

二元渠道中泥沙的輸移和渠底的改變*

蔡 樹 棠

(中國科學院力學研究所)

摘 要

研究泥沙運動是對我國國民經濟有很重要意義的工作。過去有很多實測，實驗和理論研究工作，但都沒有能够很清楚地說明輸沙機構和解決一些爭論的問題。本文從流體力學的觀點，首先對懸沙、底沙和中間過渡類型的泥沙加以區分，然後再按照這樣的區分來建立一個簡單的模型圖案。根據這一個模型圖案和流體力學的基礎理論，我們建立了一個自己封閉的方程組來確定速度，水深，含沙濃度等未知的流體力學量。這方程組中的每一個方程式在和已有的實驗結果比較時候，大致都能够符合得很好。接着我們根據這些方程式，得到兩個水流相似的必要和充分條件。最後我們對用這些方程式計算流速和水深以及設計不淤渠道給出了計算的方法。爲了能把每一步驟所需要的經驗常數更好的肯定下來，我們建議做一系列有系統的精密實驗來作出計算所需要的圖表。

一. 引 言

泥沙問題是我國特殊問題之一。我國北方的幾條大河含沙量一般都很高。我們不預備來談非常特殊的情形，我們僅僅討論一般的情況。就像鄭州附近黃河上的秦廠水文站上所測得的含沙量，以重量計在夏天約爲百分之八，在冬天約爲百分之二。永定河的情況和黃河差得不多。其他的北方河流的情況也好不了多少。即使在一般人心目中間認爲帶沙並不嚴重的長江，他的含沙量也達到千分之二和蘇聯帶沙最多的河流阿姆塔里河差不多。河流裏所帶的泥沙既然這樣多，對於在河流上與修水利工程來說自然會產生很大的影響。例如在修建水庫的時候就必須考慮水庫的排淤問題，在設計灌溉渠系的時候，就必須考慮使用沉沙池問題，穩定渠道的設計問題。甚至在討論水力發電時候，也必須注意到水流挾帶泥沙以後可能引起的水輪機的磨損問題。因此研究泥沙問題在我國是非常迫切需要的。

同時我國的泥沙問題有着它自己的特點，就是在一般的河道裏所挾帶的泥沙特別細。因此在整個泥沙的輸移量中間懸沙所佔的比重特別大，底沙幾乎完全可以略去不計。就以黃河爲例，所含泥沙的平均粒徑約爲 0.02—0.03 公厘，長江和其他河流的情況也大致相同。因此在我國研究泥沙問題時候，懸沙輸移量的研究是一個特出的重點。關於懸沙輸移問題的研究，過去的工作很多。有很多人做過很多室內的實驗研究工作^[1,2]和野外的觀測工作^[3,4]，得到了非常多的數據和經驗公式。不過這些公式考慮的因素很不完備，因此它們的局限性非常大，不能拿來廣泛應用。最使人頭痛的還是用不同公式計算出來的含沙

* 1957 年 11 月 15 日收到。

量差別非常大，最大的和最小的有時可以差到一百多倍。這使很多水利工程師弄得啼笑皆非。關於這一點我們將要在下面一節中談到，不再在這裏多講。在理論方面的研究工作有擴散理論^[6]。根據擴散理論，我們可以得到含沙濃度沿水深方向的變化。從很多的實驗結果，證明這個理論是和實驗符合的。但是這一個理論有一個很大的缺點，就是必須知道某一點上的含沙量以後，才能把輸沙量求出來。針對了這一個缺點，雷因-卡林斯基^[7]，H. A. 愛因斯坦^[7]，白格諾^[8]都曾對近底含沙量問題做過一些工作，但是都沒有辦法解決佔懸移泥沙最大部分的細沙的輸移問題。

本文的目的就是試圖從理論的角度來提出一個解決河渠中含沙濃度不高時候，泥沙輸移問題的辦法。所謂含沙濃度不高是指水流除了近底沙漣起伏不平的區域以外，在主流部分渾水密度並不比清水密度大得很多。全文討論三方面的問題：第一方面討論河床粗糙度和水力因素的關係；第二方面討論泥沙的輸移；第三方面討論泥沙運動問題中的相似律。在討論的過程中，我們建立了一個簡單化了的泥沙運動的圖案。根據這一個圖案，我們得到了一系列簡單的公式。把這些公式和現有的實測結果比較的時候，大體上都能符合得很好。不過現在已有的實測數據是很不全面的，有些數據水力因素的變化範圍很小，有些數據根本缺少。同時測量的精確度也是很成問題的。因此我們所得到的這些公式的正確程度和適用範圍還必須進一步從實驗方面來加以研究。從而得到一組能廣泛應用的公式。

二. 現有的挾沙能力公式的概述

我們現在來把常見的一些挾沙能力公式給以提綱式的介紹並且進行比較。

(1) B. B. 波斯拉夫斯基(B. B. Пославский)公式^[9]

波斯拉夫斯基教授整理了中亞細亞水利試驗研究所(簡稱為 SAOИИВХ)(塔什干)野外實測資料的結果，提出了以下關於水流挾沙能力的公式

$$\rho = ARi.$$

式中： ρ ——水流挾沙能力公斤/公方；

i ——水面坡降；

R ——等速運動時的水力半徑，單位為米；

A ——係數，由 17,000 變到 24,000，就第二數值講，渠道還有淤積的可能性。

(2) Г. С. 契庫拉也夫(Г. С. Ченулаев)公式^[9]

契庫拉也夫工程師在同一處(中亞細亞水利試驗研究所的)野外調查資料的基礎上，增添了在飢餓草原地區(塞爾河中游左岸)所得的研究材料，對水流挾沙能力提出了如下的公式

$$\rho = B\sqrt{RiV}.$$

式中： ρ ——水流挾沙能力公斤/公方；

i ——水面坡降；

R ——等速運動時的水力半徑，單位為米；

V ——斷面平均流速；

B ——係數，由 400 (主要對飢餓草原上的渠道)到 450 (主要是對花拉子模渠道)。

(3) Г. О. 霍爾斯脫(Г. О. Хорст)公式^[3]

Г. О. 霍爾斯脫工程師除了考慮到了所有上述公式中的各水力因素以外，還加入了懸移質泥沙平均沉速 ω 。他對花拉子模渠道的挾沙能力提出了下列的公式

$$\omega \rho \frac{\gamma_1 - \gamma}{\gamma} = 2500 RiV.$$

式中： ρ ——水流挾沙能力公斤/公方；

i ——水面坡降；

R ——等速運動時的水力半徑單位為米；

V ——斷面平均流速；

γ_1 ——泥沙的比重；

γ ——水的比重；

ω ——泥沙的加權平均沉速，單位為厘米/秒。

(4) А. А. 契爾卡索夫(А. А. Чернасов)公式^[3]

А. А. 契爾卡索夫教授根據中亞細亞水利試驗研究所，南高加索水利科學研究所，五條美洲渠道及一些其他外國渠道的資料(零星而不完全)整理的結果，提出下列臨界(不淤)流速公式

$$V = 0.64 K_1 K_2 \sqrt{R}.$$

式中： K_1 ——係數，隨 Ri 值而變，其關係並不是用明顯的關係式來表示，而用表格的形式來表示。 R 仍舊是水力半徑以米為單位， i 仍舊是水面坡降；

K_2 ——係數，隨乘積 $\omega \rho \frac{\gamma_1 - \gamma}{\gamma}$ 而變，也是用表格來表達而不用明顯的關係式。

ω 仍舊是泥沙的加權平均沉速以厘米/秒為單位。 ρ 仍舊是水流挾沙能力單位為公斤/公方。 γ_1 和 γ 仍舊是泥沙的比重；

V ——斷面平均流速。

(5) А. Г. 哈洽特良(А. Г. Хачатрян)公式^[3]

科學技術碩士 А. Г. 哈洽特良根據中亞細亞野外調查及其對阿姆河沉沙池和渠道的研究，提出了下列水流挾沙能力公式

$$\rho = 0.69 \frac{V^{3/2}}{\sqrt[3]{R\omega}}.$$

式中： ρ ——水流挾沙能力，公斤/公方；

R ——等速運動時的水力半徑，單位為米；

V ——斷面平均流速；

ω ——沉降速度按米/秒計算。

(6) Г. Н. 羅葉爾(Г. Н. Роев)公式^[3]

Г. Н. 羅葉爾對矩形斷面的水槽提出了下列無壓水流的“不淤”流速公式

$$V = 11.2 \left(\frac{m+2}{m} \right)^{0.320} R^{0.473} [(\gamma_m - 1)\omega]^{0.326} \frac{\gamma H}{\Delta_{0.17}}.$$

式中： V ——斷面平均流速；

$$m = \frac{b}{H};$$

b —— 水面寬度, 以米計算;

H —— 水流深度, 以米計算;

R —— 水力半徑, 以米計算;

γ_n —— 渾水么重, 以公噸/立方米計;

ω —— 泥沙的加權平均沉速以米/秒計;

γ_H —— 泥沙么重, 以公噸/立方米計;

Δ —— 渠床的絕對糙率, 以米計算。

(7) E. A. 薩馬林 (E. A. Замарин) 公式^[8]

E. A. 薩馬林教授在整理了中亞細亞水利試驗研究所的、南高加索水利科學研究所的、中亞細亞灌溉科學研究所的以及其他的野外實測資料之後, 他提出了下列的水流挾沙能力公式

$$\rho = 0.022 \frac{V}{\omega_0} \sqrt{\frac{RiV}{\omega}}$$

式中: ρ —— 飽和含沙量, 公斤/公方;

V —— 斷面平均流速, 米/秒;

R —— 水力半徑, 以米計算;

i —— 水面比降;

ω —— 懸移質泥沙的加權平均沉降速度, 米/秒。

當 $\omega = 0.002 \sim 0.008$ 米/秒時, $\omega_0 = \omega$ 。

$\omega = 0.0004 \sim 0.002$ 米/秒時, $\omega_0 = 0.002$ 。

(8) C. A. 吉爾什堪 (C. A. Гирщан) 公式^[9]

$$\rho = BQ^{0.4i}$$

式中: Q —— 流量, 公方/秒;

i —— 水面坡降;

B —— 係數, 其值如下:

ω (公厘/秒)	B
0.5~1.5	4700
1.6~3.5	3000
3.6~6.5	1100
>6.5	600

(9) B. C. 克諾羅茲 (B. C. Кнороз) 公式^[1]

作者根據相似理論, 並利用木製梯形水槽試驗資料得到如下的挾沙能力公式

$$\rho_1 = \left(\frac{V - 3.5 \sqrt{gd} \lg \frac{R}{4d}}{3.5 \omega} \right)^4 \left(\frac{d}{R} \right)^{1.6}$$

式中: ρ_1 —— 水流挾沙能力, 它是渾水中所含泥沙的重量與所含清水的重量之比以%計;

- V ——流速,公分/秒;
 ω ——顆粒沉降速度,公分/秒;
 R ——水力半徑,公分;
 d ——泥沙平均粒徑,公分。

(10) М. А. 費里卡諾夫(М. А. Великанов)公式^[9]

作者根據水流在單位長度能量的損失,和水流的阻力功及泥沙懸浮功的平衡條件,並假定渾水在極限飽和狀態時的阻力係數為一定值,推導出水流挾沙能力公式為

$$\rho = K \frac{V^3}{gR\omega}.$$

- 式中: ρ ——水流挾沙能力,公斤/公方;
 V ——流速,公尺/秒;
 R ——水力半徑,公尺;
 ω ——泥沙顆粒沉降速度,公分/秒;
 g ——重力加速度,公尺/秒²;
 K ——係數。

(11) С. X. 阿勃爾瓦次(С. X. Абальвич)公式^[10]

作者根據渾水中泥沙的垂直(垂直於水流方向)紊動流速的變化與壓力變化的平衡關係,並假定紊動流速與水流縱向平均速度成直綫關係,推導出水流挾沙能力的基本公式為

$$\rho = R_0 \frac{V^4}{\omega h}.$$

並根據野外實測的資料得到下列關係式

$$\rho = 26 \frac{V^3}{\omega R^{3/4}}.$$

- 式中: ρ ——水流挾沙能力,公斤/公方;
 V ——流速,公尺/秒;
 ω ——顆粒平均沉降速度,公厘/秒;
 R ——水力半徑,公尺。

(12) Н. М. 雅勃洛柯夫(Н. М. Яблонов)公式^[2]

$$\rho \omega = 45 Vi.$$

- 式中: ρ ——水流挾沙能力;
 V ——平均流速;
 i ——水流比降;
 ω ——顆粒平均沉降速度。

(13) А. Н. 葛斯東斯基(А. Н. Гостунский)公式^[10]

葛斯東斯基引用了泥沙負荷的概念,也就是支持泥沙所消耗的功率,求得了下列公式

$$\rho = \Gamma \frac{h^{0.5} i^{3/2}}{\omega}.$$

- 式中: ρ ——水流挾沙能力,公斤/公方;

- h ——水深，以公尺計；
 i ——水流比降；
 ω ——顆粒平均沉降速度，以公尺/秒計；
 Γ ——係數 2000~3000。

(14) A. B. 葉伏里莫夫(A. B. Ефремов)公式^[10]

作者於 1955 年根據野外研究成果補充 A. H. 葛斯東斯基公式得到如下的挾沙能力公式

$$\rho\omega = 6420 i^{3/2} R^{1/2} \left(1 - \frac{V_0}{V}\right) \left(\frac{R}{h_{cp}}\right)^4 A.$$

式中： ρ ——水流挾沙能力，公斤/公方；

i ——水面比降；

R ——水力半徑，公尺；

V ——流速，公尺/秒；

h_{cp} ——平均水深，公尺；

A ——係數，當 $Q > 4$ 公方/秒時， $A = 1$ ，

$Q < 4$ 公方/秒時， $A = 0.61 Q^{1/6}$ ；

$V_0 = V_1 h_{cp}^{0.2}$ ；

V_1 ——水深為 1.0 公尺時，沉降速度為 ω 的泥沙開始落淤的流速，根據試驗資料

$V_1 = 1.2\omega^{2/7}$ ；

ω ——泥沙顆粒加權平均沉降速度，公尺/秒。

(15) И. И. 列維(И. И. Леви)公式

$$\rho = 0.01 \left(\frac{V}{\omega}\right)^4 \left(\frac{d}{h}\right)^2.$$

式中： ρ ——水流挾沙能力，公斤/公方；

V ——流速，公尺/秒；

ω ——沉降速度，公尺/秒；

d ——粒徑，米；

h ——水深，米。

(16) Г. В. 羅泊慶(Г. В. Лапагин)公式^[11]

$$\rho = \frac{4h^{0.5}i}{n^2\omega}.$$

式中： ρ ——水流挾沙能力，公斤/公方；

h ——水深，公尺；

i ——水面比降；

ω ——沉降速度，公尺/秒；

n ——粗糙係數。

(17) А. В. 克拉吳獻夫(А. В. Караушев)公式^[12]

$$\rho = \Gamma \frac{k\eta^2 NV^2}{R}.$$

式中： ρ ——水流挾沙能力，公斤/公方；

$$N = \frac{MC}{g};$$

$$M = 0.7C + 6;$$

$$\eta = \sqrt{\frac{0.57C - 4.1}{C - 2}};$$

$$k = 0.00009 \cdot \frac{\gamma_{CM}}{\gamma_s - \gamma_{CM}};$$

γ_{CM} ——渾水比重；

γ_s ——泥沙比重；

C ——謝才係數；

Γ ——係數，可以查表格求得；

V ——流速，米/秒。

(18) 1956年提出的人民勝利渠挾沙能力公式^[1]

$$\rho = 10.4 \frac{V^3}{k^{2/3} \omega^{2/3} i}$$

如不考慮 ω, i ，則公式的形式為

$$\rho = 11.3 \frac{V^3}{R^{3/2}}$$

北京水利科學研究院范家驊工程師也應用人民勝利渠實測資料得到下列公式

$$\rho = 2.34 \frac{V^4}{R^2 \omega}$$

式中： ρ ——挾沙能力，公斤/公方；

V ——斷面平均流速，公尺/秒；

R ——水力半徑，公尺；

ω ——懸移質泥沙的加權平均沉降速度，公分/秒；

i ——水面比降，00/00。

(19) 沙玉清公式^[2]

沙玉清教授曾搜集了國內外河流，渠道及水槽的大量資料，用相關分析法求得水流挾沙能力的基本公式為

$$\rho = \frac{A_m}{\omega_{50}^{1/3}} \left(\frac{V - V_{01} R^y}{\sqrt{R}} \right)^m \left(\frac{R}{d_{50}} \right)^{1/6}$$

式中： ρ ——挾沙能力，公斤/公方；

V_{01} ——挾動比速，公尺/秒，它和泥沙的類型，泥沙原來的運動狀態以及水流的穩定性有關；

ω_{50} ——相當於小於某粒徑土重 50% 處的粒徑 d_{50} 的沉降速度；

A_m ——挾沙係數；

m ——指數；

y ——指數 ≈ 0.2 ；

R ——水力半徑,公尺;

V ——流速,公尺/秒。

對於黃土渠道,作者建議的水流挾沙能力公式爲

$$\rho = \frac{10}{\omega_{50}^{1/3}} \left(\frac{V - 0.24R^{0.2}}{\sqrt{R}} \right)^2 \left(\frac{R}{d_{50}} \right)^{1/6}$$

(20) 南京水利實驗處水槽試驗公式^[9]

南京水利實驗處用人工沙在水槽中進行試驗求得的挾沙能力公式爲

$$\rho = 20.9 V^{1.23} i^{1.33} R^{0.7}$$

式中: ρ ——飽和含沙量,公斤/公方;

V ——斷面平均流速,公尺/秒;

R ——水力半徑,公尺;

i ——水面比降,00/00。

我們現在挑三個常用的有代表性的公式,舉一個例子來比較一下。這三個公式是:(一)薩馬林公式,(二)克諾羅茲公式,(三)人民勝利渠挾沙能力公式。我們舉的是克諾羅茲試驗資料中的一個實例,就是資料中表4第29號。給出的數據如下:

$$d = 0.068 \text{ 公厘}, \omega_{\text{平均}} = 0.69 \text{ 公分/秒}, R = 8.5 \text{ 公分},$$

$$V = 177 \text{ 公分/秒}, \tau_{\text{沙}} = 2.758, i = 0.008.$$

根據這些公式求出的飽和含沙量如下:

(一)薩馬林公式, $\rho = 2.41$ 公斤/公方。

(二)克諾羅茲公式, $\rho_1 = 86.5$, $\rho = 660$ 公斤/公方。

(三)人民勝利渠挾沙能力公式, $\rho = 37.6$ 公斤/公方。

而實測的含沙量, $\rho_1 = 19.4$, $\rho = 181$ 公斤/公方。

從這裏我們可以看出根據這些經驗公式算出的飽和含沙量和實測的飽和含沙量相比相差是非常大的;根據不同公式算出來的數值相差可以達到二百多倍。這是因爲這些公式得來的時候有很多條件沒有考慮進去,特別是渠底床沙組成沒有考慮進去起着決定性的影響。爲了更好地解決河渠挾沙能力問題,必須充分考慮渠底的情況。

三. 泥沙運動的一般情況和河床粗糙度的確定

在河渠中運動的泥沙,一般可以分爲懸沙,底沙和它們中間的過渡類型三類。這三類泥沙相互之間的分界是:懸沙相當於細的泥沙,它的沉降速度比起水流的漲落速度來要小得很多。因此它可以隨着水流速度的脈動懸浮在水流中間。底沙相當於粗的泥沙,它的沉降速度比水流的漲落速度要大得多,不過在水流的平均流速和漲落速度的協同作用之下能够在河床上蠕動,有時能够暫時離開河床躍起隨着水流運動。在這兩種情形的中間,存在着過渡形式。這種泥沙的沉速和水流的漲落速度差不多大小。因此這類泥沙既不能完全隨着水流的漲落速度運動,也不是那樣不容易被帶動,形成了一種中間過渡的運動形態。從河底起到水面爲止,這三種類型的泥沙的分佈我們可以用一個簡單的模型圖案來表示。在河床上運動的底沙隨着水流速度的增加,在一定的水力條件下形成沙鏈。關於沙鏈形成的原因,最近白格諾有比較詳細的討論,我們不預備在這裏重覆他的論據。在沙

漣的低窪地區形成了一層非常稠密的泥沙和水的混合物。對於這種混合物，我們已經不再能夠當做普通流體來處理了。在白格諾最近的論文裏對這種混合物的力學性質進行過詳細的討論。在沙漣的上面，跳躍的底沙形成一層濃的渾水。不過它的密度並不大，一般來說比清水的密度並不大很多。在這一層渾水中間，懸沙和過渡類型的泥沙當然也都存在的。再往上就只有懸沙和過渡類型的泥沙了。並且隨了高度的增加，過渡類型的泥沙逐漸減少。到頂上的時候，大顆粒的泥沙根本上不去了，只剩下一些粒子非常細的懸

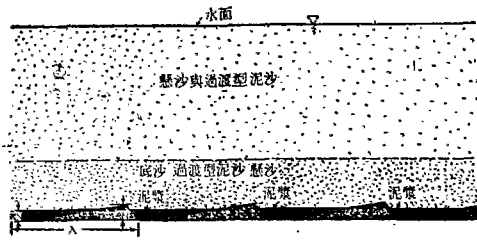


圖 1

沙。上面講的運動模型圖案，我們可以用一個簡單的圖來表示它。

我們現在來討論沙漣和粗糙度的關係。在沙漣已經產生以後，沙漣對於水流所起的作用大體上可以分成兩種不同的情形。第一種是水比較深速度比較快的情形。所謂水比較深就是指河床上沙漣的起伏不平可以當作河床的粗糙度來處理(有些情形下，水面上顯得非常平滑，

並不引起表面波)。所謂速度快是指水流的速度够大，能够使底上大部分的泥沙處在躍移狀態。另一種情形是水比較淺速度比較慢。也就是沙漣的起伏不平不再能當作粗糙度來處理，同時底部的泥沙顆粒是處在滾動狀態。在天然條件下，絕大部分的河床是處在第一種運動狀態之中，因此第一種運動狀態對我們說來顯得特別重要。在我們以下的討論裏都着重在細討論第一種運動形態。第二種運動形態我們僅僅在後面的附錄裏約略地談一下它的一些性質，不預備進行任何詳細的討論。我們現在分別來討論第一種運動形態的各方面的性質。

A. 沙漣的波長

關於沙漣波長的研究，最初布西涅斯克^[13]得到了一個經驗公式。後來卡門^[14]對這一問題在風沙的情形下進行了理論分析，得到了一些簡單的理論公式。三四年以前，安德遜^[15]對沙漣的波長問題進行了一些研究，得到了一個沙漣波長的公式。他的分析中間包含有一個原則性的錯誤，因此他的公式是不正確的。因為他所討論的情形相當於我們所說的第二種運動形態，所以我們把它放在後面的附錄中來討論。關於第一種運動形態下沙漣的波長，我們的辦法是把卡門關於風沙的理論經過了一些非根本性的修改以後用到水流的輸沙問題上去，來得到沙漣波長的公式。

我們先來提一下卡門風沙理論的基本看法。卡門認為在平衡條件下進入風中的沙粒和落下的沙粒相等。假使空氣速度比平衡風速大，就有更多沙粒進入氣流中，假使空氣速度比平衡風速小，就會有更多的沙子沉積下來。一個波面要穩定沿波面的風速就得為常數。現在假使我們考慮有一均勻氣流流過波表面，我們可以看到在波峯速度增加而在波谷速度減少。在空氣動力學中，這個現象稱為伯努里效應。所以由沙子所組成的波面不能在均勻流動中保持形狀不變。在沙子進入氣流以後，空氣就成了非均勻流體，密度隨了高度遞降。我們可以用下列簡單圖案來代替。氣流下層是密度大的較薄的一層流體，在這層中泥沙分配很均勻；在上面則為一無沙層。可以看出伯努里效應和重力效應相反，因為重的流體從波峯到波谷速度是增加的。只有一個波長這兩個作用互相平衡。

按照這樣一個基本看法，在正弦波形小擾動的條件下，卡門得到

$$\lambda_0 = 2\pi U \sqrt{\frac{h_0}{g}}$$

式中 λ_0 是風沙沙漣的波長， U 是上層流體的流速， h_0 是下層流體的深度。同時由於下層流體的深度 h_0 和泥沙顆粒跳躍的高度成正比，因此

$$\lambda_0 = 2\pi\beta_0 \frac{UV_t}{g}$$

式中 β_0 是一個比例常數， V_t 是泥沙躍起時候的初速。

我們現在來討論稀濃度時候水流輸沙的情形。我們考慮到實際上沙漣的波形和正弦波形差得很多。因此我們在卡門原來的方程式裏加上一個形狀修正係數，我們就得到

$$\lambda = 2\pi\alpha_0 U \sqrt{\frac{h_w}{g}} \quad (1)$$

式中 α_0 就是形狀修正係數， λ 和 h_w 是水流輸沙情形下沙漣的波長和下層流體的深度。

同時我們注意到水流輸沙和風力輸沙這兩種情形有一點很不相同。就是在風沙的情形裏，空氣的密度要比砂子的密度小得很多，因此空氣的浮力和阻力都可以略去不計。在水的情形就不同了，砂子的密度比水的密度只大兩倍多一點，因此水的浮力和阻力就不能略去。我們現在來做一個極端粗糙的近似，把水對泥沙的阻力看做是和初速平方成正比和泥沙顆粒斷面成正比的常數阻力。我們把組成河床的泥沙顆粒看做是圓球，它的半徑為 a_0 ，它的密度為 ρ_s 。我們用 V 代表圓球在垂直於水流方向的分速，我們用 ρ 代表挾沙水的密度。根據牛頓第二運動定律，我們可以寫出砂子運動所適合的方程式

$$\frac{4}{3} \pi a_0^3 \left(\rho_s + \frac{1}{2} \rho \right) \frac{dV}{dt} = - \frac{4}{3} \pi a_0^3 (\rho_s - \rho) g - \pi a_0^2 C_D \frac{1}{2} \rho V^2 \quad (2)$$

式中左端表示質量和附加質量合成的慣性力。右端第一項表示重力和浮力的合力。右端第二項表示水對砂子的形狀阻力， C_D 代表阻力係數。我們令

$$G = \frac{\rho_s - \rho}{\rho_s + \frac{1}{2} \rho} g, \quad A = \frac{\frac{3}{8} C_D \rho}{\rho_s + \frac{1}{2} \rho} \quad (3)$$

方程式(2)就改寫成

$$\frac{dV}{dt} = -G - A \frac{V^2}{a_0} \quad (2)'$$

式中 V_t 是常數。所以泥沙顆粒的跳躍高度是

$$\frac{V_t^2}{2 \left(G + \frac{AV_t^2}{a_0} \right)}$$

再按照卡門的看法，下層流體的深度和跳躍高度成正比，就得到

$$\lambda = 2\pi\alpha_0\beta_0 \frac{V_t U}{g} \sqrt{\frac{g}{\left(G + \frac{AV_t^2}{a_0} \right)}} \quad (4)$$

我們用 τ_0 表示在河床上沙粒的平均剪應力，我們用 w'_t 表示沙粒摩阻流速。按沙粒摩阻流速的定義，我們有

$$w'_t = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \quad (5)$$

我們現在假設泥沙顆粒的初起速度 V_t 和水流的沙粒摩阻流速 w'_t 成正比

$$V_t = C_0 w'_t \quad (6)$$

式中 C_0 是比例常數。(4)式就可以化成

$$\frac{U w'_t}{g \lambda} = \sqrt{D_0 + E_0 \frac{w'^2_t}{g a_0}} \quad (7)$$

式中

$$D_0 = \frac{1}{4\pi^2 \alpha_0^2 \beta_0^2 C_0^2} \frac{\rho_s - \rho}{\rho_s + \frac{1}{2}\rho}, \quad E_0 = \frac{A}{4\pi^2 \alpha_0^2 \beta_0^2}$$

作為第一級近似，我們略去渾水和清水密度之間的差別，這樣 G 和 A 都可以當作常數。我們令

$$\frac{E_0 w'^2_t}{D_0 g a_0} = \theta, \quad \frac{1}{\sqrt{D_0}} \frac{U w'_t}{g \lambda} = \zeta$$

(7)式就改寫成

$$\zeta = \sqrt{1 + \theta} \quad (7)$$

我們現在來和椿東一郎^[1]在麥伊川上混凝土渠道中的實測數據相比較。不過在他的數據中並沒有實測的沙粒摩阻流速 w'_t ，只有實測的全摩阻流速 w_s 。從他自己文章上畫的圖來看，沙粒摩擦阻力和全摩擦阻力中間的差別並不是很大，所以我們在比較時候用 w_s 來代替 w'_t 。同時我們注意到底沙輸沙量的無量綱表示 Φ 是和愛因斯坦的 ψ 有關的，而 ψ 又

表 1. $\frac{E_0}{D_0} = 2.46, \quad \frac{1}{\sqrt{D_0}} = 4.63 \times 10^2$

編號*	x	y	單寬輸沙量 q	無量綱輸沙量 Φ
渠 A	1	1.02	0.162	0.0898
	3	1.23	0.212	0.118
	4	1.58	0.219	0.138
	6	1.60	0.286	0.150
	7	1.88	0.366	0.203
	8	2.20	0.383	0.212
	10	3.00	0.522	0.289
渠 B	1	0.70	0.0806	0.0448
	2	0.96	0.0669	0.0371
渠 C	1	1.34	0.261	0.116
	2	1.67	0.314	0.139
	3	1.74	0.433	0.192

* 這個編號是我們按照椿東一郎的數據的次序加上去的。

和 $\frac{w_*^2}{g\alpha_0}$ 成正比的。因此我們在這些數據中僅僅採取有輸沙量 ϕ 的各點，而把 ϕ 的值列在旁邊做參考。根據實驗數據，我們確定 $\frac{E_0}{D_0} = 2.46$ ， $\frac{1}{\sqrt{D_0}} = 4.63 \times 10^2$ 。假使我們設 $A = 0.1$ ， $\frac{\rho_s}{\rho} = 2.7$ 從 D_0 和 E_0 的表達式中，我們可以求出 $C_0 = 3.61$ ， $\alpha_0\beta_0 = 15$ ，可以看得出來，這些數值是在情理之中的；因此上面所舉的這兩個比例常數也是合理的。在我們取 $\frac{E_0}{D_0} = 2.46$ ， $\frac{1}{\sqrt{D_0}} = 4.63 \times 10^2$ 以後，經過一些計算，我們把椿束一郎的觀察結果化成無量綱參數 θ, ζ 。結果列在表 1 上。

把這些觀察結果和理論公式(7)'比較，結果畫成圖 2。圖中實綫就是公式(7)'，"×"代表實測點子。從圖上看來點子雖然分散，但還有一個規律可循。分散的原因，很可能是由於我們用 u_* 來代替 u_*' 造成的。

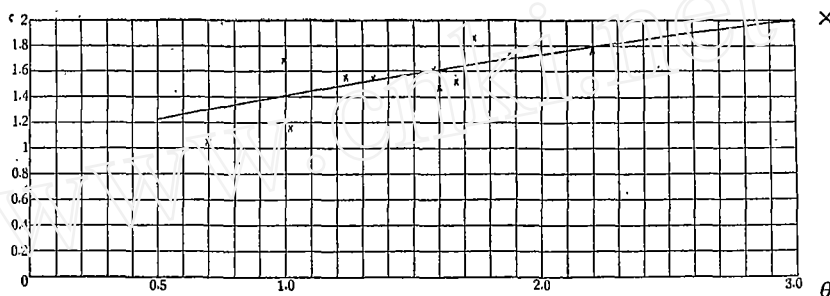


圖 2

B. 沙灘的波高

當我們把水放入渠道以後，在河床上很快就形成沙灘。隨着時間的消失，沙灘的高度在逐漸增加。經過了相當長的一段時間以後，隨着水力因素的慢慢穩定，沙灘的高度也就達到了一個極限值。這一個過程是一個作用力相互平衡的過程。在這個問題中控制因素是水流對泥沙顆粒的上舉力與作用在泥沙顆粒上的重力和浮力的合力。假使沙灘的高度還沒有達到它的極限值，重力的作用就比較大，泥沙顆粒就會沉澱下來使沙灘變得更高。假使沙灘的高度太高了，上舉力的作用就比較大，水流就會把沙灘頂端多餘的泥沙揭去。所以沙灘的高度總是會達到某一個極限，它和水力因素中間存在着一定的關係。

首先讓我們來討論作用在泥沙顆粒上的作用力。我們並不來討論在沙灘的任何位置上作用在泥沙顆粒上的作用力，而是討論在沙灘頂端這一個特殊位置上作用在泥沙顆粒上的作用力。因為沙灘的波高的增加或是減少主要決定於這一點上的作用力的對比關係。我們現在先看重力和浮力。對於這兩個力大家都是非常熟悉的，我們很容易就寫出它們的合力

$$\frac{4}{3} \pi a_0^3 (\rho_s - \rho) g.$$

式中所有的符號的意義和前面一節中所說的完全相同。接着我們來討論作用在泥沙顆粒上的上舉力。在理想流體的情形裏，當一個小圓球在有旋的流場中運動的時候，它受到一

個上舉力。這個力的大小與圓球和它附近質點的相對速度和流場中速度的梯度以及流體的密度和圓球的體積成正比例的。在我們這個具體情形裏，泥沙顆粒並不是懸浮在水流中間的，而是固定在沙漣頂點上不動的，因此這時上舉力前面的常數係數和懸浮在水中時候的情形的常數係數並不相同。另外因為泥沙顆粒是固定不動的，所以泥沙和水流質點的相對速度就變為水流質點在沙漣頂點的速度。

我們現在用 y 來表示離開沙漣最深處的高程，用 ΔH 代表沙漣的波高， k_s 代表河床的總粗糙度， K 代表卡門常數， u_* 代表摩阻流速， u_0 代表 $y = \Delta H$ 平面上的平均速度。按照對數流速分佈公式，我們有

$$\frac{u_0}{u_*} = \frac{1}{K} \ln \frac{\Delta H}{k_s} + 8.5. \quad (8)$$

我們知道水流在流過起伏不平的沙漣時候，在沙漣頂點，水流速度要比平均流速來得快。在理想流體經過正弦形波面的時候，在波峯上速度的增加值是

$$\pi \times \frac{\text{波高}}{\text{波長}} \times \text{流體的平均流速.}$$

對於沙漣的情形，沙漣的形狀有些像三角形，上端來得比較尖，和正弦形波面相差很多，因此水流流過沙漣表面上的時候所增加的速度應該比正弦形波面時候增加的數值加大某一個倍數。因此在沙漣頂點上的速度為

$$u_0 \left(1 + 2\pi\alpha_1 \frac{\Delta H}{\lambda} \right).$$

式中 α_1 就是因為沙漣形狀不是正弦形而引進的常數。關於速度梯度，我們可以從對數流速分佈公式求得。我們很容易求得在沙漣頂點的速度梯度為

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=\Delta H} = \frac{u_*}{K\Delta H}.$$

因此作用在泥沙顆粒上的上舉力為

$$\frac{4}{3} \pi a_0^3 C_1 \rho \left(1 + 2\pi\alpha_1 \frac{\Delta H}{\lambda} \right) u_0 \frac{u_*}{K\Delta H}.$$

式中 C_1 是因為泥沙顆粒在沙漣頂上停着不動和懸浮在水中時候有所不同而引進的比例常數。 ρ 就是渾水的密度。

現在假設在沙漣頂點，上舉力和重力平衡，也就是

$$\frac{4}{3} \pi a_0^3 C_1 \rho \left(1 + 2\pi\alpha_1 \frac{\Delta H}{\lambda} \right) u_0 \frac{u_*}{K\Delta H} = \frac{4}{3} \pi a_0^3 (\rho_s - \rho) g \quad (9)$$

化簡以後改成

$$\frac{g\Delta H}{u_0 u_*} = D_1 + E_1 \frac{\Delta H}{\lambda}. \quad (9)'$$

式中

$$D_1 = \frac{C_1}{K} \frac{\rho}{\rho_s - \rho}, \quad E_1 = 2\pi\alpha_1 \frac{C_1}{K} \frac{\rho}{\rho_s - \rho}.$$

現在來和椿東一郎^[10]的實測數據相比較。在比較的時候作為第一級近似，我們略去渾水和清水之間密度的差別。現在把最後得到的結果列在表 2 上。

表 2

編號*	$\frac{\Delta H}{\lambda}$	$\frac{g\Delta H}{u_0 u_*}$	編號*	$\frac{\Delta H}{\lambda}$	$\frac{g\Delta H}{u_0 u_*}$
渠A	1	0.0238	渠C	1	0.0440
	2	0.0235		2	0.0425
	3	0.0214		3	0.0403
	4	0.0408	渠D	1	0.0480
	5	0.0287		2	0.0450
	6	0.0365	渠E	1	0.00797
	7	0.0430		2	0.0292
	8	0.0445		3	0.0256
	9	0.0435		4	0.0275
	10	0.0523	5	0.0331	
渠B	1	0.0097	6	0.0348	
	2	0.0186			
	3	0.0222			
	4	0.0177			
	5	0.0214			
	6	0.0339			
	7	0.0545			

* 這個編號和表 1 一樣，是我們按照椿東一郎數據的次序加上去的。

這些結果用 $\frac{\Delta H}{\lambda}$ 和 $\frac{g\Delta H}{u_0 u_*}$ 作為坐標畫成圖 3。

從圖上我們看到除了兩點以外，其他的點差不多都在一條直線上。從這些數據我們可以求出 $C_1 = 1.63$, $\alpha_1 = 17.7$ 。比例係數 C_1 和 1 同級，這個結果是很合理的。係數 α_1 在二十左右是因為沙漣頂端非常尖，因此頂端速度很大，所以也是合理的。

C. 河床粗糙度和沙漣波長及波高的關係

在椿東一郎^[17]的論文裏，原作者對水流在河渠中間運動時候的阻力進行了一些分析。根據他的分析，進行適當的整理加工以後，我們可以得到河床粗糙度與沙漣的波長和波高的關係。我們現在來討論一下這一個關係。

我們知道水流在河渠中流動的時候，河床上的阻力可以分做兩個部分。一部分是沙粒的摩擦阻力，另一部分是沙漣的形狀阻力。在河床上有沙漣存在的時候，河床是一個沿水流方向有週期性的邊界，它的週期就是波長 λ 。我們現在在河床上取一塊長度為 λ 寬度為 1 的面積，我們來討論這塊面積上的阻力。我們用 τ_0 表示總的平均剪應力， τ_2 表示沙粒的平均剪應力， D 表示沙漣的形狀阻力。從定義，我們就有

$$\tau_0 \lambda = \tau_2 \lambda' + D. \quad (10)$$

式中 λ' 是摩擦阻力起作用的範圍的長度。從實際的情形看來，沙漣是相當平坦的，而且迎

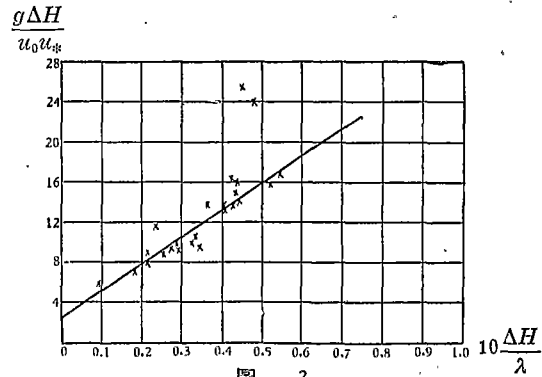


圖 3

水面比背水面要長得很多,因此摩擦阻力起作用的範圍的長度差不多就是全波長,因此假使我們略去摩擦阻力起作用的範圍的長度 λ' 和波長 λ 之間的差別,(10)式就變成

$$\tau_0 \lambda = \tau_2 \lambda + D. \quad (10)'$$

我們現在令沙粒的摩擦阻力 τ_2 為

$$\tau_2 = \frac{1}{2} \rho B_2 u_0^2$$

式中 B_2 表示沙粒的摩擦阻力係數,假使我們用 B_0 表示水流過粗糙平板時候的阻力係數,那麼從實驗中我們可以得到

$$B_2 = \alpha B_0 \quad (11)$$

式中 α 代表粗糙係數受前一個沙漣尾流作用的影響而加進去的一個修正因子,這個因子是 $\frac{\Delta H}{\lambda}$ 的一個函數,這個函數在原文中有它的代表曲綫,根據柏郎特和史里希丁^[18]關於粗糙面邊界層的理论

$$B_0 = \left[\left(1.89 + 1.62 \log_{10} \frac{\lambda_b}{k_0} \right)^{-2.5} \frac{\lambda_b}{\lambda} + 2 \left(8.5 + 5.75 \log_{10} \frac{\Delta H}{k_0} \right)^{-2} \frac{\lambda - \lambda_b}{\lambda} \right]. \quad (12)$$

式中 λ_b 是邊界層從開始發展到停止發展這兩個位置中間的距離,從理論上可以得到 $\frac{\lambda_b}{\Delta H}$ 是 $\frac{\Delta H}{k_s}$ 的函數,式中 k_s 是沙粒的粗糙度,因此把這些關係式合併起來,我們可以得到 B_2 和 $\frac{\Delta H}{\lambda}$, $\frac{\Delta H}{k_0}$ 中間的函數關係,也就是

$$B_2 = B_2 \left(\frac{\Delta H}{\lambda}, \frac{\Delta H}{k_0} \right). \quad (13)$$

再看沙漣的形狀阻力,我們令

$$D = \frac{1}{2} \rho B_1 u_0^2 \Delta H.$$

式中 B_1 是形狀阻力係數,這個係數是 $\frac{\Delta H}{\lambda}$ 的函數,這個函數關係式可以從實測的數據中得到,也就是從實測數據中我們得到

$$B_1 = B_1 \left(\frac{\Delta H}{\lambda} \right). \quad (14)$$

把 τ_2 和 D 的表達式代入(10)',並且把 τ_0 用 ρu_0^2 代入,經過化簡以後,我們得到

$$\frac{u_0}{u_*} = \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{2} B_1 \frac{\Delta H}{\lambda} + \frac{1}{2} B_2}} \quad (15)$$

從(8)式和(15)式消去 $\frac{u_0}{u_*}$,我們得到

$$\frac{k_s}{\Delta H} = F \left(\frac{\Delta H}{\lambda}, \frac{\Delta H}{k_0} \right) \quad (16)$$

式中 F 是 $\frac{\Delta H}{\lambda}$, $\frac{\Delta H}{k_0}$ 這兩個變數的已知函數, $F = \exp \left[K \left(\sqrt{\frac{1}{\frac{1}{2} B_1 \frac{\Delta H}{\lambda} + \frac{1}{2} B_2}} - 8.5 \right) \right]$

D. 河床粗糙度的確定

在河渠中的均勻流動, 當組成河床的沙的粒徑分佈, 渠道的坡降, 和進入河渠的流量已經知道的時候, 水流的平均流速, 河床的粗糙度和水深是完全確定的。我們現在來確定這些未知數的數值。我們用 U 代表水流的平均流速, h 代表水深, q 代表單寬流量, i 代表水力坡降。在前面的三節裏, 我們已經給出了四個關係式, 這就是:

$$\frac{U u_*'}{g \lambda} = \sqrt{D_0 + E_0 \frac{u_*'^2}{g a_0}}; \left(\rho u_*'^2 = \tau_2 = \frac{1}{2} \rho B_2 \left(\frac{\Delta H}{\lambda}, \frac{\Delta H}{k_0} \right) u_0^2 \right) \quad (6)$$

$$\frac{u_0}{u_*} = \frac{1}{K} \ln \frac{\Delta H}{k_s} + 8.5; \quad (8)$$

$$\frac{g \Delta H}{u_0 u_*} = D_1 + E_1 \frac{\Delta H}{\lambda}; \quad (9')$$

$$\frac{k_s}{\Delta H} = F \left(\frac{\Delta H}{\lambda}, \frac{\Delta H}{k_0} \right). \quad (16)$$

另外從對數流速分佈公式積分, 得到

$$\frac{U}{u_*} = \frac{1}{K} \ln \frac{h}{k_s} + 6.0 \quad (17)$$

從重力沿水流方向的分力和摩擦阻力互相平衡, 得到

$$u_*^2 = g h i. \quad (18)$$

從連續方程式, 得到

$$q = h U. \quad (19)$$

這樣我們共有七個方程式。在這七個方程式裏 k_0 和 a_0 可以從給定的粒徑分佈中求得, 所以是已知量。 q 和 i 是預先給定的量。除開這些以外我們共有七個未知量 U , u_0 , u_* , h , k_s , ΔH , λ 。從七個方程式確定七個未知量, 因此解是唯一決定的。

在這七個方程式裏, (6) 和 (16) 兩式的精確度是比較差的, 特別是 (16) 式實際上有兩個變數 $\frac{\Delta H}{\lambda}$, $\frac{\Delta H}{k_0}$, 樁束一郎只畫了一個圖, 結果點子非常散亂。這裏的問題主要是從實驗測量阻力係數 B_1 , B_2 有着很多困難。必須進一步克服這些困難, 把阻力係數的函數關係式肯定下來。

四. 河渠中泥沙的輸移

前面我們已經提到過, 河渠中輸移的泥沙, 從它的輸送機構來看大體上可以分成三類: 1. 懸沙, 2. 懸沙和底沙之間的過渡形態, 3. 底沙。

A. 懸沙的輸移

我們知道懸沙是一部分非常細的泥沙, 它能隨着水流脈動速度的漲落長期懸浮在水流中間。對於這一部分泥沙來說, 水流的漲落速度要比泥沙顆粒在靜水中間的沉速要大得很多。這樣的說法也可以用數學的形式來表示。我們用摩阻流速 u_* 作為漲落速度的代

表,用 W 表示泥沙顆粒在靜水中間的沉降速度。那麼所謂懸沙也就是這一部分泥沙,它的沉速 W 滿足條件 $\frac{W}{u_*} \ll 1$ 。對於這種泥沙,湍流中的渦旋能夠很自由地把它帶來帶去,因此它可以認為是隨着水流的脈動擴散的。我們知道在湍流擴散中間一般來說,起主要作用的是各向異性的的大渦旋;而各向同性的小渦旋因為尺度太小,所以對擴散作用的貢獻不大。因此在一般的情形裏,我們只需要考慮大渦旋的擴散作用就行了。由於大渦旋是各向異性的,所以它對形成雷諾剪應力有貢獻;而小渦旋是各向同性的,所以對剪應力沒有貢獻。因此我們按照擴散理論從剪應力中求得的湍流擴散係數,實際上是大大渦旋的擴散係數而不是擴散係數的全部。所以擴散理論有一個基本的缺點,就是在靠近水面的地方,大大渦旋的擴散係數轉變為小小渦旋的擴散係數起主要作用的時候,擴散理論的式子就不能再用了。不過好在這個區域非常狹小,作為第一級近似我們可以把它略去不計。

在這裏我們必須提一下岡察洛夫的懸浮高度^[10]理論和費里堪諾夫^[20]的重力理論。首先我們必須指出他們所說的懸沙和我們現在所說的懸沙並不相同。我們所認為的懸沙不僅僅要各向異性的的大渦旋能夠自由地帶動它,而且要各向同性的小渦旋也能夠自由地帶動它。而在他們的理論裏對懸沙這個概念並沒有很清楚的描述。所以對於我們所說的懸沙,既然水面附近的小渦旋都能夠很自由地帶動它,也就自然沒有什麼懸浮高度問題。同樣對於我們所說的懸沙,水流對泥沙的作用都是通過脈動來進行的,因此並不存在平均水流對泥沙做功等問題。因此對於我們現在所說的懸沙,這兩個理論是不適用的。但是這決不是說他們的理論是錯誤的,因為這毛病主要是出在各人對懸沙的理解不同。按照我們的分類,他們所討論的懸沙似乎是懸沙和底沙之間過渡類型的泥沙。因此我們把他們的理論放在下一節中去討論。我們現在還是只限於用擴散理論來討論懸沙的輸移。

我們現在取坐標系 $oxyz$,使 x 軸沿水流方向, y 軸垂直於河床面,以向上方向為正方向, z 軸沿河寬方向,坐標系原點 o 取在河床上。我們假定流速 V_x 的分佈為對數流速分佈

$$\frac{V_x}{u_*} = \frac{1}{K} \ln \frac{y}{k_s} + 8.5 \quad (20)$$

式中 y 的變化範圍為 k_s 到 $k_s + h$ 。我們引進

$$\eta = \frac{y - k_s}{h}, \quad r = \frac{k_s}{h}.$$

(20)式就改寫成

$$\frac{V_x}{u_*} = \frac{1}{K} \ln \left(1 + \frac{\eta}{r} \right) + 8.5 \quad (20)'$$

因為變數 y 的變化範圍為 k_s 到 $k_s + h$,所以 η 從0變到1。同時由於我們所討論的是水比較深的情形,也就是 $k_s \ll h$,所以 r 是一個小量。

按照擴散理論,我們得到沉速為 W 的泥沙,以體積計的含沙量 ΔS 沿 y 方向的分佈

$$\Delta S = \Delta S_0 \left(\frac{1 - \eta}{1 + \frac{\eta}{r}} \right)^{2r} \quad (21)$$

式中 ΔS_0 是在河底上的以體積計的含沙量， $\beta' = \frac{W}{Ku_*}$ 。所以以體積計的平均含沙量為

$$\Delta C_v = \frac{\int_0^1 \Delta S V_x d\eta}{\int_0^1 V_x d\eta} = \Delta S_0 \frac{\frac{1}{K} \int_0^1 \ln \left(1 + \frac{\eta}{r}\right) \left(\frac{1-\eta}{1+\frac{\eta}{r}}\right)^{\beta'} d\eta + 8.5 \int_0^1 \left(\frac{1-\eta}{1+\frac{\eta}{r}}\right)^{\beta'} d\eta}{\frac{1}{K} \int_0^1 \ln \left(1 + \frac{\eta}{r}\right) d\eta + 8.5} \quad (22)$$

由於 r 是一個小量，所以我們在以後的計算裏，略去 r 次數較高的各項。我們現在來計算幾個積分。

$$(i) \int_0^1 \ln \left(1 + \frac{\eta}{r}\right) d\eta,$$

$$\int_0^1 \ln \left(1 + \frac{\eta}{r}\right) d\eta = (1+r) \ln \left(1 + \frac{1}{r}\right) - 1,$$

略去 r 的高次項以後，我們得到

$$\int_0^1 \ln \left(1 + \frac{\eta}{r}\right) d\eta = -\ln r - 1.$$

$$(ii) \int_0^1 \left(\frac{1-\eta}{1+\frac{\eta}{r}}\right)^{\beta'} d\eta,$$

$$\int_0^1 \left(\frac{1-\eta}{1+\frac{\eta}{r}}\right)^{\beta'} d\eta = \left(\frac{r}{1+r}\right)^{\beta'} \int_0^1 \xi^{\beta'} \left(1 - \frac{\xi}{1+r}\right)^{-\beta'} d\xi,$$

$$= \left(\frac{r}{1+r}\right)^{\beta'} \frac{F\left(\beta', \beta' + 1; \beta' + 2; \frac{1}{1+r}\right)}{\beta' + 1}.$$

式中 F 代表超幾何函數。我們利用超幾何函數的恆等式^[21]

$$F(a, b; c; 1-z) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} F(a, b; a+b-c+1; z) + \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)z^{c-a-b}}{\Gamma(a)\Gamma(b)} F(c-a, c-b; c-a-b+1; z),$$

式中所有符號是超幾何函數的一般符號，和其他地方我們應用的相同的符號，並不代表相同的意義。在應用了這個恆等式以後，我們再略去式子中的 r 的高次項，我們得到

$$\int_0^1 \left(\frac{1-\eta}{1+\frac{\eta}{r}}\right)^{\beta'} d\eta = \frac{1}{\beta' + 1} \left(\frac{r}{1+r}\right)^{\beta'} \frac{\Gamma(\beta' + 2)\Gamma(1 - \beta')}{\Gamma(2)\Gamma(1)} = \frac{\beta'\pi}{\sin \beta'\pi} r^{\beta'}.$$

由於 β' 也是一個小量，所以我們也可以把 β' 的高次項略去，最後得到

$$\int_0^1 \left(\frac{1-\eta}{1+\frac{\eta}{r}}\right)^{\beta'} d\eta = r^{\beta'}.$$

$$(iii) \int_0^1 \ln \left(1 + \frac{\eta}{r}\right) \left(\frac{1-\eta}{1+\frac{\eta}{r}}\right)^{\beta'} d\eta,$$

$$\int_0^1 \ln \left(1 + \frac{\eta}{r}\right) \left(\frac{1-\eta}{1+\frac{\eta}{r}}\right)^{\beta'} d\eta = \ln \left(1 + \frac{1}{r}\right) \int_0^1 \left(\frac{1-\eta}{1+\frac{\eta}{r}}\right)^{\beta'} d\eta -$$

$$- \left(\frac{r}{1+r}\right)^{\beta'} \sum_1^{\infty} \int_0^1 \frac{1}{n} \left(\frac{\xi}{1+r}\right)^n \left(\frac{\xi}{1-\frac{\xi}{1+r}}\right)^{\beta'} d\xi,$$

而中間的每一個積分

$$\frac{1}{n} \int_0^1 \left(\frac{\xi}{1+r}\right)^n \left(\frac{\xi}{1-\frac{\xi}{1+r}}\right)^{\beta'} d\xi =$$

$$= \frac{1}{n(n+\beta'+1)} \left(\frac{1}{1+r}\right)^n F\left(\beta', n+\beta'+1; n+\beta'+2; \frac{1}{1+r}\right),$$

利用超幾何函數的恆等式,再略去 r 的高次項,得到

$$\frac{1}{n} \int_0^1 \left(\frac{\xi}{1+r}\right)^n \left(\frac{\xi}{1-\frac{\xi}{1+r}}\right)^{\beta'} d\xi = \frac{1}{n} \frac{\Gamma(n+\beta'+1)\Gamma(1-\beta')}{\Gamma(n+2)}.$$

所以

$$- \left(\frac{r}{1+r}\right)^{\beta'} \sum_1^{\infty} \int_0^1 \frac{1}{n} \left(\frac{\xi}{1+r}\right)^n \left(\frac{\xi}{1-\frac{\xi}{1+r}}\right)^{\beta'} d\xi = -r^{\beta'} \sum_1^{\infty} \frac{1}{n} \frac{\Gamma(n+\beta'+1)\Gamma(1-\beta')}{(n+1)!} =$$

$$= -r^{\beta'} \Gamma(1+\beta')\Gamma(1-\beta') \lim_{a \rightarrow 0} \left[\frac{F(a, \beta'+1; 2; 1) - 1}{a} \right],$$

再利用超幾何函數的恆等式,得到

$$- \frac{1}{n} \int_0^1 \left(\frac{\xi}{1+r}\right)^n \left(\frac{\xi}{1-\frac{\xi}{1+r}}\right)^{\beta'} d\xi = -r^{\beta'} \frac{\beta'\pi}{\sin \beta'\pi} \left[1 + \frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} - \frac{\Gamma'(1-\beta')}{\Gamma(1-\beta')} \right],$$

略去 β' 的高次項,得到

$$- \frac{1}{n} \int_0^1 \left(\frac{\xi}{1+r}\right)^n \left(\frac{\xi}{1-\frac{\xi}{1+r}}\right)^{\beta'} d\xi = -r^{\beta'} \left[1 + \frac{\pi^2}{6} \beta' \right],$$

所以最後

$$\int_0^1 \ln \left(1 + \frac{\eta}{r}\right) \left(\frac{1-\eta}{1+\frac{\eta}{r}}\right)^{\beta'} d\eta = (-\ln r)r^{\beta'} - r^{\beta'} \left(1 + \frac{\pi^2}{6} \beta'\right) =$$

$$= (-\ln r - 1)r^{\beta'} \left[1 + \frac{\pi^2}{6} \beta' \right],$$

把這幾個積分代入(22)式,得到

$$\Delta C_p = \Delta S_0 r^{\beta'} \left[1 - \frac{\pi^2}{6} \beta' \right].$$

現在問題歸結為尋找 ΔS_0 和床沙組成及水力因素中間的關係。因為懸沙和床沙並不直接接觸，中間通過泥漿層在起作用，因此我們必須先考慮泥漿層的情形。我們回到本文一開始所建立起來的運動圖案。我們知道在沙澗的低窪地區形成一層很濃的泥漿。我們假想它是一層分佈得很均勻厚度為 l_s 的泥漿層。我們用 S_b 代表這一層泥漿中以體積計的總含沙量，用 ΔS_b 代表沉速為 W 的泥沙的含沙量。我們設沉速為 W 的泥沙的半徑為 a 。我們用 $f_b(a)\Delta a$ 代表 ΔS_b 在 S_b 中間所佔的百分比。我們用 C_v 代表懸浮泥沙的平均總含沙量， $f(a)\Delta a$ 代表 ΔC_v 在總含沙量 C_v 中所佔的百分數。我們考慮單位面積的泥漿層中泥沙顆粒上所受到的力。我們知道在這層中的泥沙受到重力和浮力的作用，它們的合力為

$$S_b(\rho_s - \rho)gk_s,$$

同時因為在這一層中流體有湍流脈動，所以這些泥沙顆粒還受到一個攪動力。這個力和水的密度成正比，和湍流速度的平方成正比。假使我們用摩阻流速來表徵湍流速度，那麼這個力就和 ρu_*^2 成正比。我們可以把這個力寫成

$$M\rho u_*^2,$$

式中 M 是一個無量綱比例數。在穩定的情形下，這兩個力互相平衡，因此我們有

$$S_b(\rho_s - \rho)gk_s = M\rho u_*^2,$$

所以最後我們得到

$$S_b = M \frac{\rho}{\rho_s - \rho} \frac{u_*^2}{gk_s}. \quad (23)$$

按照定義，我們有

$$\Delta S_b = S_b f_b(a)\Delta a, \quad (24)$$

把(23)式的結果代入(24)式，得到

$$\Delta S_b = M \frac{\rho}{\rho_s - \rho} \frac{u_*^2}{gk_s} f_b(a)\Delta a, \quad (24)'$$

再從(18)式和 r 的定義，上式可以化成

$$\Delta S_b = M \frac{\rho}{\rho_s - \rho} \frac{i}{r} f_b(a)\Delta a. \quad (24)''$$

我們現在來看 ΔS_b 和 ΔS_0 的關係。我們認為在水流的主流部分和泥漿層的交界面上，沉速為 W 的泥沙從主流部分進入泥漿層的數量和從泥漿層被湍流脈動帶入主流部分的泥沙數量相等。我們仍舊用摩阻流速表徵湍流速度，那麼泥沙從泥漿層中帶往主流部分時候的速度為

$$Nu_*,$$

式中 N 是一個無量綱的比例數。那麼在泥漿層和主流部分的交界面上，單位面積上通過的泥沙數量的平衡關係式為

$$\Delta S_0 W = \Delta S_b N u_*, \quad (25)$$

把(24)''代入(25)式，改寫一下得到

$$\Delta S_0 = MN \frac{\rho}{\rho_s - \rho} \frac{i}{r} f_b(a)\Delta a \frac{u_*}{W}, \quad (25)'$$

把(25)'代入(22)'，我們得到

$$\Delta C_v = MN \frac{\rho}{\rho_s - \rho} i r^{\beta' - 1} f_b(a) \Delta a \frac{u_*}{W} \left[1 - \frac{\frac{\pi^2}{6} \beta'}{-\ln r - 1 + 8.5K} \right], \quad (26)$$

我們再用 $C_v f(a) \Delta a$ 來代替 ΔC_v , 並且利用 β' 的定義, 我們可以得到

$$C_v f(a) \Delta a = \frac{MN}{K} \frac{\rho}{\rho_s - \rho} i r^{\beta' - 1} f_b(a) \Delta a \frac{1}{\beta'} \left[1 - \frac{\frac{\pi^2}{6} \beta'}{-\ln r - 1 + 8.5K} \right], \quad (26)'$$

移一下項, 得到

$$\frac{C_v}{r^{\beta'} \left[1 - \frac{\frac{\pi^2}{6} \beta'}{-\ln r - 1 + 8.5K} \right]} \beta' \frac{f(a) \Delta a}{f_b(a) \Delta a} = \frac{MN}{K} \frac{\rho}{\rho_s - \rho} i/r, \quad (27)$$

由於泥沙所佔的體積直接量起來不方便, 所以我們把它化成重量比例。我們在等式兩端乘上 $\frac{\rho_s}{\rho}$, 我們令

$$\frac{\frac{\rho_s}{\rho} C_v}{r^{\beta'} \left[1 - \frac{\frac{\pi^2}{6} \beta'}{-\ln r - 1 + 8.5K} \right]} = S_w, \quad \frac{f(a) \Delta a}{f_b(a) \Delta a} = \epsilon_w,$$

(27)式就改寫成

$$S_w \beta' \epsilon_w = \frac{MN}{K} \frac{\rho_s}{\rho_s - \rho} i/r. \quad (27)'$$

關於懸沙輸沙量的實驗數據, 常見的有蘇聯克諾洛茲^[1]的實驗數據, 薩馬林^[2]在阿姆塔里河上的實測數據, 以及我國人民勝利渠^[3]上的實測資料和南京水利實驗處范家驊工程師^[4]等所得到的實驗數據。不過對我們來說, 這些資料中; 克諾洛茲的資料實際上是在過渡類型的泥沙範圍, 而且沒有懸沙和底沙的粒徑分佈曲綫, 因此我們沒有辦法利用這組資料; 薩馬林的資料和人民勝利渠的資料也都沒有底沙的粒徑分佈曲綫, 因此對我們來說也沒有用; 剩下對我們能夠有用的只有南京水利實驗處的實驗資料。在南實處的資料中, 因為開始做試驗時候大家對很多問題並不明確, 因此在他們所取的數據中間只有很小的一部分是合用的。在他們的數據中間, 我們是這樣挑選的。首先最初所取的第一批人工沙資料, 因為沒有測量泥沙的粒徑, 所以完全沒有用。其次粒徑為 0.13 公厘的黃沙, 因為在過渡類型泥沙的範圍內, 因此對我們也並不適用。對於 0.06 公厘粒徑的黃沙, 因為槽底淤積太薄, 部分鋼板露在水中, 因此水流中所帶的泥沙沒有達到平衡, 所以也不能用。餘下的只有 0.03 公厘粒徑的黃沙和在 1956 年底補加的第二批人工沙資料的一小部分能用。對這一部分泥沙資料, 我們又進行了一次挑選。首先去掉了那些數據不全的點子, 接着為了使水流的坡降和沙粒的沉速有意義, 去掉了那些水面坡降和底部坡降有效數字在第二位上相差為 2 以上的各點, 和用不同方法來求粒徑分配曲綫得出的平均粒徑的有效數字在第二位上相差為 4 以上的各點。再下去就是去掉不平衡的點子。由於鋼板露在水中以後, 水流的輸沙就不可能達到平衡。因此我們在留下的點子中再去掉平均淤積厚度小

於 0.65 公分的各點。我們為什麼取 0.65 公分這個值的原因是因為水槽中沙澱的高度約 1.3 公分左右，假使我們把沙澱看做是三角形，那麼平均淤厚約為 0.65 公分，所以我們這樣去掉淤厚小於 0.65 公分的各點大致可以保證流動時候不露出鋼板底來。為了進一步確保不露出鋼板底，我們採取了另一個附加的判斷辦法。我們知道粗糙度 k_s 和波高 ΔH 是差不多大小的，所以我們可以用 k_s 來代替 ΔH 。我們現在仍舊假設沙澱是三角形，那麼實際的淤積厚度必須大於 $\frac{1}{2}k_s$ 才能保證流動時候不露出鋼板底來。因此我們最後只留下

表 3

黃沙 0.03 公厘

編號*	$i(10^{-4})$	β'	$1/\gamma$	$S_{\omega}(10^{-2})$	ε_{ω}	$\beta'S_{\omega}\varepsilon_{\omega}(10^{-4})$	$i/\gamma(10^{-3})$
23	3.3	0.0342	14.2	0.772	1.47	3.75	4.68
24	3.4	0.0292	13.1	0.850	1.47	3.65	4.44
26	3.2	0.0331	15.5	0.870	1.5	4.33	4.97
28	3.2	0.0270	13.2	0.955	1.5	3.87	4.23
30	3.3	0.0391	28.1	1.07	1.5	6.28	9.30
31	3.2	0.0389	26.2	1.02	1.5	5.95	8.40
32	3.2	0.0402	25.1	1.00	1.5	6.03	8.04
35	3.5	0.0393	15.8	1.04	1.3	5.32	5.54
38	3.2	0.0336	18.75	0.933	1.66	5.22	6.02
40	5.0	0.0284	16.9	0.780	2.75	6.10	8.45
41	5.0	0.0337	18.3	0.124	2.28	7.10	9.17
45	5.4	0.0677	25.6	1.20	1.38	11.15	13.8
47	4.9	0.0675	70.0	2.00	1.60	21.4	34.3
48	4.8	0.0632	76.8	2.42	1.63	24.9	36.8
49	5.0	0.0602	102	2.93	2.0	35.2	51.0
51	2.1	0.0166	13.85	0.328	1.5	0.818	2.91
52	2.4	0.0232	14.7	0.360	1.56	1.30	3.53
57	1.9	0.0235	15.85	0.408	1.17	1.13	3.01
58	2.5	0.0443	14.7	0.542	1.1	2.64	3.68
60	2.0	0.0182	17.8	0.634	2.25	2.61	3.56
62	2.06	0.0271	17.2	0.60	1.55	2.51	3.74
63	2.45	0.0290	17.4	0.748	1.75	3.80	4.26
67	6.7	0.0526	53.7	2.50	1.75	23.1	36.0
68	6.6	0.0507	64.6	3.34	2.0	33.8	42.6
76	8.4	0.0397	18.3	3.00	1.0	11.9	15.4
78	8.0	0.0274	7.53	1.04	2.0	5.66	6.04
87	3.8	0.0294	40.9	1.78	2.0	11.3	15.6

* 南京水利實驗處自己的編號

第二批補的人工砂資料(1956年)

日期	$i(10^{-4})$	β'	$1/\gamma$	$S_{\omega}(10^{-2})$	ε_{ω}	$\beta'S_{\omega}\varepsilon_{\omega}(10^{-4})$	$i/\gamma(10^{-3})$
12月30日	3.8	0.0404	16.2	1.39	1	5.61	6.16
12月8日	7.0	0.045	12.6	1.56	1	7.01	8.82
12月11日	6.8	0.049	14.8	3.78	1	18.5	10.0
12月15日	6.7	0.0312	9.80	2.51	1	7.82	6.56

淤積厚度大於 $\frac{1}{2}k_s$ 的那些點子。在和理論公式比較的時候，我們要碰泥沙的沉速，這時我們採取的泥沙的沉速為粒徑分佈中的中值泥沙顆粒的沉速。我們把最後得到的結果列在表 3 中。

表 3 的結果，我們把它畫成圖 4。同時為了更清楚地瞭解少含沙量時候的情形起見，我們再把這些數據畫在對數紙上，這就是圖 5。

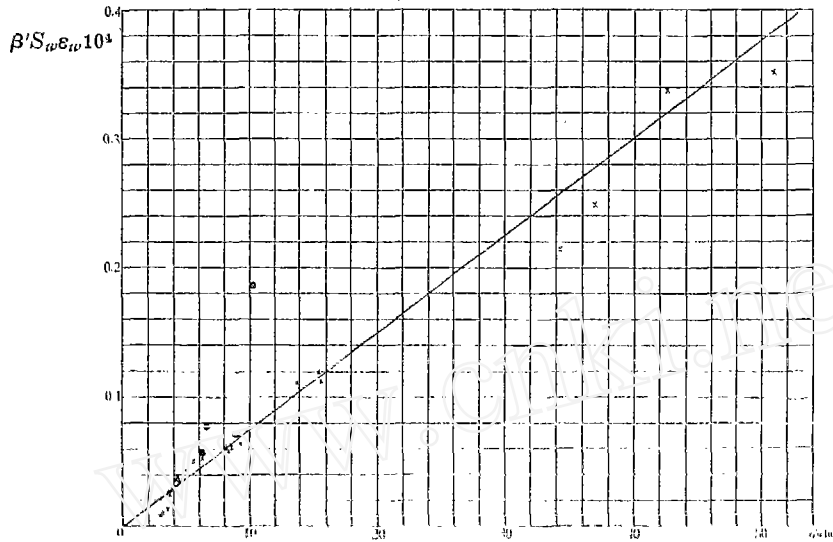


圖 4

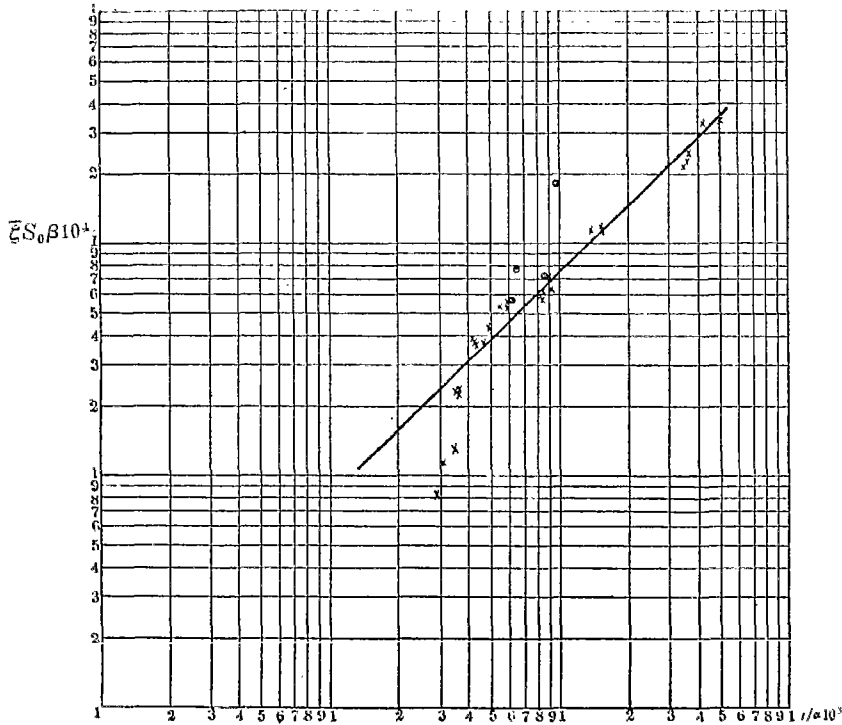


圖 5

從圖上看來，公式(27)'中的無量綱比例數 $\frac{MN}{K} \frac{\rho_s}{\rho_s - \rho}$ 是 i/r 的函數，它在絕大部分的範圍裏接近於常數。

B. 底沙和過渡類型泥沙的輸移問題的討論

關於底沙的輸移，現在有三類理論。第一種是拖曳力理論^[22]，這類理論考慮了重力，浮力，上舉力，拖曳力和摩擦阻力之間的互相平衡，所以從它的性質來看，似乎是對滾動的底沙應用起來比較合適。在實際中，大致相當於小水槽中底沙輸移的情形。第二種是統計理論^[7]，這類理論討論泥沙在平均流速和脈動流速協同作用之下躍起和下落互相平衡，所以按照它的出發點來看，似乎是對跳躍類型的底沙更為適用。最後還有白格諾^[3]的功能理論：他討論了含沙濃度比較大時候的運動情形，因此這理論可以用於高強度輸沙。雖然從理論上看來，這些理論有很大差別，不過在實際計算輸沙量的時候，從不同的理論出發得到的公式所給出的輸沙量的值相差並不大。而且這些輸沙量公式都可以寫成同一類型。我們用 $f_B(a)\Delta a$ 表示半徑在 a 與 $a + \Delta a$ 之間的泥沙的輸移量在整個底沙的輸沙量 Q_B 中間所佔的百分數。我們同時認為床沙的粒徑組成和泥漿層中的粒徑組成相同。那麼所有的底沙輸沙量公式都可寫成

$$\phi \frac{f_B(a)\Delta a}{f_b(a)\Delta a} = \alpha(\Psi) \quad (28)$$

式中 α 是已知函數。變數

$$\phi = \frac{Q_B}{\sqrt{8 \frac{\rho_s - \rho}{\rho} g a^3}}, \quad \Psi = \frac{u_*^2}{2 \frac{\rho_s - \rho}{\rho} g a}$$

關於過渡類型泥沙的輸移理論，我們在前面已經提到過，到目前為止有費里堪諾夫的重力理論^[20]和岡察洛夫的懸浮高度理論^[19]。由於這兩個理論的物理圖案不很清楚，所以對這兩個理論的正確性很難下斷語。不過有興趣的是這兩個理論所給出的含沙量沿水深方向的分佈都是

$$\Delta S_0 \left(1 - \frac{y}{H}\right)^r$$

的形式，並且這樣的分佈和某些實驗結果相符合，所以這樣的分佈形式也許在某一個範圍裏是可用的。這裏 H 是某一深度， r 是和水利因素有關係的常數。關於底部含沙量 ΔS_0 ，在原來的兩種理論裏都有它自己的表達式，不過它們的物理解釋並不很清楚，我們建議在這裏也許可以採用公式(25)'中 ΔS_0 的表達式。假使採用上面給出的含沙量沿深度分佈的公式以後，要求得輸沙量的數值還得算幾個麻煩的積分。和懸沙的情形一樣，我們可以利用超幾何函數的性質把這幾個積分的值求出來。不過由於這種含沙量分佈本身的正確性還沒有弄得很清楚，所以這些計算我們不預備在這裏詳細討論它了。

五. 泥沙在二元渠道中運動時候的相似條件

我們現在來討論泥沙在二元渠道中運動時候的相似條件。我們首先假定我們所討論的渠道中運動着的泥沙由粒徑均一的底沙和粒徑均一的懸沙所構成的。我們用 a_0 表示底沙顆粒的半徑，用 a_1 表示懸沙顆粒的半徑，而用 W 表示懸沙的沉速。我們用 P 表示粒

徑為 a_0 的泥沙在床沙的總量中所佔的百分數，那麼 $1 - P$ 就是粒徑為 a_1 的泥沙在床沙總量中所佔的百分數。我們用 S 表示懸沙的含沙量， q_B 表示底沙的輸沙量。我們現在寫出上面所討論到的所有的關係式，並且把它們改變成無量綱變數所適合的方程式。我們令 V 為特徵速度， L 為特徵長度。我們用某一個函數上面加一“—”來代表這一個函數的無量綱表示。我們就有

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{\frac{\rho_s + \frac{1}{2}\rho}{\rho_s - \rho} \frac{V^2}{gL} \frac{\bar{U} \bar{u}'_s}{\bar{\lambda}}} &= \sqrt{\frac{1}{4\pi^2 a_0^2 \beta_0^2 C_0^2} + \frac{\frac{3}{8} C_D}{4\pi^2 a_0^2 \beta_0^2} \frac{\rho}{\rho_s - \rho} \frac{V^2}{gL} \bar{u}_s'^2}; \\ \frac{\bar{u}_0}{\bar{u}_s} &= \frac{1}{K} \ln \frac{\bar{\Delta H}}{\bar{k}_s} + 8.5; \\ \frac{\bar{\Delta H}}{\bar{u}_0 \bar{u}_s} &= \frac{\rho}{\rho_s - \rho} \frac{V^2}{gL} \left(\frac{C_1}{K} + 2\pi a_1 \frac{C_1}{K} \frac{\bar{\Delta H}}{\bar{\lambda}} \right); \\ \frac{\bar{k}_s}{\bar{\Delta H}} &= F \left(\frac{\bar{\Delta H}}{\bar{\lambda}}, \frac{\bar{\Delta H}}{\bar{k}_0} \right); \\ \frac{V^2}{gL} \bar{u}_s'^2 &= \bar{h}; \\ \frac{\bar{U}}{\bar{u}_s} &= \frac{i}{K} \ln \frac{\bar{h}}{\bar{k}_s} + 6.0; \\ \bar{U} \bar{h} &= q; \\ S &= MN \frac{\rho}{\rho_s - \rho} i r^{\frac{W}{KV \bar{u}_s} - 1} (1 - P) \frac{V}{W} \bar{u}_s \left(\frac{1 - \eta}{1 + \frac{\eta}{r}} \right)^{\frac{W}{KV \bar{u}_s}}. \end{aligned} \right\} (29)$$

所以兩個流場假使要相似，必須下列的常數相等

$$\left(\frac{\rho_s + \frac{1}{2}\rho}{\rho_s - \rho} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{V^2}{gL}, \frac{\rho}{\rho_s - \rho} \frac{V^2}{gL}, \frac{\rho}{\rho_s - \rho} \frac{V^2}{gL}, \frac{k_0}{L}, \frac{V^2}{gL}, \frac{W}{V}, \frac{\rho}{\rho_s - \rho} i(1 - P).$$

把這些數重新組織一下，得到另外七個數

$$\frac{\rho_s}{\rho}, \frac{V^2}{gL}, \frac{a_0}{L}, \frac{k_0}{L}, i, \frac{W}{V}, P.$$

我們現在用上標(1)代表第一個流場，用上標(2)代表第二個流場，我們就得到兩個流場相似的條件：

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\rho_s}{\rho} \right)^{(1)} &= \left(\frac{\rho_s}{\rho} \right)^{(2)}; \\ \left(\frac{V^2}{gL} \right)^{(1)} &= \left(\frac{V^2}{gL} \right)^{(2)}; \\ \left(\frac{a_0}{L} \right)^{(1)} &= \left(\frac{a_0}{L} \right)^{(2)}; \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{k_0}{L}\right)^{(1)} &= \left(\frac{k_0}{L}\right)^{(2)}; \\ i^{(1)} &= i^{(2)}; \\ \left(\frac{W}{V}\right)^{(1)} &= \left(\frac{W}{V}\right)^{(2)}; \\ P^{(1)} &= P^{(2)}. \end{aligned} \right\} (30)$$

在滿足這些條件以後，不但上述的物理量能夠相似，而且懸沙的輸沙量 q_s 和底沙的輸沙量 q_B 對總流量的比值也能夠相似。因此在我們討論接近平衡狀態的淤積問題的時候，只要把特徵時間取成 $\frac{L}{V}$ ，淤積地形等等也能夠相似。

六. 有關渠道的實際問題的計算方法

在這裏我們預備討論兩個問題：(1)知道床沙組成，單寬流量，水力坡降以後，確定流速和水深；(2)不淤渠道的設計問題。

A. 確定流速和水深

前面我們已經說過，我們有七個方程式：

$$\frac{U u_*'}{g\lambda} = \sqrt{D_0 + E_0 \frac{u_*'^2}{g a_0}}; \quad (6)$$

$$\frac{u_0}{u_*} = \frac{1}{K} \ln \frac{\Delta H}{k_s} + 8.5; \quad (8)$$

$$\frac{g\Delta H}{u_0 u_*} = D_1 + E_1 \frac{\Delta H}{\lambda}; \quad (9)'$$

$$\frac{k_s}{\Delta H} = F \left(\frac{\Delta H}{\lambda}, \frac{\Delta H}{k_0} \right); \quad (16)$$

$$\frac{U}{u_*} = \frac{1}{K} \ln \frac{h}{k_s} + 6.0; \quad (17)$$

$$u_*^2 = ghi; \quad (18)$$

$$q = hU. \quad (19)$$

共有七個未知量 $U, u_0, u_*, h, k_s, \Delta H, \lambda$ 。從(8)和(16)消去 $\frac{k_s}{\Delta H}$ ，得到

$$\frac{u_0}{u_*} = -\frac{1}{K} \ln F + 8.5, \quad (31)$$

再從(31)和(9)'消去 u_0 ，得到

$$\frac{g\Delta H}{u_*^2} = \left(-\frac{1}{K} \ln F + 8.5 \right) \left(D_1 + E_1 \frac{\Delta H}{\lambda} \right), \quad (32)$$

從(32)和(18)消去 u_*^2 ，得到

$$\frac{\Delta H}{hi} = \left(-\frac{1}{K} \ln F + 8.5 \right) \left(D_1 + E_1 \frac{\Delta H}{\lambda} \right). \quad (33)$$

從定義，我們有

$$w'_* = \sqrt{\frac{1}{2} B_2} u_0, \quad (34)$$

代入(31)式,得到

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2} B_2}} \frac{u'_*}{u_*} = -\frac{1}{K} \ln F + 8.5, \quad (35)$$

把(35)代入(6)式,得到

$$\frac{U \sqrt{\frac{1}{2} B_2} u_* \left(-\frac{1}{K} \ln F + 8.5 \right)}{g\lambda} = \sqrt{D_0 + \frac{\frac{1}{2} E_0 B_2 \left(-\frac{1}{K} \ln F + 8.5 \right)^2 u_*^2}{g a_0}},$$

再把(32)式代入

$$\frac{U \sqrt{\frac{1}{2} B_2} u_* \left(-\frac{1}{K} \ln F + 8.5 \right)}{g\lambda} = \sqrt{D_0 + \frac{\frac{1}{2} E_0 B_2 \left(-\frac{1}{K} \ln F + 8.5 \right) \frac{\Delta H}{a_0}}{D_1 + E_1 \frac{\Delta H}{\lambda}}},$$

再把(17)式U的值代入

$$\begin{aligned} & \frac{w_*^2 \left(-\frac{1}{K} \ln \frac{h}{k_*} + 6.0 \right) \sqrt{\frac{1}{2} B_2} \left(-\frac{1}{K} \ln F + 8.5 \right)}{g\lambda} = \\ & = \sqrt{D_0 + \frac{\frac{1}{2} E_0 B_2 \left(-\frac{1}{K} \ln F + 8.5 \right) \frac{\Delta H}{a_0}}{D_1 + E_1 \frac{\Delta H}{\lambda}}}, \end{aligned}$$

再利用(32)式

$$\begin{aligned} & \frac{\Delta H \sqrt{\frac{1}{2} B_2} \left(\frac{1}{K} \ln \frac{h}{F \Delta H} + 6.0 \right)}{\lambda} = \\ & = \sqrt{D_0 + \frac{\frac{1}{2} E_0 B_2 \left(-\frac{1}{K} \ln F + 8.5 \right) \frac{\Delta H}{a_0}}{D_1 + E_1 \frac{\Delta H}{\lambda}}}, \end{aligned}$$

解出 $\frac{h}{\Delta H}$, 得到

$$\frac{h}{\Delta H} = F^* \left(\frac{\Delta H}{\lambda}, \frac{\Delta H}{k_0}, \frac{a_0}{k_0} \right), \quad (36)$$

式中

$$F^* \left(\frac{\Delta H}{\lambda}, \frac{\Delta H}{k_0}, \frac{a_0}{k_0} \right) =$$

$$= \exp \left[K \left(\frac{(D_1 + E_1 \frac{\Delta H}{\lambda}) \sqrt{D_0 + \frac{1}{2} E_0 B_2 \frac{-\frac{1}{K} \ln F + 8.5}{D_1 + E_1 \frac{\Delta H}{\lambda}} \frac{\Delta H}{\alpha_0}}}{\sqrt{\frac{1}{2} B_2 \frac{\Delta H}{\lambda}}} + \frac{1}{K} \ln F - 6.0 \right) \right],$$

把(17)式和(36)式代入(19)式,得到

$$\begin{aligned} q &= \Delta H F^i u_* \left(\frac{1}{K} \ln \frac{h}{\Delta H} \frac{\Delta H}{k_s} + 6.0 \right) = \\ &= \Delta H \sqrt{g \Delta H} \frac{F^* \left(\frac{1}{K} \ln \frac{F^*}{F} + 6.0 \right)}{\sqrt{\left(-\frac{1}{K} \ln F + 8.5 \right) \left(D_1 + E_1 \frac{\Delta H}{\lambda} \right)}}, \end{aligned}$$

改換一下,得到

$$\frac{q}{\Delta H \sqrt{g \Delta H}} = \frac{F^* \left(\frac{1}{K} \ln \frac{F^*}{F} + 6.0 \right)}{\sqrt{\left(-\frac{1}{K} \ln F + 8.5 \right) \left(D_1 + E_1 \frac{\Delta H}{\lambda} \right)}}, \quad (37)$$

從(33)和(36),得到

$$i = \frac{1}{F^* \left(-\frac{1}{K} \ln F + 8.5 \right) \left(D_1 + E_1 \frac{\Delta H}{\lambda} \right)}, \quad (38)$$

從(37)和(38)中消去 $\frac{\Delta H}{\lambda}$, 我們得到

$$\varphi \left(\frac{q}{k_0 \sqrt{g k_0}}, i, \frac{\Delta H}{k_0}, \frac{\alpha_0}{k_0} \right) = 0, \quad (39)$$

式中 φ 是 $\frac{q}{k_0 \sqrt{g k_0}}$, i , $\frac{\Delta H}{k_0}$, $\frac{\alpha_0}{k_0}$ 的已知函數。從(39)式中解出 $\frac{\Delta H}{k_0}$

$$\frac{\Delta H}{k_0} = \varphi_1 \left(\frac{q}{k_0 \sqrt{g k_0}}, i, \frac{\alpha_0}{k_0} \right), \quad (40)$$

φ_1 是一個已知函數。把(40)式代入(38)式,解出 $\frac{\Delta H}{\lambda}$, 得到

$$\frac{\Delta H}{\lambda} = \varphi_2 \left(\frac{q}{k_0 \sqrt{g k_0}}, i, \frac{\alpha_0}{k_0} \right), \quad (41)$$

φ_2 是 $\frac{q}{k_0 \sqrt{g k_0}}$, i , $\frac{\alpha_0}{k_0}$ 的已知函數。再把(40)和(41)代入(16)和(36)式,得到

$$\frac{k_s}{\Delta H} = \varphi_3 \left(\frac{q}{k_0 \sqrt{g k_0}}, i, \frac{\alpha_0}{k_0} \right), \quad (42)$$

$$\frac{h}{\Delta H} = \varphi_4 \left(\frac{q}{k_0 \sqrt{g k_0}}, i, \frac{\alpha_0}{k_0} \right), \quad (43)$$

φ_3 和 φ_4 是 $\frac{q}{k_0 \sqrt{gk_0}}$, i , $\frac{a_0}{k_0}$ 的已知函數。

為了計算的方便,我們從實驗和計算把(40),(41),(42)和(43)畫成以 i 和 $\frac{a_0}{k_0}$ 為參數的曲線。

在實際問題裏,我們預先給定,單寬流量 q ,水力坡降 i ,砂粒粗糙度 k_0 ,和底沙粒徑 a_0 。從上面的四族曲線上,我們找出 $\frac{\Delta H}{k_0}$, $\frac{\Delta H}{\lambda}$, $\frac{k_s}{\Delta H}$ 和 $\frac{h}{\Delta H}$ 。從這幾個比例數,我們很容易求出 ΔH , λ , k_s 和 h 的值。再把求出的 h 的值代入(19),就求出平均流速 U 。把 h 的值代入(18)就得到摩阻流速 u_* 。

B. 不淤渠道的設計問題

在這一節裏,我們的問題是:知道了床沙組成,單寬流量,和進入渠道的懸沙濃度以後,問在什麼坡降時候渠道內的懸沙達到平衡。

前面我們有過公式(16)和(36)

$$\frac{k_s}{\Delta H} = F \left(\frac{\Delta H}{\lambda}, \frac{\Delta H}{k_0} \right); \quad (16)$$

$$\frac{h}{\Delta H} = F^* \left(\frac{\Delta H}{\lambda}, \frac{\Delta H}{k_0}, \frac{a_0}{k_0} \right). \quad (36)$$

從這兩個式子,我們得到

$$r = \frac{k_s}{h} = \frac{F}{F^*}. \quad (44)$$

另外從 β' 的定義,在利用(32)式以後,得到

$$\beta' = \frac{W}{Ku_*} = \frac{W}{K \sqrt{gk_0}} \left[\frac{k_0}{\Delta H} \left(-\frac{1}{K} \ln F + 8.5 \right) \left(D_1 + E_1 \frac{\Delta H}{\lambda} \right) \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (45)$$

把(44)式,(45)式,和(38)式代入(26)',我們得到

$$\psi \left(C_v, \epsilon_w, \frac{\Delta H}{\lambda}, \frac{\Delta H}{k_0}, \frac{W}{\sqrt{gk_0}} \right) = 0, \quad (46)$$

式中 ψ 是 $C_v, \epsilon_w, \frac{\Delta H}{\lambda}, \frac{\Delta H}{k_0}, \frac{W}{\sqrt{gk_0}}$ 的已知函數。從(46)式和(37)式消去 $\frac{\Delta H}{\lambda}$,我們得到

$$\psi_1 \left(C_v, \epsilon_w, \frac{\Delta H}{k_0}, \frac{W}{\sqrt{gk_0}}, \frac{q}{k_0 \sqrt{gk_0}}, \frac{a_0}{k_0} \right) = 0, \quad (47)$$

式中 ψ_1 是已知函數。解出 $\frac{\Delta H}{k_0}$,我們得到

$$\frac{\Delta H}{k_0} = \varphi_5 \left(C_v, \epsilon_w, \frac{W}{\sqrt{gk_0}}, \frac{q}{k_0 \sqrt{gk_0}}, \frac{a_0}{k_0} \right), \quad (48)$$

φ_5 是 $C_v, \epsilon_w, \frac{W}{\sqrt{gk_0}}, \frac{q}{k_0 \sqrt{gk_0}}, \frac{a_0}{k_0}$ 的已知函數。把(48)式代入(37)式,解出 $\frac{\Delta H}{\lambda}$,得到

$$\frac{\Delta H}{\lambda} = \varphi_6 \left(C_v, \epsilon_w, \frac{W}{\sqrt{gk_0}}, \frac{q}{k_0 \sqrt{gk_0}}, \frac{a_0}{k_0} \right), \quad (49)$$

φ_6 是已知函數。把(48)和(49)代入(38)式,得到

$$i = \varphi_7 \left(C_v, \varepsilon_w, \frac{W}{\sqrt{gk_0}}, \frac{q}{k_0 \sqrt{gk_0}}, \frac{a_0}{k_0} \right). \quad (50)$$

φ_7 是已知函數。為了實際計算的方便,我們可以從實驗和計算作出對應於(50)式的以 $\varepsilon_w, \frac{W}{\sqrt{gk_0}}, \frac{q}{k_0 \sqrt{gk_0}}, \frac{a_0}{k_0}$ 為參數的 $i-C_v$ 的曲綫族。計算起來,在給定進入渠道的含沙濃度時候,就可以查曲綫求得需要的坡降 i 。

七. 討 論

在上面的討論裏,我們給出了一個有關渠道泥沙問題的計算方法,不過這個方法僅僅只能對稀濃度時候適用。在濃度大的時候,在第三部分的那些公式中;像關於波長的公式,在討論泥沙的跳躍時候就得考慮泥沙的碰撞,這就和輸沙量有關。另外式中的密度也就不再是常數而是變數了。在波高的公式裏也有類似的問題。在討論粗糙度時候,在濃度大的時候因為底沙輸移要消耗一部分能量,所以 k_0 也和底沙的輸沙量有關。除此而外流速分佈公式也必須加入濃度的修正。不過總的看來在方程式和變數的數目方面僅僅是在前面的方程式中多加了懸沙濃度和底沙輸移量兩個變數,而在和這個同時我們相應地也增加了懸沙濃度和底沙輸移量所適合的方程式,因此從原則上來說問題還是可解的。

在懸沙輸沙量問題上,我們用到無量綱參數 ε_w 。但是在和實驗數據比較的時候,由於參數 ε_w 的誤差很大,所以雖然在較廣的範圍裏看來理論和實驗互相符合,還不一定能肯定我們的理論的正確性。關於這一點還必須進一步用更精密的實驗結果來證明。

關於這個理論的適用範圍。由於這個理論是對平衡和均勻情形的理論,因此能運用這個理論的範圍最多只能用到接近平衡和稍微不均勻的情形上去。也就是最多能用到水力因素對時間和對位置有極為緩慢的變化的情形上去。所以對於像渾濁的河水流入渠道以後的大量淤積和河流中洪峯突然到來等問題是沒有法子討論的。

在前面我們曾經提到過為了實際計算的需要,必須畫出很多曲綫族。過去的實驗殘缺不全,不可能得出我們所需要的曲綫族。關於這一點,我們今後必須做一系列系統的試驗特別着重對(6)式和(16)式進行研究來求得比較準確齊全的數據,作出我們計算所需要的數據。因為如此,這裏所提出的結果只能作為解決河渠泥沙問題的方案,這個方案的完成和實施還有待於將來的研究。

最後,我衷心感謝我的導師錢學森先生對我的親切而熱心的指導和耐心的教誨。並且感謝南京水利實驗處的同志們在工作過程中的協助和將還沒有發表的資料借給我使用。同時也感謝中國科學院水工研究室的錢寧同志和北京水利科學研究院的范家驊同志對我的幫助。

附 錄

二元水流在水淺速度慢時候的一些性質:

前面我們曾經提到過,在水淺速度慢的時候的情形,安德遜^[15]曾對沙漣的波長和水力因素中間的關係進行過一些分析,現在我們來討論一下他的理論。安德遜分析的主要出發點是:表面波的存在影響到水槽底上各點的流速,使槽底每一點上輸沙量產生不均勻。

這樣按照連續條件有些地方就產生淤積，有些地方就產生冲刷，因此就慢慢形成沙澗。這樣一個看法在水淺和速度慢的時候是可以接受的，但是安德遜在得到他的沙澗波長和水力因素關係的時候，應用了一個錯誤的關係式，使他最後得到的結果和他自己的出發點互相矛盾。這個矛盾就是在穩定狀態時候，在和沙澗一起運動的坐標系中，仍然有泥沙的冲刷和淤積存在，這顯然是和穩定這個概念互相抵觸的。我們現在來按照他原來的出發點，把問題重新討論一下。

我們現在用和沙澗一起運動的坐標系 x' , y' 來描寫運動。我們使 x' 軸沿着水流方向， y' 軸和水流方向相垂直，以向上的方向為正方向。我們把坐標原點放在河床底上。我們用 $V_{x'}$, $V_{y'}$ 代表流體質點在運動坐標系中的速度分量， c 代表沙澗前進的速度， U 是水流的平均速度。我們假定槽底的沙澗是一個正弦形波面，它的方程式是

$$y = A_b \sin \frac{2\pi x'}{\lambda}, \quad (\text{I})$$

式中 A_b 是沙澗的振幅。我們假定水面也是一個正弦形波面，它的方程式是

$$y = h + A_s \sin \frac{2\pi x'}{\lambda}, \quad (\text{II})$$

式中 A_s 是水的表面波的振幅。在穩定的時候，在和沙澗一起運動的坐標系中，水流的速度等流體力學元素顯然是隨時間改變的。按照流體的波動理論^[2]，水流經過正弦形波面時候，沿主流方向的速度分量和 $\frac{A_b}{A_s}$ 由下列公式給出。

$$V_{x'} = (U - c) \left[1 + \frac{2\pi A_b}{\lambda} \frac{\sin \frac{2\pi x'}{\lambda}}{\sinh \frac{2\pi h}{\lambda}} \cosh \frac{2\pi}{\lambda} (y' - h) - \frac{2\pi A_s}{\lambda} \frac{\sin \frac{2\pi x'}{\lambda}}{\sinh \frac{2\pi h}{\lambda}} \cosh \frac{2\pi y'}{\lambda} \right], \quad (\text{III})$$

$$\frac{A_b}{A_s} = \cosh \frac{2\pi h}{\lambda} - \frac{g}{(U - c)^2 \frac{2\pi}{\lambda}} \sinh \frac{2\pi h}{\lambda}. \quad (\text{IV})$$

另外再按照安德遜最初的假設，槽底每一點上的輸沙量 q_s 是水流在這一點上沿主流方向的速度分量的函數，也就是

$$q_s = f(V_{x'}(y'=0) + C), \quad (\text{V})$$

不過按照穩定狀態這一個條件，沙澗的形狀應該沒有改變，因此

$$\frac{\partial q_s}{\partial x'} = f'(V_{x'}(y'=0) + C) \left(\frac{\partial V_{x'}}{\partial x'} \right)_{y'=0} = 0, \quad (\text{VI})$$

也就是

$$\left(\frac{\partial V_{x'}}{\partial x'} \right)_{y'=0} = 0, \quad (\text{VI}')$$

化簡以後，得到

$$\frac{A_b}{A_s} = \frac{1}{\cosh \frac{2\pi h}{\lambda}} \quad (\text{VII})$$

從(IV)和(VII),得到

$$\frac{2\pi h}{\lambda} \tanh \frac{2\pi h}{\lambda} = \frac{gh}{(U-c)^2}, \quad (\text{VIII})$$

因為沙漣前進的速度 c 非常小，所以我們可以把它略去，最後得到

$$\frac{2\pi h}{\lambda} \tanh \frac{2\pi h}{\lambda} = \frac{gh}{U^2}. \quad (\text{VIII}')$$

改正以後的結果和實驗數據比較的情況，就像圖 6 上所畫的那樣：

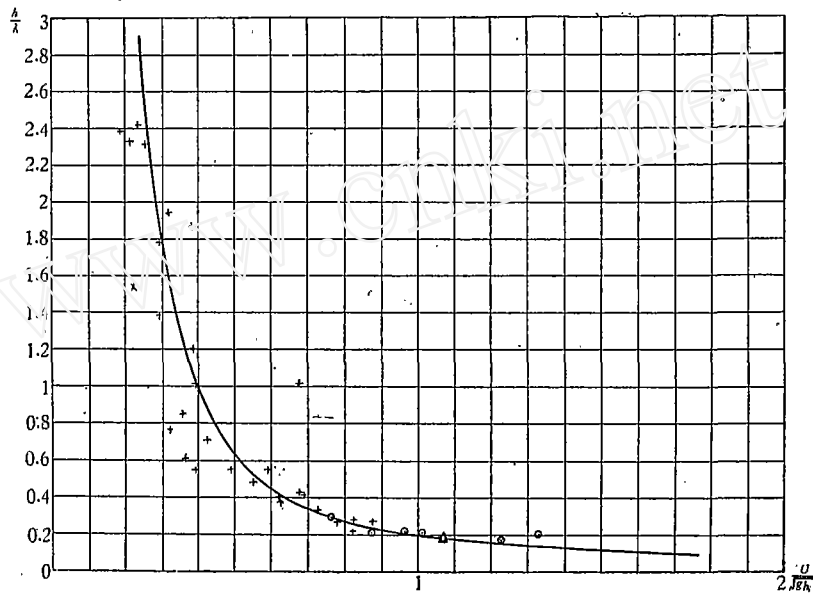


圖 6

關於沙漣的波高，現在的情形和水深速度快的情形很不一樣。現在控制沙漣波高的條件是重力與浮力的合力和沙粒之間的摩擦阻力中間的對比關係，所以問題基本上已經屬於鬆散體力學的範圍了。關於現在這時候槽底的“粗糙度”，問題已經不再像水深的時候那樣簡單。好在這種情況對我們並不重要，因此我們就不再深入去討論它。從上面說的那些情形看來，水深速度快和水淺速度慢這兩種情形是有很大差別的，因此決不能混為一談。所以在討論泥沙問題的時候，常常有很多水槽實驗的結果不能搬到天然條件中去用是並不足怪的。

參 考 文 獻

- [1] В. С. Кпоров, 泥沙研究, 二卷一期, 30—51 (1957).
- [2] 范家驊等, 南京水利實驗處, 1955 年研究報告, 85—101.
- [3] Е. А. Замарин, (李昌華等譯) 渠道內水流的挾沙能力和許可流速.
- [4] 人民勝利渠(引黃灌溉濟衛工程)渠系挾沙能力的測驗研究, (1956).

- [5] М. А. Великанов, *Динамика русловых потоков II*, 79—87.
- [6] E. W. Lane & A. A. Kalinske, 泥沙研究, 一卷二期, 72—75.
- [7] H. A. Einstein, (錢寧譯) 明渠水流的挟沙能力.
- [8] R. A. Bagnold, *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond.* **249**, No. 964, 235—297 (1956).
- [9] 黄河水利研究所, 黄河建设, 1957 年第 9 期, 30—36.
- [10] 嚴筑海, (北京水利科學院) 挟沙能力公式的初步研究.
- [11] 張書農, (華東水利學院) 河道動力學講義, 第 182 頁.
- [12] A. B. Караушев, *Гидравлика рек и водохранилищ*, стр. 221.
- [13] N. Mononobe, *Hydraulics* p. 247.
- [14] Th. von Kármán, *Collected work of Th. von Kármán* **4**, 352—356 (1940—1951).
- [15] A. G. Anderson, *Proc. 3rd Midwestern Conference on fluid Mechanics*, 379—395 (1953).
- [16] T. Tsubaki and others, *Reports of Research Institute for Applied Mechanics II*, No. 8, 241—256 (1953).
- [17] 樺東一郎, 土木學會誌, 14—22 (1955).
- [18] L. Prandtl und H. Schlichting, "Das Widerstandsgesetze rauher platten" *Werft Reederei Hafen* (1934).
- [19] В. Н. Гончаров, *Основы динамика русловых потоков*, стр. 306—346.
- [20] М. А. Великанов, *Динамика русловых потоков II*, стр. 137—159.
- [21] Wittake & Watson, *Modern Analysis*, p. 291.
- [22] M. P. Dn Boys, *Ann. des ponts et Chan'ssus* (Ser. 5) **18**, 141—193 (1879).
- [23] L. M. Milne-Thomson, *Theoretical Hydrodynamics*, p. 369.

ПЕРЕМЕЩЕНИЕ НАНОСОВ В КАНАЛЕ И ИЗМЕНЕНИЕ ДНА КАНАЛА

Цай Шу-таи

(Институт механики АН Китая)

Изучение движения наносов имеет большое значение для народного хозяйства нашей страны. Имевшиеся работы по измерению, эксперименту и теоретическому исследованию движения наносов не могут выяснить механизм несущихся по воде наносов, и разрешить спорные вопросы. В данной статье прежде всего, с точки зрения гидромеханики, отличаем взвешенные наносы, донные наносы и промежуточный тип наносов, затем построен простой модель. На основе чего и теории гидромеханики выведена замкнутая система уравнений для определения элементов гидромеханики: скорости, глубины воды и концентрации наносов. Каждое из этих уравнений, вообще говоря, хорошо совпадает с имеющимся экспериментальным результатом. На основе этих уравнений получено условие, необходимое и полное для подобия.

Дан также метод определения скорости, глубины воды и метод проектирования каналов без записания.

Для лучшего экспериментального определения вида некоторых функций и для более точного определения некоторых постоянных, нужных для расчета.

Предложен ряд систематических точных экспериментов для построения графиков или таблиц.