

# 关于彈塑性混合体的变分原理及其应用\*

解 伯 氏

(中国科学院力学研究所)

## 1. 引 言

关于彈性及塑性体力学的变分原理已有不少学者研究过(参看文献[1])。胡海昌在他的論文[1]中曾賦与了这些变分原理以相当廣泛的形式。但是研究彈塑性混合体的变分原理并把它們应用于具体問題的工作,就作者所知,还为数不多。由于在彈塑性混合体的力学問題中,彈塑性区域的分界事先是不知道的,因而用嚴格的方法求解这类問題遭遇了巨大的数学困难。考虑到变分原理在彈性力学中应用时所獲得的巨大成功,我們自然就想到把这个有效的工具推廣应用于彈塑性混合体的力学問題,以便求得某些問題的近似解答。本文的第二節推廣[1]的結果而証明了关于彈塑性混合体的两个一般性变分原理,它們的特殊情形就是普通了解的势能原理和余能原理。第三節則用一个簡單的例子來說明势能原理的应用。在第四節內,我們利用一般性变分原理推導了圓薄膜的大撓度彈塑性变形的基本方程并作出了近似解。由近似方法所得到的結果可以看出,在若干彈塑性混合体的力学問題中,和在彈性力学中一样,应用变分原理來求近似解可以說是一个相当有效的方法。为了簡單起見,我們在下面只限于考慮簡單加载和形变理論的塑性应力应变关系,但是要把这些結果推廣到增量理論的情形(自然增量理論的形式要符合一定的条件)是并不困难的。

## 2. 变 分 原 理

考慮一处于平衡状态的彈塑性物体,設这个平衡状态是由自然状态經簡單加载的过程而达到的。設物体的一部分 $V_p$ 系处于塑性状态,而另一部分 $V_e$ 系处于彈性状态。 $V_e$ 和 $V_p$ 的分界面是 $\Sigma$ ,物体的表面是 $B$ (圖1)。由下面对于变分原理的証明容易看出,本文所有的結論完全不限于圖1这种特殊情形。对于物体內存在有数个彈性及塑性区域,分界面不是在物体內的閉曲面(如圖2)等情形,它們仍然是正确的。設在 $B$

\* 1957年1月16日收到。

的一部分  $B_e$  上外载荷已知, 而在  $B$  的其余部分  $B_p$  上位移系指定。对于这个问题, 我们有平衡方程<sup>1)</sup>

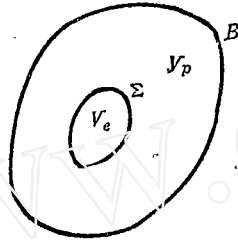


圖 1.

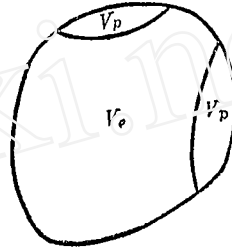


圖 2.

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + X_i = 0, \quad (i, j=1, 2, 3, \text{下同}). \quad (1)$$

应变  $\varepsilon_{ij}$  与位移  $u_i$  的关系式:

$$\varepsilon_{ii} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \quad (\text{不求和}), \quad \varepsilon_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \quad (i \neq j), \quad (2)$$

应变与应力的关系式<sup>2)</sup> (按 Hencky-Nadai-Ильюшин 理論):

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= \varepsilon_{ij}^{(e)} + \varepsilon_{ij}^{(p)}, \\ \varepsilon_{ij}^{(e)} &= \frac{\partial V}{\partial \sigma_{ij}}, \\ \varepsilon_{ii}^{(p)} &= \left( \frac{\Gamma}{S} - \frac{1}{2G} \right) (\sigma_{ii} - \sigma) \quad (\text{不求和}), \\ \varepsilon_{ij}^{(p)} &= \left( \frac{2\Gamma}{S} - \frac{1}{G} \right) \sigma_{ij} \quad (i \neq j), \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

其中

$$V = \frac{1}{2E} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})^2 + \frac{1}{2G} (\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{22}\sigma_{33} - \sigma_{33}\sigma_{11})$$

是單位体積的彈性能;

$$\Gamma = \sqrt{\frac{1}{6} [(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22})^2 + (\varepsilon_{22} - \varepsilon_{33})^2 + (\varepsilon_{33} - \varepsilon_{11})^2]} + \frac{1}{4} (\varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{23}^2 + \varepsilon_{31}^2)$$

是剪应变强度;

$$S = \sqrt{\frac{1}{6} [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2]} + \sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2$$

是剪应力强度;  $\sigma = \frac{\sigma_{ii}}{3}$  是平均法应力;  $G$  和  $E$  分别是剪切和拉压的弹性模数。再

1) 为篇幅简便计, 此地采用张量计算中常用的按重指标求和的规则。凡不按此规则的地方, 均特别注明。

2) 指标  $e$  与  $p$  按习惯系指明应变的弹性部分及塑性部分。

者,对于理想塑性材料,在  $V_p$  内有

$$S=k \text{ (常数)}, \quad (4)$$

而对于硬化材料,则有

$$F=f(S),$$

由此容易看出,应力应变关系可以写为

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= \frac{\partial V}{\partial \sigma_{ij}} \quad (\text{在 } V_e \text{ 内}), \\ \varepsilon_{ij} &= \frac{\partial V}{\partial \sigma_{ij}} + \lambda \frac{\partial (S^2)}{\partial \sigma_{ij}} \quad (\text{在 } V_p \text{ 内, 理想塑性}), \\ \varepsilon_{ij} &= \frac{\partial V}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \quad (\text{在 } V_p \text{ 内, 硬化材料}). \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

其中

$$\lambda = \frac{F}{S} - \frac{1}{2G}, \quad (6)$$

$$\left. \begin{aligned} F(S) &= 2 \int_k^S \left[ f(S) - \frac{S}{2G} \right] dS \quad (S \geq k), \\ F(S) &= 0 \quad (S < k). \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

另外在  $V_e$  及  $V_p$  的分界面  $\Sigma$  以及塑性区域内可能存在的不连续面  $\gamma$  上,应有位移的连续条件及应力的平衡条件<sup>1)</sup>:

$$u_i' = u_i'', \quad (8)$$

$$p_i' = \sigma_{ij}' l_j' = -p_i'' = -\sigma_{ij}'' l_j'', \quad (9)$$

其中字母上的“'”及“''”系表示由  $\Sigma$  或  $\gamma$  的两边趋近时所得的极限值,而  $l_j$  则表示所论区域的外向法线的方向余弦。最后,还有边界条件:

$$\text{在 } B_\sigma \text{ 上:} \quad p_i = \sigma_{ij} l_j = \bar{p}_i, \quad (10)$$

$$\text{在 } B_u \text{ 上:} \quad u_i = \bar{u}_i, \quad (11)$$

其中  $\bar{p}_i$  及  $\bar{u}_i$  为已知。

对于真正的平衡状态,我们在各量上加一上指标或下指标“ $\circ$ ”来表示,由下列条件规定的状态,我们称为“邻近”真正状态的第一种“许可状态”,即 (a)  $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^\circ + \delta\sigma_{ij}$  与  $u_i = u_i^\circ + \delta u_i$  是彼此无关的函数,  $\varepsilon_{ij}$  由  $u_i$  按 (2) 式计算,由  $\sigma_{ij}$  可以确定弹性区域  $V_e (S < k)$ , 塑性区域  $V_p (S \geq k)$ , 这里的等号系用于理想塑性材料,分界面  $\Sigma (S = k)$

1) 容易证明,对于  $\Sigma$  而言,条件 (8) 及 (9) 就相当于普通在弹塑性区域交界处规定的全部位移、应变及应力的连续条件,例如见 [2]。

2) 在此及以下,所谓“邻近”的意思,是在普通变分的意义下了解的。

以及  $V_p$  內的不連續面  $\gamma$  (即  $\sigma_{ij}$  不連續的地方),  $\Sigma$  隣近或重合于  $\Sigma^0$ ,  $\gamma$  隣近或重合于  $\gamma^0$ , (b)  $\sigma_{ij}$  及其一階偏導數在  $V_e + V_p$  內是長長連續的函數, 即在  $\Sigma$  及  $\gamma$  上可以有有限的跳躍, 但  $\sigma_{ij}$  在  $\Sigma$  及  $\gamma$  上應滿足平衡條件 (9); 以及 (c)  $u_i$  在  $V_e + V_p$  內是片片連續的函數, 其不連續處不一定是  $\gamma$ . 由此可知, 第一種許可狀態與真正狀態的差別在於: (a)  $\sigma_{ij}$  不必滿足平衡方程 (1) 及邊界條件 (10); (b)  $u_i$  不必滿足連續條件及邊界條件 (11); 以及 (c)  $\sigma_{ij}$ ,  $\varepsilon_{ij}$  不必滿足應力應變關係 (3).

由下列條件規定的狀態, 我們稱為隣近於真正狀態的第二種許可狀態, 即 (a)  $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0 + \delta\sigma_{ij}$  和  $u_i = u_i^0 + \delta u_i$  是彼此無關的函數,  $\varepsilon_{ij}$  由  $u_i$  按 (2) 式計算. 由  $\varepsilon_{ij}$  可以確定彈性區域  $V_e \left( F < \frac{k}{2G} \right)$ , 塑性區域  $V_p \left( F > \frac{k}{2G} \right)$ , 分界面  $\Sigma \left( F = \frac{k}{2G} \right)$  及  $V_p$  內的不連續面  $\gamma$  (即  $\varepsilon_{ij}$  不連續的地方).  $\Sigma$  隣近或重合于  $\Sigma^0$ ,  $\gamma$  隣近或重合于  $\gamma^0$ ; (b)  $u_i$  在  $V_e + V_p$  內是連續函數,  $u_i$  的一階偏導數及  $\sigma_{ij}$  在  $\gamma$  上可以有有限的跳躍; 以及 (c) 對於理想塑性材料, 在  $V_p$  內  $S = k$ . 由此可知, 第二種許可狀態與真正狀態的差別在於 (a)  $\sigma_{ij}$  不必滿足平衡方程 (1), 平衡條件 (9) 及邊界條件 (10); (b)  $u_i$  不必滿足邊界條件 (11); 以及 (c)  $\sigma_{ij}$ ,  $\varepsilon_{ij}$  不必滿足應力應變關係 (3).

現在來證明下面兩個一般性的變分原理:

I. 廣義余能原理 在第一種許可狀態中, 真正的平衡狀態使下列泛函取極值, 即

$$\delta I_1 = \delta \left\{ \iiint_{V_e^0 + V_p^0} \left[ \left( \frac{\partial \sigma_{ij}^0}{\partial x_j} + X_i \right) u_i^0 + V^0 + q F^0 \right] dv - \iint_{B_u} p_i^0 \bar{u}_i dS - \iint_{B_\sigma} u_i^0 (p_i^0 - \bar{p}_i) dS \right\} = 0. \quad (12)$$

換句話說, 上列泛函的以真正狀態為基礎的一次變分為零. 對於理想塑性材料, 其中的  $q = 0$ ; 對於硬化材料, 則在  $V_p$  內  $q = 1$ , 在  $V_e$  內  $q = 0$ .

証: 我們只要證明在  $V_p$  內沒有  $\gamma$  這個特殊情形就可以了; 因為從以下的證明不難看出, 在  $V_p$  內有  $\gamma$  存在的場合, 證明完全是類似的. 對於界面  $\Sigma$  可以變分的算式

$$\begin{aligned} \delta \iiint_{V_e^0} \left( \frac{\partial \sigma_{ij}^0}{\partial x_j} + X_i \right) u_i^0 dv &= \iiint_{V_e^0 + \delta V_e} \left( \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + X_i \right) u_i dv - \iiint_{V_e^0} \left( \frac{\partial \sigma_{ij}^0}{\partial x_j} + X_i \right) u_i^0 dv = \\ &= \iiint_{V_e^0} \delta \left[ \left( \frac{\partial \sigma_{ij}^0}{\partial x_j} + X_i \right) u_i^0 \right] dv + \iiint_{\delta V_e} \left( \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + X_i \right) u_i dv, \end{aligned}$$

又

$$\delta \iiint_{V_p^0} \left( \frac{\partial \sigma_{ij}^0}{\partial x_j} + X_i \right) u_i^0 dv = \iiint_{V_p^0} \delta \left[ \left( \frac{\partial \sigma_{ij}^0}{\partial x_j} + X_i \right) u_i^0 \right] dv + \iiint_{\delta V_p} \left( \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + X_i \right) u_i dv,$$

注意到  $\delta V_e$  和  $\delta V_p$  在數值上相等而且當  $\delta V_p$  為增加時,  $\delta V_e$  適為減少, 反之亦然, 故上

两式相加有

$$\delta \iiint_{V_e^0 + V_p^0} \left( \frac{\partial \sigma_{ij}^0}{\partial x_j} + X_i \right) u_i^0 dv = \iiint_{V_e^0 + V_p^0} \delta \left[ \left( \frac{\partial \sigma_{ij}^0}{\partial x_j} + X_i \right) u_i^0 \right] dv.$$

同理

$$\delta \iiint_{V_e^0 + V_p^0} V^0 dv = \iiint_{V_e^0 + V_p^0} \delta V^0 dv.$$

又当  $\delta V_p$  为减少时,

$$\delta \iiint_{V_p^0} F^0 dv = \iiint_{V_p^0 - \delta V_p} \delta F^0 dv - \iiint_{\delta V_p} F^0 dv,$$

因为  $F$  在  $\delta V_p$  内为零, 故上式也可写作

$$\delta \iiint_{V_p^0} F^0 dv = \iiint_{V_p^0 - \delta V_p} \delta F^0 dv + \iiint_{\delta V_p} \delta F^0 dv = \iiint_{V_p^0} \delta F^0 dv,$$

而当  $\delta V_p$  为增加时,

$$\delta \iiint_{V_p^0} F^0 dv = \iiint_{V_p^0} \delta F^0 dv + \iiint_{\delta V_p} F^0 dv,$$

因为在  $\delta V_p$  内  $F^0$  为零, 故上式也可写作

$$\delta \iiint_{V_p^0} F^0 dv = \iiint_{V_p^0} \delta F^0 dv + \iiint_{\delta V_p} \delta F^0 dv,$$

其中右端的第二项比之于第一项显然是更高阶的小量, 因为只考虑一次变分, 故有

$$\delta \iiint_{V_p^0} F^0 dv = \iiint_{V_p^0} \delta F^0 dv,$$

显然当  $\delta V_p$  一部分为增加, 一部分为减少时, 上式仍然正确. 注意到<sup>1)</sup>

$$\delta F^0 = \frac{\partial F^0}{\partial \sigma_{11}} \delta \sigma_{11} + \frac{\partial F^0}{\partial \sigma_{12}} \delta \sigma_{12} + \dots$$

再应用熟知的 Остроградский 关于体积分与面积分的转换公式(我们自然假定曲面  $B$  及  $\Delta$  是容许应用这个公式的), 就可将变分式(12)写成

$$\delta I_1 = \iiint_{V_e^0 + V_p^0} \left( \frac{\partial \sigma_{ij}^0}{\partial x_j} + X_i \right) \delta u_i dv + \iint_{V_e^0 + V_p^0} \left\{ \frac{\partial (V^0 + q F^0)}{\partial \sigma_{11}} - \frac{\partial u_1^0}{\partial x_1} \right\} \delta \sigma_{11} +$$

1) 这个式子之所以成立, 是因为由定义  $F$  的(7)式可以看出, 不但  $F$  是  $S$  的连续函数, 而且  $F'(S)$  也是  $S$  的连续函数.

$$\begin{aligned}
& + \left[ \frac{\partial(V^\circ + qF^\circ)}{\partial\sigma_{12}} - \frac{\partial u_1^\circ}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2^\circ}{\partial x_1} \right] \delta\sigma_{12} + \dots \} dv + \iint_{B_u} (u_i^\circ - \bar{u}_i) \delta p_i dS - \\
& - \iint_{B_\sigma} (p_i^\circ - \bar{p}_i) \delta u_i dS + \iint_{\Sigma} (u_i^\circ \delta p_i' + u_i^{\circ\prime} \delta p_i'') dS. \quad (13)
\end{aligned}$$

其中字母上的“ $\circ$ ”及“ $\prime$ ”分别表示由  $V_p$  及  $V_e$  内趋近于  $\Sigma$  时的极限值。因为在  $\Sigma$  上, 根据第一种许可状态的条件:  $\delta p_i' = -\delta p_i''$ , 又因  $u_i^{\circ\prime} = u_i^{\circ\prime\prime}$ , 故上式右端最后一个积分等于零。再由真正状态应满足平衡方程 (1) 及边界条件 (10), (11) 就知道在上式的右端只剩下了第二个积分。现在来证明它也是等于零的。事实上, 在  $V_e^\circ$  内,  $q=0$ , 再根据 (5) 有

$$\frac{\partial V^\circ}{\partial\sigma_{11}} - \frac{\partial u_1^\circ}{\partial x_1} = \frac{\partial V^\circ}{\partial\sigma_{12}} - \frac{\partial u_1^\circ}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2^\circ}{\partial x_1} = \dots = 0;$$

在  $V_p^\circ$  内, 对于硬化材料,  $q=1$ , 根据 (5) 有

$$\frac{\partial(V^\circ + F^\circ)}{\partial\sigma_{11}} - \frac{\partial u_1^\circ}{\partial x_1} = \frac{\partial(V^\circ + F^\circ)}{\partial\sigma_{12}} - \frac{\partial u_1^\circ}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2^\circ}{\partial x_1} = \dots = 0$$

因此在这种情形, (13) 式中之第二个积分等于零。对于理想塑性材料, (13) 式中第二个积分在  $V_e^\circ$  这一部分自然仍等于零, 对于在  $V_p^\circ$  的这一部分, 可如下证明 (此时  $q=0$ )。如果  $\delta V_p$  是增加, 那末显然在  $V_p^\circ$  内

$$S^2(\sigma_{ij}) = S^2(\sigma_{ij}^\circ + \delta\sigma_{ij}) = k^2,$$

而且  $S^2(\sigma_{ij}^\circ) = k^2$ , 故在  $V_p^\circ$  内

$$\frac{\partial(S_0^2)}{\partial\sigma_{11}} \delta\sigma_{11} + \frac{\partial(S_0^2)}{\partial\sigma_{12}} \delta\sigma_{12} + \dots = 0. \quad (14)$$

再根据 (5) 有

$$\frac{\partial(S_0^2)}{\partial\sigma_{ij}} = \frac{1}{\lambda} \left( \delta_{ij}^\circ - \frac{\partial V^\circ}{\partial\sigma_{ij}} \right),$$

因此在  $V_p^\circ$  内,

$$\frac{1}{\lambda} \left\{ \left( \frac{\partial V^\circ}{\partial\sigma_{11}} - \frac{\partial u_1^\circ}{\partial x_1} \right) \delta\sigma_{11} + \left( \frac{\partial V^\circ}{\partial\sigma_{12}} - \frac{\partial u_1^\circ}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2^\circ}{\partial x_1} \right) \delta\sigma_{12} + \dots \right\} = 0,$$

但  $\frac{1}{\lambda} \neq 0$ , 故上式大括号中之量等于零。如果  $\delta V_p$  是减少, 那末和上面类似地可以看出在  $V_p$  内, (14) 式仍然成立, 而在  $\delta V_p$  内, 如果考虑到  $S^2$  在  $\Sigma$  附近的连续性, 就可以肯定 (14) 式的右端虽不为零, 但是一个小量。因为只考虑一次变分, 故 (13) 式中第二个积分的区域  $V_p^\circ$  可用  $V_p$  来代替, 因而它是等于零的。如果  $\delta V_p$  一部分系增加, 另一部分系减少, 显然可作类似的证明。

综上所述, 在所有情形,  $\delta I_1 = 0$ , 这就证明了我们的肯定,

II. 廣义势能原理 在第二种許可状态中,真正状态使下列泛函取極值,即

$$\delta I_2 = \delta \left\{ \iiint_{V_e^0 + V_p^0} \left( \sigma_{ij}^0 \frac{\partial u_i^0}{\partial x_j} - X_i u_i^0 - V^0 - q F^0 \right) dv - \iint_{B_\sigma} u_i^0 \bar{p}_i dS - \iint_{B_u} p_i^0 (u_i^0 - \bar{u}_i) dS \right\} = 0. \quad (15)$$

換句話說,上列泛函的以真正状态为基础的一次变分为零。

証:和上面一样,只要証明在  $V_e$  内沒有  $\gamma$  的情形就可以了,因为只考慮一次变分,故

$$\delta \iiint_{V_e^0 + V_p^0} \left( \sigma_{ij}^0 \frac{\partial u_i^0}{\partial x_j} - X_i u_i^0 - V^0 - q F^0 \right) dv = \iiint_{V_e^0 + V_p^0} \delta \left( \sigma_{ij}^0 \frac{\partial u_i^0}{\partial x_j} - X_i u_i^0 - V^0 - q F^0 \right) dv,$$

应用 Остроградский 公式,即可將变分式 (15) 寫成

$$\begin{aligned} \delta I_2 = & - \iiint_{V_e^0 + V_p^0} \left( \frac{\partial \sigma_{ij}^0}{\partial x_j} + X_i \right) \delta u_i dv + \iiint_{V_e^0 + V_p^0} \left[ \frac{\partial u_1^0}{\partial x_1} - \frac{\partial (V^0 + q F^0)}{\partial \sigma_{11}} \right] \delta \sigma_{11} + \\ & + \left[ \frac{\partial u_1^0}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2^0}{\partial x_1} - \frac{\partial (V^0 + q F^0)}{\partial \sigma_{12}} \right] \delta \sigma_{12} + \dots \Bigg] dv + \iint_{B_\sigma} (p_i^0 - \bar{p}_i) \delta u_i dS - \\ & - \iint_{B_u} (u_i^0 - \bar{u}_i) \delta p_i dS + \iint_{\Sigma} (p_i^{0'} \delta u_i' + p_i^{0''} \delta u_i'') dS. \end{aligned}$$

因为在  $\Sigma$  上,根据第二种許可状态的条件,  $\delta u_i' = \delta u_i''$ ; 又因  $p_i^{0'} = -p_i^{0''}$ , 故上式最后一个积分等于零,第一,第三及第四个积分显然也是等于零的,至于第二个积分,則可如上面一样的証明它等于零。因此  $\delta I_2 = 0$ 。

有几个特殊情形值得指出<sup>1)</sup>:

I', 如果在 I 中,限定  $\sigma_{ij}$  满足平衡方程 (1) 及边界条件 (10), 則有

$$\delta I_1' = \delta \left\{ \iiint_{V_e + V_p} (V + q F) dv - \iint_{B_u} p_i \bar{u}_i dS \right\} = 0. \quad (16)$$

这就是普通的余能原理。

II', 如果在 II 中,限定  $u_i$  满足边界条件 (11), 而  $\sigma_{ij}$  系由  $\varepsilon_{ij}$  按 (5) 式計算,那末我們就得到普通的势能原理。事实上,应力应变关系可以改寫为

$$\varepsilon_{ii} = \frac{\sigma}{K} + \frac{\psi}{2G} (\sigma_{ii} - \sigma) \quad (\text{不求和}), \quad \varepsilon_{ij} = \frac{\psi}{G} \sigma_{ij} \quad (i \neq j).$$

其中  $\sigma = \frac{\sigma_{ii}}{3}$ ,  $\psi = \frac{2GP}{S}$ ,  $K = \frac{2(1+\nu)G}{1-2\nu}$  ( $\nu$  是泊松比)。

对于彈性区域,顯然  $\psi = 1$ 。如果令

1) 以下为了簡單起見,上指标或下指标“0”均已略去。

$$U = \frac{3}{2} \frac{\sigma^2}{K},$$

则应力应变关系可总写为

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\partial U}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\psi}{2G} \frac{\partial (S^2)}{\partial \sigma_{ij}},$$

注意到  $U$  和  $S^2$  都是应力的二次齐次式, 因有

$$\sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = 2U + \frac{\psi}{G} S^2 = 2(U + ST),$$

又因

$$V = U + \frac{S^2}{2G}, \quad F = 2 \int_k^s \left( \Gamma - \frac{S}{2G} \right) dS = 2 \left( \Gamma S - \int_0^{\Gamma} S d\Gamma \right) - \frac{S^2}{2G},$$

由此可知

$$\sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - V = U + \frac{S^2}{2G} = V \quad (\text{在 } V_e \text{ 内})$$

$$\sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - V = U + 2k\Gamma - \frac{k^2}{2G} \quad (\text{在 } V_p \text{ 内, 理想塑性}),$$

$$\sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - V - F = U + 2 \int_0^{\Gamma} S d\Gamma \quad (\text{在 } V_p \text{ 内, 硬化材料}).$$

因而此时变分式 (15) 可以写成

$$\begin{aligned} \delta I'_2 = & \delta \left\{ \iiint_{V_p} V dv + \iiint_{V_e} \left( U + 2k\Gamma - \frac{k^2}{2G} \right) dv - \iiint_{V_e + V_p} X_i u_i dv - \right. \\ & \left. - \iint_{B_\sigma} u_i \bar{p}_i dS \right\} = 0 \quad (\text{理想塑性}) \end{aligned} \quad (17)$$

或者

$$\begin{aligned} \delta I'_2 = & \delta \left\{ \iiint_{V_e} V dv + \iiint_{V_p} \left( U + 2 \int_0^{\Gamma} S d\Gamma \right) dv - \iiint_{V_e + V_p} X_i u_i dv - \right. \\ & \left. - \iint_{B_\sigma} u_i \bar{p}_i dS \right\} = 0 \quad (\text{硬化材料}), \end{aligned} \quad (18)$$

变分式 (17) 或 (18) 显然就是普通的势能原理。

上面这些变分原理只是肯定了, 真正状态和与它邻近的许可状态比较起来, 是使某个泛函取极值。但是反过来说, 如果在所有满足许可状态条件的状态中能找出使相应泛函取极值的状态, 而且这个状态的确满足问题的全部条件, 那末自然也就得到了真正的解。我们自然不便或不能把所有的许可状态拿来研究, 而只能在许可状态的有限领



域中來研究使相应泛函取極值的狀態。正就是在这个意义上，我們可以利用变分原理來求得問題的近似解答<sup>1)</sup>。

### 3. 橢圓截面桿件的彈塑性扭轉

考慮一橢圓截面桿件受到兩端的扭矩  $M$  作用時的彈塑性扭轉問題（在 St. Venant 意义下的扭轉）。設橢圓的形狀是

$$\frac{x^2}{a^2(1+\delta)^2} + \frac{y^2}{a^2(1-\delta)^2} = 1.$$

為了簡單起見，設橢圓的离心率很小，換言之， $\delta \ll 1$ 。對於在 St. Venant 意义下的扭轉，我們知道，可以認為桿件內的應力應變只與坐標  $x, y$  有關，而與沿桿軸方向的坐標  $z$  無關，同時對於應力與位移我們有

$$\left. \begin{aligned} u &= -\theta yz, & v &= \theta xz, & w &= \theta \varphi(x, y), \\ \sigma_x &= \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

其中  $\theta$  是單位長度的扭轉角。設材料是理想塑性的。現用勢能原理來近似地解這個問題。根據 (17) 式，有

$$\delta \left\{ \iint_{A_p} \left( 2kF - \frac{k^2}{2G} \right) dA + \iint_{A_e} V dA - M\theta \right\} = 0, \quad (20)$$

其中  $A_p$  與  $A_e$  分別代表截面內的塑性及彈性區域。現設  $\varphi = cxy$ ，而  $c$  是待定常數，於是

$$F = \frac{1}{2} \sqrt{\gamma_{xz}^2 + \gamma_{yz}^2} = \frac{\theta}{2} \sqrt{\left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \right)^2} = \frac{\theta}{2} \sqrt{(c-1)^2 y^2 + (c+1)^2 x^2},$$

$$V = \frac{S^2}{2G} = 2G F^2 = \frac{G\theta^2}{2} [(c-1)^2 y^2 + (c+1)^2 x^2].$$

根據  $F$  的算式可以確定彈塑性區域的交界是

$$(c+1)^2 x^2 + (c-1)^2 y^2 = \left( \frac{k}{G\theta} \right)^2. \quad (21)$$

現在來計算 (20) 式中所需要的各項積分：

$$\iint_{V_e} V dA = \frac{\pi k^4}{4G^2 \theta^2} \cdot \frac{1}{(1-c^2)} \quad (\text{設 } c^2 < 1),$$

$$\iint_{A_p} \frac{k^2}{2G} dA = \frac{\pi k^2 a^2}{2G} \left[ 1 - \delta^2 - \left( \frac{k}{G\theta a} \right)^2 \frac{1}{1-c^2} \right],$$

1) 自然，正如對於 Галёркин 方法的了解一樣，我們也可以把這裡的變分原理看成是使問題的基本方程和邊界條件以及連續條件在某種積分意义下滿足的方法（參看第四節）。

$$\iint_{A_p} 2k\Gamma dA = \frac{4k\theta a^3(1+c)^3(1+\delta)^3}{3(1-c^2)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ 1 + \frac{4(1+c\delta)(c+\delta)}{(1-c)^2(1-\delta)^2} \sin^2 \varphi \right]^{-3/2} d\varphi - \frac{2\pi k^4}{3G^3\theta^2(1-c^2)}.$$

因为  $\delta \ll 1$ , 故我们也假设  $c \ll 1$ , 于是保留到  $c$  和  $\delta$  的二阶项, 即得

$$\iint_{A_p} 2k\Gamma dA = \frac{2\pi k\theta a^3}{3} \left( 1 + \frac{c^2}{4} + \frac{3}{2}c\delta - \frac{3}{4}\delta^2 \right) - \frac{2\pi k^4}{3G^3\theta^2}(1+c^2).$$

把这些结果代入 (20) 中, 对  $c$  变分, 得

$$\left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{k}{G\theta a} \right)^3 \right] c = -3\delta; \quad (22)$$

对  $\theta$  变分, 即得

$$M = \frac{2\pi k a^3}{3} \left( 1 + \frac{c^2}{4} + \frac{3}{2}c\delta - \frac{3}{4}\delta^2 \right) - \frac{(1+c^2)}{6} \frac{\pi k^4}{G^3\theta^3}. \quad (23)$$

这个式子的应用自然应从杆件截面的周边全部到达塑性状态时开始, 即应符合条件

$$\frac{k}{G\theta(1+c)} \leq a(1+\delta), \quad \frac{k}{G\theta(1-c)} \leq a(1-\delta).$$

如果设  $\delta=0.05$ , 那末就大约得到应有

$$\frac{Ga\theta}{R} \geq 1.05.$$

如果在 (22) 及 (23) 中令  $\theta \rightarrow \infty$ , 即得  $c = -3\delta$ , 而极限扭矩为

$$M^* = \frac{2\pi k a^3}{3} (1-3\delta^2). \quad (24)$$

对于圆形截面的杆件, 可在 (22) 到 (24) 中令  $\delta=0$ . 这时它们就给出了这个问题的准确解答. 对于椭圆形截面的杆件, 就作者所知, 目前尚无精确的解答, 只有 Соколовский<sup>[8]</sup> 关于扁圆截面杆件的弹塑性扭转的解. 扁圆的参数表示式是 (应用本文的符号):

$$x = a[1 + \delta(\cos 2\alpha - 2)] \sin \alpha, \quad y = -a[1 + \delta(\cos 2\alpha - 2)] \cos \alpha.$$

当  $\delta$  很小时, 它就接近于椭圆. 根据严格的解法, Соколовский 得到的极限扭矩是

$$M^* = \frac{2\pi k a^3}{3} \left( 1 - \frac{9}{2}\delta^2 + 4\delta^3 \right) \approx \frac{2\pi k a^3}{3} \left( 1 - \frac{9}{2}\delta^2 \right).$$

按同时他还求得了扭矩与转角的关系式. 但因该式较繁, 故不再写出. 在图 3 中画出了近似公式 (22), (23) 计算的结果以及 Соколовский 的结果 (设  $\delta=0.05$ ). 考虑到 Соколовский 的解对于椭圆截面的杆件而言也非准确解, 那末应该认为这里得到的结

果是相当满意的了。

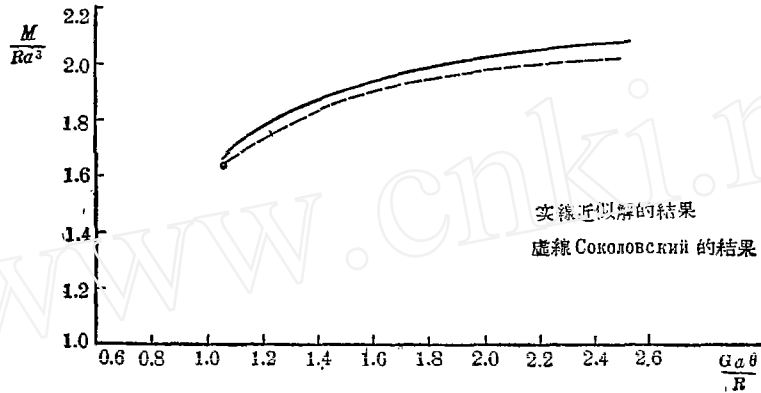


图 3.

#### 4. 圆薄膜的大挠度弹塑性变形

这个问题曾由 Gleyzal<sup>[4]</sup>, Григорьев<sup>[5]</sup> 等人研究过。前者系对特定的材料用数字积分法求解, 后者考虑了理想塑性和幂函数的  $\tau-\gamma^{(1)}$  关系两种情形, 也是用的数字积分方法。所作的计算工作自然是相当繁重的。应用我们的一般性变分原理, 不但可以求得问题的基本方程, 而且同时也就提供了问题的近似解法。计算工作简单了许多, 所得的结果却是相当好的。为了便于比较最后结果, 以下就 [4] 中所考虑的情形来讨论, 和 [4] 中一样, 我们也用形变理论的应力应变关系, 并假定材料不可压缩。

膜的工作情况如图 4, 5 所示。周边系固定, 膜的质点的位移是  $u, w$ , 因而应变是 (考虑到二阶小量)

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr} + \frac{1}{2} \left( \frac{dw}{dr} \right)^2, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r}. \quad (25)$$

再根据材料不可压缩的假设, 沿膜的法线方向

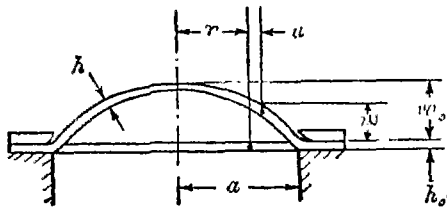


图 4.

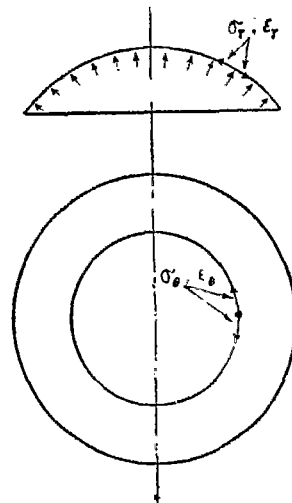


图 5.

1)  $\tau, \gamma$  的意义见下面 (27) 式, 除了不重要的系数外, 它们就分别表示膜内的剪应力强度和剪应变强度。

的应变

$$\varepsilon_n = \frac{h-h_0}{h_0} = -\varepsilon_r - \varepsilon_\theta,$$

或者

$$h = h_0(1 - \varepsilon_r - \varepsilon_\theta), \quad (26)$$

其中  $h_0$  是膜原来的厚度,  $h$  是变形后的厚度. 作用在膜内的应力是  $\sigma_r, \sigma_\theta$ , 而沿膜法线方向的应力  $\sigma_n \approx 0$ , 再令

$$\tau = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{\sigma_r^2 - \sigma_r \sigma_\theta + \sigma_\theta^2}, \quad \gamma = 2 \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\varepsilon_r^2 + \varepsilon_r \varepsilon_\theta + \varepsilon_\theta^2}, \quad (27)$$

则应力应变关系可以写为

$$\varepsilon_r = \frac{1}{6} \frac{\gamma}{\tau} (2\sigma_r - \sigma_\theta) = \frac{\partial F}{\partial \sigma_r}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{1}{6} \frac{\gamma}{\tau} (2\sigma_\theta - \sigma_r) = \frac{\partial F}{\partial \sigma_\theta}, \quad (28)$$

其中  $F(\tau) = \frac{3}{2} \int \gamma d\tau$ . 平衡方程是<sup>1)</sup>

$$t_r \frac{dw}{dr} + \frac{1}{2} pr = 0, \quad (29)$$

$$t_\theta = \frac{d}{dr} (\gamma t_r), \quad (30)$$

其中  $t_r = h\sigma_r, t_\theta = h\sigma_\theta$ . 边界条件是

$$\text{在 } r=a \text{ 时,} \quad w = u = \varepsilon_\theta = 0. \quad (31a, b, c)$$

另外有在中心的条件

$$\text{当 } r=0 \text{ 时,} \quad \frac{wd}{dr} = u = 0. \quad (32a, b)$$

由 (25) 式可得应变协调条件为

$$\varepsilon_r - \frac{d}{dr} (r\varepsilon_\theta) = \frac{1}{2} \left( \frac{dw}{dr} \right)^2.$$

或者根据 (28),

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_r} - \frac{d}{dr} \left( r \frac{\partial F}{\partial \sigma_\theta} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{dw}{dr} \right)^2. \quad (33)$$

如果由 (26) 及 (30) 解出  $\sigma_\theta$ , 即通过  $\sigma_r$  来表示  $\sigma_\theta$ , 然后代入 (33) 中, 那末 (29) 和 (33) 就构成了问题的基本方程, 包含两个待求函数  $w$  和  $\sigma_r$ . 它们是非线性的, 要严格地求

1) (29) 式和 Gloyzal 所用的式子  $t_r \frac{dw}{dr} \left[ 1 + \left( \frac{dw}{dr} \right)^2 \right]^{-1/2} + \frac{1}{2} pr = 0$  差一个根式. 因为在应变的算式中只考虑到二阶小量, 因此我们认为考虑这个根式是不必要的. 这从下面对于基本方程的变分推导也可以看出.

解自然很困难。即使应用普通的势能原理或余能原理来求近似解也不大方便。现在用前面的一般性变分原理来近似地解这个问题。注意到广义势能原理的算式(虽然在前面讨论时仅限于微小应变,但要推广应用于这里所考虑的情形是不难的),可以肯定下面的变分式。

$$\delta \int_0^a \left\{ \frac{\sigma_r h}{2} \left( \frac{dw}{dr} \right)^2 - Fh - pw \right\} r dr = 0 \quad (34)$$

相当于问题的基本方程(29)及(33)。在变分式(34)中, $w$ 和 $\sigma_r$ 系视为独立无关的函数, $h$ 不变分, $w$ 满足边界条件(31a),另外 $\sigma_\theta$ 和 $\sigma_r$ 还满足方程(30)及边界条件(31c)。事实上,变分式(34)可以写成

$$\begin{aligned} & \int_0^a \left\{ \sigma_r h \frac{dw}{dr} \frac{d\delta w}{dr} + \frac{1}{2} \left( \frac{dw}{dr} \right)^2 h \delta \sigma_r - h \frac{\partial F}{\partial \sigma_r} \delta \sigma_r - h \frac{\partial F}{\partial \sigma_\theta} \delta \sigma_\theta - p \delta w \right\} r dr = \\ & = - \int_0^a \left[ \frac{d}{dr} \left( r t_r \frac{dw}{dr} \right) + pr \right] \delta w dr + r t_r \frac{dw}{dr} \delta w \Big|_0^a + \\ & \quad + \int_0^a \left\{ \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{dw}{dr} \right)^2 - \frac{\partial F}{\partial \sigma_r} \right] \delta t_r - \frac{\partial F}{\partial \sigma_\theta} \delta t_\theta \right\} r dr = 0, \end{aligned}$$

注意到边界条件(31a),(31c)及 $\delta t_\theta = \frac{d}{dr}(r \delta t_r)$ ,即得

$$- \int_0^a \left[ \frac{d}{dr} \left( r t_r \frac{dw}{dr} \right) + pr \right] \delta w dr + \int_0^a \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{dw}{dr} \right)^2 - \frac{\partial F}{\partial \sigma_r} + \frac{d}{dr} \left( r \frac{\partial F}{\partial \sigma_\theta} \right) \right] \delta t_r r dr = 0.$$

因为 $\delta w$ 及 $\delta t_r$ 是彼此独立的变分,即得方程(33)与

$$\frac{d}{dr} \left( r t_r \frac{dw}{dr} \right) + pr = 0,$$

将上式积分一次并消去 $r$ 即得(29)。

上面的变分推导同时还提供了求解问题的近似方程,即按 Галёркин 方法写出的方程

$$\int_0^a \left[ \frac{d}{dr} \left( r \sigma_r h \frac{dw}{dr} \right) + pr \right] \delta w r dr = 0, \quad (35)$$

$$\int_0^a \left\{ \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{dw}{dr} \right)^2 - \frac{\partial F}{\partial \sigma_r} \right] h \delta \sigma_r - \frac{\partial F}{\partial \sigma_\theta} h \delta \sigma_\theta \right\} r dr = 0. \quad (36)$$

现引用无量纲量

$$S_r = \frac{\sigma_r}{E}, \quad S_o = \frac{\sigma_o}{E}, \quad P = \frac{pa}{Eh_0}, \quad W = \frac{w}{a}, \quad x = \frac{r}{a}, \quad \xi = x^2.$$

其中  $E$  的量纲与应力相同, 它的意义下面再定义. 于是可将 (35) 及 (36) 写成

$$\int_0^1 \left[ \frac{d}{dx} \left( x S_r \frac{h}{h_0} \frac{dW}{dx} \right) + P x \right] \delta w dx = 0, \quad (37)$$

$$\int_0^1 \left\{ \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{dW}{dx} \right)^2 - \frac{\partial F}{\partial \sigma_r} \right] \frac{h}{h_0} \delta S_r - \frac{\partial F}{\partial \sigma_o} \frac{h}{h_0} \delta S_o \right\} d\xi = 0. \quad (38)$$

在上面对于基本方程的变分推导中, 系假定  $h$  不变分, 由此得到了 Галёркин 形式的方程 (37), (38). 以下的计算都是从这两个方程出发的. 我们自然还可以把这两个方程的意义看得更广泛一些, 即把其中的  $h$  看成是依随应力或位移或者两者而改变的函数, 而将 (37) 及 (38) 了解为基本方程在积分意义下的近似满足.

为了满足条件 (31a) 及 (32a), 我们取

$$W = W_0 [1 - c\xi - (1-c)\xi^2], \quad (39)$$

其中  $W_0$  和  $c$  是待定常数. 现在近似地来估计厚度的变化. 根据 (39) 可以求得膜在变形后的面积是

$$A = 2\pi \int_0^a r \sqrt{1 + \left( \frac{dw}{dr} \right)^2} dr \cong 2\pi \int_0^a r \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{dw}{dr} \right)^2 \right] dr = \pi a^2 (1 + \mu W_0^2),$$

其中  $\mu = c^2 + \frac{8c(1-c)}{3} + 2(1-c)^2$ . 根据材料不可压缩的假定, 应有  $\pi a^2 h_0 = Ah$ , 由此

$$\frac{h}{h_0} = \frac{1}{1 + \mu W_0^2}. \quad (40)$$

为要满足方程 (30) 及条件 (31c), 设

$$S_r = c_1(5 - \xi), \quad S_o = c_1(5 - 3\xi), \quad (41)$$

其中  $c_1$  待定. 于是

$$\tau = \frac{\sqrt{2} E c_1}{3} \sqrt{7\xi^2 - 20\xi + 25}. \quad (42)$$

根据 [4] 的实验结果,  $\tau$  和  $\gamma$  的关系如图 6 所示<sup>1)</sup>. 我们用折线  $OABC$  来近似它, 于是有

$$\frac{\gamma}{\tau} = \frac{1}{E} \quad (\text{弹性段 } OA),$$

1) 这是在膜中心测量所得的结果, [4] 中还有用单向拉伸试验所得的  $\tau$ - $\gamma$  的关系, 曲线比在膜中心所量得的结果稍微高些, 因为用后者比较合理, 故单向拉伸的结果此地没有重绘.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\gamma}{\tau} &= \gamma_0 \left( 1 - \frac{1}{\lambda_0} \right) \frac{1}{\tau} + \frac{1}{E\lambda_0} \quad (\text{第一塑性段 } AB), \\ \frac{\gamma}{\tau} &= \left( \gamma_1 - \frac{k_1}{E\lambda_1} \right) \frac{1}{\tau} + \frac{1}{E\lambda_1} \quad (\text{第二塑性段 } BC). \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

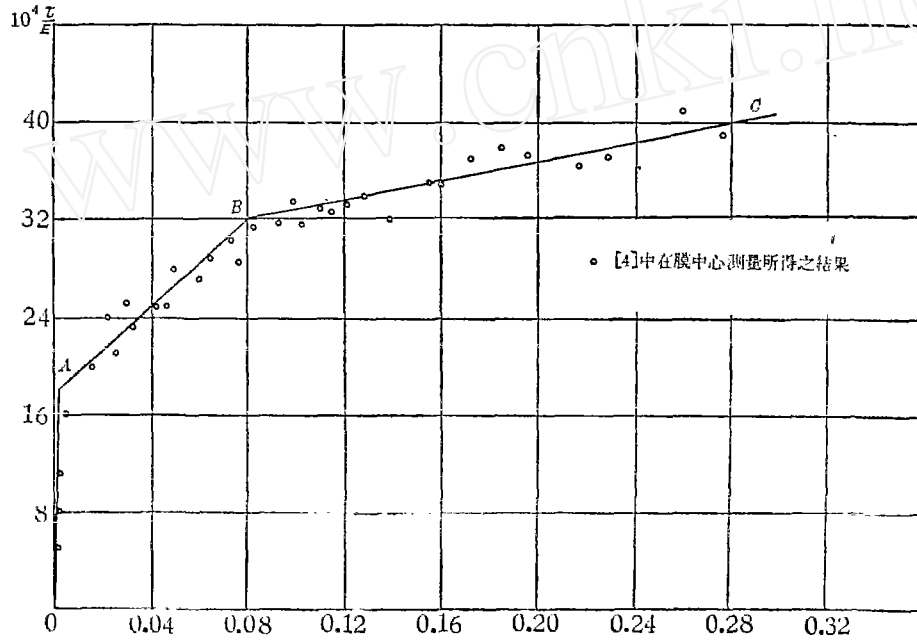


图 6.

其中<sup>1)</sup>  $E = 70.3 \times 10^4 \text{ kg/cm}^2$ ,  $\frac{k_0}{E} = 18 \times 10^{-4}$ ,  $\frac{k_1}{E} = 32 \times 10^{-4}$

$$\gamma_0 = 1.8 \times 10^{-3}, \quad \gamma_1 = 8 \times 10^{-2}, \quad \lambda_0 = 18.1 \times 10^{-3}, \quad \lambda_1 = 4 \times 10^{-3}.$$

根据(42)式,由条件  $\tau = k_0$  及  $\tau = k_1$  即可决定弹塑性交界  $\xi_0$  及第一与第二塑性区交界  $\xi_1$  为

$$\xi_0 = \frac{10 - \sqrt{7D_0 - 75}}{7}, \quad (44a)$$

$$\xi_1 = \frac{10 - \sqrt{7D_1 - 75}}{7}, \quad (44b)$$

其中

$$D_0 = \frac{9k_0^2}{2c_1^2 E^2}, \quad D_1 = \frac{9k_1^2}{2c_1^2 E^2}. \quad (45)$$

1) 因为在弹性范围内的应变大小,从(Gleyzal)的图上下易确定  $B$ , 这里所取的  $E$  相当拉取锡氏弹性系数为  $2.11 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$ . (因 Gleyzal 用的材料是中碳钢).

根据条件  $1 > \xi_0 > 0$  可得

$$\frac{\sqrt{3} k_0}{2 \sqrt{\frac{1}{2} E}} \geq c_1 \geq \frac{3k_0}{5 \sqrt{\frac{1}{2} E}}. \quad (46a)$$

此时膜的中心部分  $0 \leq \xi \leq \xi_0$  系处于第一塑性段, 而外圈部分  $\xi_0 \leq \xi \leq 1$  处于弹性状态. 根据条件  $1 > \xi_1 > 0$  可得

$$\frac{\sqrt{3} k_1}{2 \sqrt{\frac{1}{2} E}} \geq c_1 \geq \frac{3k_1}{5 \sqrt{\frac{1}{2} E}}, \quad (46b)$$

此时膜的中心部分  $0 \leq \xi \leq \xi_1$  处于第二塑性段, 而外圈部分  $\xi_1 \leq \xi \leq 1$  处于第一塑性段. 根据  $k_0$  和  $k_1$  的数值及 (46) 式容易证明膜内不会同时存在三状种态 (弹性段, 第一及第二塑性段).

在弹性段, 第一及第二塑性段的  $F$  分别以  $F_0$ ,  $F_1$  及  $F_2$  表示, 根据 (28), (41), (42), (43) 诸式, 得

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_0}{\partial \sigma_r} &= \frac{c_1(5+\xi)}{6}, & \frac{\partial F_0}{\partial \sigma_\theta} &= \frac{5c_1(1-\xi)}{6}, \\ \frac{\partial F_1}{\partial \sigma_r} &= \frac{-\alpha(5+\xi)}{\sqrt{7\xi^2-20\xi+25}} + \frac{c_1(5+\xi)}{6\lambda_0}, & \frac{\partial F_1}{\partial \sigma_\theta} &= \frac{-5\alpha(1-\xi)}{\sqrt{7\xi^2-20\xi+25}} + \frac{5c_1(1-\xi)}{6\lambda_0}, \\ \frac{\partial F_2}{\partial \sigma_r} &= \frac{-\beta(5+\xi)}{\sqrt{7\xi^2-20\xi+25}} + \frac{c_1(5+\xi)}{6\lambda_1}, & \frac{\partial F_2}{\partial \sigma_\theta} &= \frac{-5\beta(1-\xi)}{\sqrt{7\xi^2-20\xi+25}} + \frac{5c_1(1-\xi)}{6\lambda_1}, \end{aligned}$$

其中  $\alpha = \frac{\gamma_0}{2\sqrt{\frac{1}{2}}} \left( \frac{1}{\lambda_0} - 1 \right)$ ,  $\beta = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{2}}} \left( \frac{k_1}{E\lambda_1} - \gamma_1 \right)$ . 把所得到的结果代入 (37) 及 (38), 注意到

$$\begin{aligned} \delta W &= [1 - c\xi - (1-c)\xi^2] \delta W_0 + W_0(\xi^2 - \xi) \delta c, \\ \delta S_r &= (5-\xi) \delta c_1, \quad \delta S_\theta = (5-3\xi) \delta c_1. \end{aligned}$$

完成积分并简单地计算以后即得  $c = \frac{38}{43}$ , 以及

$$(1 + \mu W_0^2) P = 18c_1 W_0, \quad (47)$$

$$\begin{aligned} 4.68 W_0^2 &= c_1 \left[ \frac{52}{9} + \frac{1}{6} \left( \frac{1}{\lambda_0} - 1 \right) \left( 50 \xi_0 - 20 \xi_0^2 + \frac{14}{3} \xi_0^3 \right) \right] - 2\sqrt{7} \alpha f(\xi_0) \\ &\quad \text{(膜处于弹性及第一塑性段);} \end{aligned} \quad (48a)$$

或者

$$\begin{aligned} 4.68 W_0^2 &= c_1 \left[ \frac{52}{9\lambda_0} + \frac{1}{6} \left( \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_0} \right) \left( 50 \xi_1 - 20 \xi_1^2 + \frac{14}{3} \xi_1^3 \right) \right] - 2\sqrt{7} \alpha g(\xi_1) - \\ &\quad - 2\sqrt{7} \beta f(\xi_1) \quad \text{(膜处于第一及第二塑性段).} \end{aligned} \quad (48b)$$

其中  $\mu = 1.085$  而



$$f(\xi) = \int_0^{\xi} \sqrt{u^2 - \frac{20}{7}u + \frac{25}{7}} du, \quad g(\xi) = \int_{\xi}^1 \sqrt{u^2 - \frac{20}{7}u + \frac{25}{7}} du.$$

由(44)式, 因为  $\xi_0$  或  $\xi_1$  可以通过  $c_1$  表示, 因而(47)及(48)就通过参数  $c_1$  决定了  $F$  和  $W_0$  的关系. 利用它们来进进行计算是很方便的. 如果我们当初忽略厚度的变化, 即设  $h = h_0$ , 那末只要在上面的结果中令  $\mu = 0$  就可以了. 另外, 不难证明(47)和(48)所确定的  $P-W_0$  曲线不但本身连续, 而且  $\frac{dF}{dW_0}$  也是到处连续的.

假设膜全部在弹性段内 ( $\xi_0 = 0$ ), 并且忽略厚度的变化, 则由(47)及(48a)可得  $W_0 = 0.41F^{1/3}$ , 而准确解<sup>[6], [7]</sup>是  $W_0 = 0.412P^{1/3}$ . 误差不足 0.5%.

根据(47)及(48)计算所得的结果绘在图7中, 图上同时画出了 Gleyzal 的实验结果和他用数字积分求得的结果. 只在膜快破裂时, 近似解和准确解才有比较明显的差别, 这个差别的原因主要是由于在挠度较大时, 我们对于厚度变化的估计太粗略的缘故.

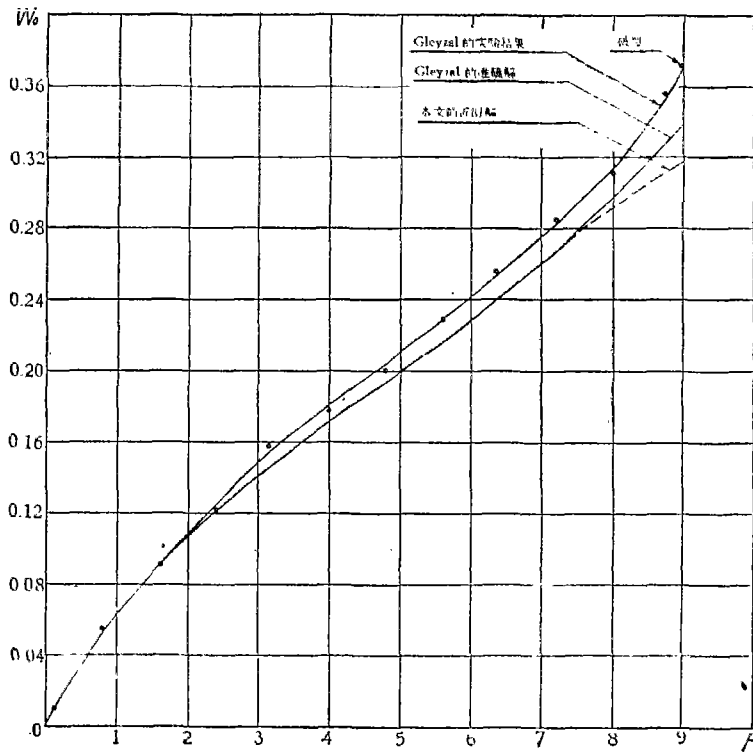


图 7.

## 参 考 文 献

- [1] 胡海昌, 论弹性体力学与受范性体力学中的一般变分原理. 物理学报, 第12卷, 第3期, 1954, 259—290.
- [2] Качанов, Л. М., Механика пластических сред, гостехиздат, 1948.
- [3] Соколовский, В. В., Теория пластичности, гостехиздат, 1950.
- [4] Gleuzal, A., Plastic deformation of a circular diaphragm under pressure, *J. appl. mech.*, 15, No. 8, 1948, 238—256.
- [5] Григорьев, А. С., Исследование работы круглой мембраны при больших прогибах за пределом упругости, *Инж. сб.*, т. 9, 1951, 99—112.
- [6] Hencky, H., Über den Spannungszustand in kreisrunden Platten mit verschwindenden Biegesteifigkeit. *Zeit. f. Math. u. Physik*, 63, 1914, 311—314.
- [7] Алексеев, С. А., Круглая плоская упругая мембрана под равномерной поперечной нагрузкой, *Инж. сб.*, т. 14, 1953, 196—198.

## ON THE VARIATIONAL PRINCIPLES OF ELASTO-PLASTIC BODY AND THEIR APPLICATIONS

SHI, PO-MING

(*Institute of Mechanics, Academia Sinica*)

Two general variational principles, similar to the generalized principles of potential energy and complementary energy in elasticity and plasticity<sup>[1]</sup>, are established for elastoplastic bodies. They contain the commonly called principles of potential energy and complementary energy as their special case respectively. For the sake of simplicity, only stress-strain relations of deformation theory are considered (the material may be ideally plastic or hardened).

The applications of the variational principles are exemplified by two problems, i. e., the elastoplastic torsion of a bar of elliptical section and of ideally plastic material and the large elastoplastic deflection of a circular membrane under uniform pressure. The comparisons of the approximate solutions obtained with available accurate solutions show good agreements.