0^1 \frac{f(\eta t)}{t^{\frac{5}{6}}(1-t)^{\frac{5}{6}}} dt + c_2 \eta^{\frac{2}{3}} \int_0^1 \frac{g(\eta t)}{t^{\frac{5}{6}}(1-t)^{\frac{5}{6}}} dt. \quad (22)$$

然后引用阿贝耳的倒换积分公式得出 $f(\eta)$ 和 $g(\eta)$ 的积分关系

$$f(\eta) = \frac{Q_m}{2} \eta - \frac{3^{\frac{2}{3}} \Gamma^2\left(\frac{1}{3}\right)}{4 \pi^2} \int_0^\eta \frac{g(y)}{(\eta-y)^{\frac{1}{3}}} dy. \quad (I)$$

此关系式已见诸屈科米文献中^[1]并已被其他作者所引用^[5].

五. 方程(T)在亞声速区域OABO內的解 f(η)与g(η)的积分关系(II)

假若只需要滿足亞声速区域的边界条件,即 ψ_1 在OA和OB上等于零,方程(T)却有很多解,其中一个正确的必定是超声速区域内解的分析开拓.对于一个二阶偏微分方程,如果一个区域的解是另一个区域的分析开拓,其必然而且充分的条件是在共同交界处的函数值和其法向导数完全相同.因此前节內 $f(\eta)$ 和 $g(\eta)$ 在AB綫上的函数关系,即方程(I),可以用作求亞声速区域的解的另一边界条件.一般說,如果在AB綫上 $f(\eta)$ 或者 $g(\eta)$ 是給定的,求解便很容易.但是新引进来的边界条件是一个积分关系,用寻常直接的方法还是非常棘手.所以在本节內,我們采用的方法是这样的.就滿足OA和OB边界条件的一系列解中,也求出它們在声速綫AB上 $f(\eta)$ 和 $g(\eta)$ 的关系.这个关系不一定和方程(I)相同——一般地不会相同.但是对于一个正确的解,它們也不会相互抵触的.我們在此用关于椭圆形方程的格林公式来推演 $f(\eta)$ 与 $g(\eta)$ 的第二个关系.当 $\xi \leq 0$,屈科米方程可以写成

$$L(\psi_1) = \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \xi^2} + |\xi| \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \eta^2} = 0, \quad (T_1)$$

它的伴随方程

$$M(V) = \frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} (|\xi| V) = 0. \quad (23)$$

因为自伴关系,所以它們的解也是互相通用的.可以直接証明

$$\frac{1}{\left[(\eta - \eta_0)^2 + \frac{4}{9} \xi^{\frac{3}{2}} \right]^{\frac{1}{6}}}$$

是 $M(V) = 0$ 的基本解,并且有一个适合需求的奇点.再用影像方法以滿足OA及OB上边界条件, V 应具有下列形式

$$V(\xi, \eta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\left[|\eta - (2m + \eta_0)|^2 + \frac{4}{9} |\xi|^{\frac{3}{2}} \right]^{\frac{1}{6}}} - \frac{1}{\left[|\eta - (2m - \eta_0)|^2 + \frac{4}{9} \xi^{\frac{3}{2}} \right]^{\frac{1}{6}}} \right\}. \quad (24)$$

除去 $\xi = 0, \eta = \eta_0$ 上有一个 $\frac{1}{3}$ 級的代数奇点而外, V 在OABO区域内是一个正常函数.如果令D代表OABO区域,用 γ 弧將奇点除外(γ 弧的形狀当求極限时可以随机而定),則根据格林公式得出

$$\begin{aligned} & \iint_D [V L(\psi_1) - \psi_1 M(V)] d\xi d\eta = \\ & = \int_{\partial \gamma \wedge O} \left[\left(V \frac{\partial \psi_1}{\partial \xi} - \psi_1 \frac{\partial V}{\partial \xi} \right) \frac{\partial \xi}{\partial n} + |\xi| \left(V \frac{\partial \psi_1}{\partial \eta} - \psi_1 \frac{\partial V}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial n} \right] ds = 0, \quad (25) \end{aligned}$$

式中 n 是外向法线。注意到, 沿 OA 和 OB 线上, V 及 ψ_1 均等于零; 从 (24) 式可以计算 $\frac{\partial \psi_1}{\partial \xi}$, $\frac{\partial \psi}{\partial \eta}$; 而后再把 γ 弧缩小求其极限; 最后得出

$$f(\eta) = \frac{3^{\frac{2}{3}} \Gamma^3\left(\frac{1}{3}\right)}{4\pi^2} \int_0^1 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{|s-(2m+\eta)|^{\frac{1}{3}}} - \frac{1}{|s-(2m-\eta)|^{\frac{1}{3}}} \right\} g(s) ds, \quad (26)$$

关于上式的详细推演见附注一。此式便是根据亚声速区域内的解所求得之第二个 $f(\eta)$ 与 $g(\eta)$ 的积分关系。不幸的是, 关系式内的核函数是一个无穷级数, 有再行简化之必要。因此我们假定

$$f(\eta) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\pi\eta, \quad (27)$$

凡是有定限以及段落连续性的函数, 可以展开成傅里叶函数。因此我们的假定, 声速线上 ψ_1 可以如此展开, 是合理的。根更 (27) 式, 很容易的可以得出亚声区域内的解来, 只要用分离变数法即可证明

$$\psi_1 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{I(n, \xi)}{I(n, 0)} \sin n\pi\eta \quad (28)$$

是满足屈科米方程的。其中^[3]

$$I(n, \xi) = |\xi|^{\frac{1}{3}} Z_{\frac{1}{3}}\left(\frac{i2n\pi}{3} - |\xi|^{\frac{2}{3}}\right),$$

$Z_{\frac{1}{3}}$ 代表 $\frac{1}{3}$ 阶的贝塞尔函数的线形组合。从公式 (28) 可以得出

$$g(\eta) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{I'(n, 0)}{I(n, 0)} \sin n\pi\eta, \quad (29)$$

I' 是 I 的 ξ 微商。(27) 和 (29) 两式说明了 $f(\eta)$ 与 $g(\eta)$ 是 η 的周期性以及反对称函数, 也就是说,

$$\left. \begin{aligned} f(\eta) &= f(\eta \pm 2n), & f(\eta) &= -f(-\eta); \\ g(\eta) &= g(\eta \pm 2n), & g(\eta) &= -g(-\eta). \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

利用这些特性, 方程 (26) 便可简化为

$$f(\eta) = \frac{3^{\frac{2}{3}} \Gamma^3\left(\frac{1}{3}\right)}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(z)}{|s-\eta|^{\frac{1}{3}}} ds. \quad (II)$$

从前面两个积分关系, (I) 和 (II) 式, 我们便可以决定 $f(\eta)$ 或者 $g(\eta)$ 。同时本题的数学解法程序业已完成。此后如果要找出亚声速流函数在速度图内的分布情况, ψ_1 可以从 (28) 式得出。求超声速流函数的分布, 则用 (21) 式。所以本问题之关键是从 (I) 及 (II) 两式中决定 $f(\eta)$ 或 $g(\eta)$, 也就是函数 ψ_1 在声速线 AB 上之分布情况。现在我们从 (I), (II) 两式将 $f(\eta)$ 消去, 即得

$$\int_0^{\eta} \frac{g(y)}{(\eta-y)^{\frac{1}{3}}} dy = \frac{2\pi^2 Q_m}{3^{\frac{2}{3}} \Gamma^3\left(\frac{1}{3}\right)} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(s)}{|s-\eta|^{\frac{1}{3}}} ds.$$

当推演(I)式时, η 的数值只限于 0 与 1 之間; 这个条件, $0 \leq \eta \leq 1$, 在以后运用上式时, 仍應該注意到。如果把上式的右边当作一个 η 的函数, 而后用阿贝尔倒换积分公式, 上式便轉变为

$$g(\eta) = \frac{3^{\frac{5}{6}} \pi Q_m}{\Gamma^3\left(\frac{1}{3}\right)} \eta^{\frac{1}{3}} - \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \frac{d}{d\eta} \int_{-\infty}^{\infty} g(s) ds \int_0^{\eta} \frac{dy}{(\eta-y)^{\frac{2}{3}} |s-y|^{\frac{1}{3}}} \quad (31)$$

最后一項中被积分函数有一个一阶奇点, 所以不能在积分符号内进行微分。可是我們利用哥西主值来计算, 就可以避免这个困难。詳細計算見附注二, (31)式最后变为

$$g(\eta) = \frac{2\pi Q_m}{3^{\frac{1}{6}} \Gamma^3\left(\frac{1}{3}\right)} \eta^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{\sqrt{3} \pi} \oint_0^{\infty} \left(\frac{s}{\eta}\right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{1}{s-\eta} - \frac{1}{s+\eta}\right) g(s) ds, \quad (-1 \leq \eta \leq 1), \quad (III)$$

式中 \oint 代表哥西主值的积分。方程(III)是一种哥西型的奇异积分方程, 因其核函数包含了 $\frac{1}{s-\eta}$ 項。倒換此方程以求出函数 $g(\eta)$ 将是本文最后一个重要步骤。如令

$$\rho(\eta) = \frac{1}{\eta^{\frac{1}{3}}} g(\sqrt{\eta}), \quad A = \frac{2\pi Q_m}{3^{\frac{1}{6}} \Gamma^3\left(\frac{1}{3}\right)};$$

則方程(III)更可簡化为

$$\rho(\eta) = A - \frac{1}{\sqrt{3} \pi} \oint_0^{\infty} \frac{\rho(s)}{s-\eta} ds, \quad (0 \leq \eta \leq 1). \quad (32)$$

六. 奇异积分方程(III)之解

卡尔勒門在 1922 年^[6]曾利用复函数求有关哥西型的奇异积分方程之解。其方法簡單而应用很广。他主要討論的是与(32)式相仿的方程

$$\rho(x) + \lambda \oint_a^b \frac{\rho(s)}{s-x} ds = f(x), \quad (33)$$

式中 $f(x)$ 为已知, λ 系一常数, 而 $\rho(x)$ 是所求之函数。为了清楚地了解此式之意义和說明卡尔勒門方法, 我們引用一个熟知的例子。在二維不可压缩流体力学中, 如果有双源分布在 ab 綫段上(不妨假定其与 x -軸重合), 其密度函数为 $\rho(x)$, 則其复位势为

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\rho(s)}{s-z} ds. \quad (34)$$

$\Phi(z)$ 在平面 z 內, 除了割綫 ab 外, 是一个全純复函数。通过割綫 ab 时, 則有下列关系

$$\Phi^+(x) = \varphi^+(x) + i\psi(x) = \frac{\rho}{2} + \frac{1}{2\pi i} \oint_a^b \frac{\rho(s)}{s-x} ds,$$

$$\Phi^-(x) = \varphi^-(x) + i\psi(x) = -\frac{\rho}{2} + \frac{1}{2\pi i} \oint_a^b \frac{\rho(s)}{s-x} ds.$$

或者

$$\left. \begin{aligned} \Phi^+(x) - \Phi^-(x) &= \varphi^+(x) - \varphi^-(x) = \rho(x), \\ \Phi^+(x) + \Phi^-(x) &= 2i\psi(x) = \frac{1}{\pi i} \oint_a^b \frac{\rho(s)}{s-x} ds. \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

因此方程 (33) 可以解释为在 ab 綫上位势差 $\varphi^+ - \varphi^-$ 与流函数 ψ 的关系式。求該式之解便是求双源分布在 ab 綫上之密度函数。如果把 (35) 式代入 (33) 式, 我們得到关于 $\Phi(z)$ 在割綫 ab 上的关系式

$$\Phi^+(x) - G(x)\Phi^-(x) = h(x), \quad (a \leq x \leq b), \quad (36)$$

式中

$$G(x) = e^{-2i \tan^{-1} \lambda x},$$

$$h(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{1 + \lambda^2 x^2}} e^{-i \tan^{-1} \lambda x}.$$

卡尔勒門的方法是將 (33) 式改变成一个所謂希尔伯-黎曼問題: 根据 (36) 式的边界条件, 求出一个在平面 z 内的全純复函数 $\Phi(z)$; 該函数通过割綫 ab 时是不連續的。这个問題的解答已經有一定的形式^[11]。然而本文所討論的方程 (III) 有一些特別。記得从公式 (26) 推演到方程 (II) 时, 我們利用了 $g(\eta)$ 的周期和反对称性質, 公式 (30), 而將从 0 到 1 的积分改成从 $-\infty$ 到 ∞ 。因而方程 (III) 的 $g(\eta)$ 在积分符号内是受了限制。現在我們把方程 (III) 重新調整如下

$$(\eta - 2k)^{\frac{2}{3}} g(\eta) = A(\eta - 2k) - \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}\pi}} \left\{ \int_{2k}^{\infty} \frac{(s-2k)^{\frac{2}{3}} g(s) ds}{s-\eta} + \int_{-\infty}^{2k} \frac{(s-2k)^{\frac{2}{3}} [-g(s)] ds}{s-\eta} \right\}, \quad \left. \begin{array}{l} (2k-1 \leq \eta \leq 2k+1) \\ k=0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{array} \right\} \quad (37)$$

$$\text{令 } u_k(z) = \frac{1}{2\pi i} \left\{ \int_{2k}^{\infty} \frac{(s-2k)^{\frac{2}{3}} g(s) ds}{s-z} + \int_{-\infty}^{2k} \frac{(s-2k)^{\frac{2}{3}} [-g(s)] ds}{s-\eta} \right\} \quad (2k-1 \leq z \leq 2k+1)$$

$$\text{那末 } \left. \begin{array}{l} u_k^+(\eta) - u_k^-(\eta) = (\eta - 2k)^{\frac{2}{3}} g(\eta), \quad (2k \leq \eta \leq 2k+1); \\ = -(\eta - 2k)^{\frac{2}{3}} g(\eta), \quad (2k-1 \leq \eta \leq 2k); \\ u_k^+(\eta) + u_k^-(\eta) = \frac{1}{\pi i} \left\{ \int_{2k}^{\infty} \frac{(s-2k)^{\frac{2}{3}} g(s) ds}{s-\eta} + \int_{-\infty}^{2k} \frac{(s-2k)^{\frac{2}{3}} [-g(s)] ds}{s-\eta} \right\}, \quad (38) \\ \quad (2k-1 \leq \eta \leq 2k+1). \end{array} \right\}$$

我們希望求出一个全純复函数 $\Phi(z)$ 以 η 軸为其割綫。在 η 軸上, 它的边界值和 $u_k(z)$ 相同, 因此

$$\Phi^+(\eta) = u_k^+(\eta), \quad \Phi^-(\eta) = u_k^-(\eta), \quad (2k-1 \leq \eta \leq 2k+1). \quad (39)$$

將 (38), (39) 式代入 (37) 式, 經簡單計算即得

$$\Phi^+(\eta) - G(\eta)\Phi^-(\eta) = h(\eta), \quad (40)$$

其中

$$\left. \begin{array}{l} G(\eta) = e^{-\frac{i\pi}{3}}, \quad h(\eta) = \frac{\sqrt{\frac{3}{2}}}{2} A(\eta - 2k) e^{-\frac{i\pi}{6}}, \quad (2k \leq \eta \leq 2k+1); \\ G(\eta) = e^{\frac{i\pi}{3}}, \quad h(\eta) = -\frac{\sqrt{\frac{3}{2}}}{2} A(\eta - 2k) e^{\frac{i\pi}{6}}, \quad (2k-1 \leq \eta \leq 2k). \end{array} \right\} \quad (41)$$

至此, 我們已經把本文中的奇异积分方程 (III) 轉換成希尔伯-黎曼問題, (40) 式。其解法在奇异积分方程理論中并不太难。这里我們且將主要結果写出。方程 (40) 的齐次解, 就是当 $h(\eta) = 0$ 的解, 为

$$X(z) = \tan^{\frac{1}{3}} \sigma z.$$

从而可以求出非齐次解

$$\bar{\Phi}(z) = \frac{X(z)}{2\sigma i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(s)}{X^+(s)(s-z)} ds.$$

最后再根据(38)及(39)式,取 $h=0$, 即得

$$\begin{aligned} \eta^{\frac{2}{3}} g(\eta) &= \bar{\Phi}^+(\eta) - \bar{\Phi}^-(\eta) = \\ &= \frac{3}{4} A \left\{ \eta - \frac{\tan^{\frac{1}{3}} \frac{\sigma \eta}{2}}{\sqrt[3]{3}} \int_0^1 \frac{s}{\tan^{\frac{1}{3}} \frac{\sigma s}{2}} \sum_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2b-s-\eta} - \frac{1}{2b-s+\eta} \right) ds \right\}. \end{aligned} \quad (42)$$

附注一：公式(26)之推演

因为沿 OA 和 OB , ψ_1 及 V 均等于零, 所以(25)式可以写为

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \left(|\xi| \frac{\partial \psi_1}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial n} + \frac{\partial \psi_1}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial n} \right) V ds - \int_{\gamma} \psi_1 \left(\frac{\partial V}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial n} + |\xi| \frac{\partial V}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial n} \right) ds + \\ + \left(\int_{B\bar{E}_1} + \int_{S_1 A} \right) \left(V \frac{\partial \psi_1}{\partial \xi} - \psi_1 \frac{\partial V}{\partial \xi} \right) ds = 0. \end{aligned} \quad (i)$$

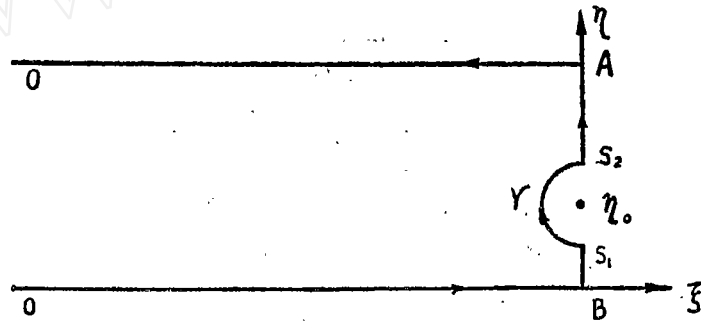


图 5.

参照图 5, 如果把 γ 弧绕着 η_0 缩小而求其极限, 那末可以看出, 上式第一积分内之被积函数在任何一点至多有一个小于一阶的无穷大, 所以第一积分之极限为零. 现在我们可以证明第二个积分为有限量, 并且算出其极限值. 令 $z = \frac{2}{3} |\xi|^{\frac{2}{3}}$, 再让 γ 弧为以 r 做半径的半圆弧, 其间 $r = \sqrt{(\eta - \eta_0)^2 + z^2}$, 再令 $\eta - \eta_0 = r \cos \theta$, $z = r \sin \theta$ (或 $|\xi| = \left(\frac{3}{2} r \sin \theta\right)^{\frac{3}{2}}$), 因此即得

$$ds = \frac{r}{\sqrt{|\xi|}} = \sqrt{|\xi|} \sin^2 \theta + \cos^2 \theta d\theta. \quad (ii)$$

沿 γ 弧上,

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial n} = \frac{\partial \eta}{\partial s} &= -\frac{\sin \theta \sqrt{|\xi|}}{\sqrt{|\xi| \sin^2 \theta + \cos^2 \theta}}, \\ \frac{\partial \eta}{\partial n} &= -\frac{\partial \xi}{\partial s} = \frac{\cos \theta}{\sqrt{|\xi| \sin^2 \theta + \cos^2 \theta}}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{iii})$$

从(24)式,我們算出

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} &= 0, \\ \frac{\partial V}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} &= -\frac{1}{3} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{|\eta - (2m + \eta_0)|^{\frac{4}{3}}} - \frac{1}{|\eta - (2m - \eta_0)|^{\frac{4}{3}}} \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{iv})$$

將上列公式(ii), (iii), (iv)代入(i)式中,再讓 $r \rightarrow 0$, 我們即得

$$\lim_{r \rightarrow 0} - \int_{\pi}^0 \psi_1 \left(-\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \xi} + \sqrt{|\xi|} \cos \theta \frac{\partial V}{\partial \eta} \right) r d\theta + \int_0^1 V(0, \eta; \eta_0) g(\eta) d\eta. \quad (\text{v})$$

上式第一积分用 I 来代表,可以改写为

$$I = \lim_{r \rightarrow 0} \int_0^{\pi} r \psi_1 \left\{ -\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \xi} + \left(\frac{3}{2} r \sin \theta \right)^{\frac{1}{3}} \cos \theta \frac{\partial V}{\partial \eta} \right\} d\theta.$$

其中 V 函数的偏微商仍是从(24)式求得,

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \xi} &= \frac{2}{3} |\xi|^{\frac{1}{3}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{[|r \cos \theta - 2m|^2 + r^2 \sin^2 \theta]^{\frac{7}{6}}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{[|r \cos \theta - (2m - \eta_0)|^2 + r^2 \sin^2 \theta]^{\frac{7}{6}}} \right\}, \\ \frac{\partial V}{\partial \eta} &= -\frac{1}{3} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{|r \cos \theta - 2m|}{[|r \cos \theta - 2m|^2 + r^2 \cos^2 \theta]^{\frac{7}{6}}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{|r \cos \theta - 2m - \eta_0|}{[|r \cos \theta - (2m - \eta_0)|^2 + r^2 \sin^2 \theta]^{\frac{7}{6}}} \right\}. \end{aligned}$$

很容易看出,当 $r=0$, $m \neq 0$, 則 I 的極限为零. 如果將上面的級数中 $m=0$ 項代入 I , 那末它的極限为

$$I = \lim_{r \rightarrow 0} -\frac{1}{3} \left(\frac{3}{2} \right)^{\frac{1}{3}} \int_0^{\pi} \psi_1 \sin^{\frac{1}{3}} \theta d\theta.$$

再利用平均值定理,

$$I = -\frac{1}{3} \left(\frac{3}{2} \right)^{\frac{1}{3}} \lim_{r \rightarrow 0} \psi_1(0, \eta_0) \int_0^{\pi} \sin^{\frac{1}{3}} \theta d\theta = -\frac{4\pi^2}{3^{\frac{2}{3}} \Gamma^3\left(\frac{1}{3}\right)} f(\eta_0).$$

回到(v)式,从此我們得到 $f(\eta)$ 与 $g(\eta)$ 的关系.

$$f(\eta_0) = \frac{3^{\frac{2}{3}} \Gamma^3\left(\frac{1}{3}\right)}{4\pi^2} \int_0^1 V(0, \eta; \eta_0) g(\eta) d\eta.$$

最后把(24)式所給的 V 函数代入,便可得到(26)式.

附注二：方程 (III) 的推演

令(31)式的最后一项为 $S(\eta)$, 则

$$S(\eta) = \frac{d}{d\eta} \int_{-\infty}^{\infty} I(s, \eta) g(s) ds. \quad (i)$$

其中 $I(s, \eta) = \int_0^{\eta} \frac{dy}{(\eta-y)^{\frac{2}{3}} |s-y|^{\frac{1}{3}}}$ 可以直接积分, 但要注意下列几种不同情况:

当 $\eta \leq s$ 时,

$$I(s, \eta) = \int_0^{\eta} \frac{dy}{(\eta-y)^{\frac{2}{3}} (s-y)^{\frac{1}{3}}} = 3 \int_0^{(\frac{\eta}{s})^{\frac{1}{3}}} \frac{dt}{1-t^3};$$

当 $0 \leq s \leq \eta$ 时,

$$I(s, \eta) = \int_0^s \frac{dy}{(\eta-y)^{\frac{2}{3}} (s-y)^{\frac{1}{3}}} + \int_0^{\eta} \frac{dy}{(\eta-y)^{\frac{2}{3}} (y-s)^{\frac{1}{3}}} = 3 \int_0^{(\frac{s}{\eta})^{\frac{1}{3}}} \frac{tdt}{1-t^3} + \frac{2\pi}{\sqrt{3}}. \quad (ii)$$

当 $s \leq 0 \leq \eta$ 时,

$$I(s, \eta) = \int_0^{\eta} \frac{dy}{(\eta-y)^{\frac{2}{3}} (y-s)^{\frac{1}{3}}} = 3 \int_0^{-(\frac{\eta}{s})^{\frac{1}{3}}} \frac{dt}{1+t^3}.$$

依据这些结果, $S(\eta)$ 便可从 (i) 式中计算

$$\begin{aligned} S(\eta) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{d}{d\eta} \left\{ \int_{-\infty}^{\eta-\varepsilon} + \int_{\eta+\varepsilon}^{\infty} + \int_{\eta-\varepsilon}^{\eta+\varepsilon} \right\} I(s, \eta) g(s) ds = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \left(\int_{-\infty}^{\eta-\varepsilon} + \int_{\eta+\varepsilon}^{\infty} \right) \frac{dI}{d\eta} g(s) ds + I(\eta-\varepsilon, \eta) g(\eta-\varepsilon) - I(\eta+\varepsilon, \eta) g(\eta+\varepsilon) \right\} + \\ &\quad + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{d}{d\eta} \int_{\eta-\varepsilon}^{\eta+\varepsilon} I(s, \eta) g(s) ds. \end{aligned}$$

上式最后的一项为零, 并且因为

当 $\eta \leq s$ 以及 $0 \leq s \leq \eta$ 时,

$$\frac{dI}{d\eta} = \left(\frac{s}{\eta} \right)^{\frac{2}{3}} \frac{1}{s-\eta};$$

当 $s \leq 0 \leq \eta$ 时

$$\frac{dI}{d\eta} = - \left(\frac{s}{\eta} \right)^{\frac{2}{3}} \frac{1}{s-\eta};$$

$$\text{而} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ I(\eta-\varepsilon, \eta) g(\eta-\varepsilon) - I(\eta+\varepsilon, \eta) g(\eta+\varepsilon) \right\} = \frac{\pi}{\sqrt{3}} g(\eta);$$

所以

$$\begin{aligned} S(\eta) &= - \int_{-\infty}^0 \left(\frac{s}{\eta} \right)^{\frac{2}{3}} \frac{g(s)}{s-\eta} ds + \int_0^{\infty} \left(\frac{s}{\eta} \right)^{\frac{2}{3}} \frac{g(s)}{s-\eta} ds + \frac{\pi}{\sqrt{3}} g(\eta) = \\ &= \int_0^{\infty} \left(\frac{s}{\eta} \right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{1}{s-\eta} - \frac{1}{s+\eta} \right) g(s) ds + \frac{\pi}{\sqrt{3}} g(\eta). \end{aligned}$$

参 考 文 献

- [1] Tricomi, F., "On Linear Partial Differential Equations of the Second Order of Mixed Type", Transl. A9-T-26, *Grad. Div. of Appl. Math.* Brown Univ. (USA), 1948.
- [2] Tomotika, S. and Tamata, K., "Studies on Two-dimensional Transonic Flow of a Compressible fluid", I. *Quart. Appl. Math.* 7.4 (1950), 381—397.
- [3] Guderley, G. and Yoshihara, H., "The Flow over a Wedge Profile of Mach Number 1", *Jour. Aero. Sci.* 17 (1950), 723—735.
- [4] Cole, J. D., "Drag of a Finite Wedge of High Subsonic Speeds", *Jour. Math. and Phys.* 30 (1951), 79—93.
- [5] Vincenti, W. G. and Wagner, C. S., "Transonic Flow Past a Wedge Profile with Detached Bow Wave", NACA TN 2588 (1951).
- [6] Carleman, T., "Sur la Resolution de Certaines Equations Integrales", *Arkiv. fur Math. Astron. Och Fysik*, Bd. 166 (1922).
- [7] Chaplygin, S. A. "On Gas Jets", NACA TM 1063 (1944).
- [8] Guderley, G., "Considerations of the Structure of Mixed Subsonic-supersonic Flow Pattern", Wright Field Report F-TR-2168-ND (1947).
- [9] Frankl, F., "On the Problem of Chaplygin for Mixed Sub- and Supersonic Flows", NACA TM 1155 (1947).
- [10] Frankl, F., "Flow of a Supersonic Jet from a Vessel with Plane Walls", Transl. A-9-T-32 *Grad. Div. of Appl. Math.*, Brown Univ. U. S. A.
- [11] Muskhelishvili, N. I., *Singular Integral Equations*, Translated from Russian by Rokok, 1953, P. Noordhoff Ltd. Groningen, Holland.

THE SOLUTION OF TRICOMI'S EQUATION FOR A TRANSONIC JET

PIEN, YEN-KWEI

(*Institute of Mechanics, Academia Sinica*)

ABSTRACT

The boundary value problem of a transonic jet formulated in the hodograph plane is to solve the Tricomi's equation, $u_{xx} - \alpha u_{yy} = 0$, in both subsonic (elliptic) and supersonic (hyperbolic) regions. It is known that this problem involving the mixed-type equation can be reduced to a purely elliptic type. Since the general solution is available in the hyperbolic region, a functional relation between the stream function and its derivative can be formed along the sonic line and serves as an additional condition for the flow in the elliptic region. However, a direct approach proved to be still difficult. This difficulty is overcome by constructing another functional relation based on the boundary condition in the elliptic region. The two functional relations which must be compatible enable us to determine either the stream function or its derivative on the sonic line. Consequently, the original problem is reduced to an inversion of a singular integral equation of Cauchy-type. The inversion is carried out by using Carleman's method which is to transform the singular integral equation into a Hilbert-Riemann problem.