第 1 卷 第 4 期　　力 学 学 报　　Vol. 1, No. 4
1957 年 11 月　　CHINESE JOURNAL OF MECHANICS　　November, 1957

衍射問題的一个簡化計算法*

張 厚 玫

(中国科学院力学研究所)

在衍射問題中，若有一單色球面波：

$$u=\frac{1}{r}e^{ik(r-ct)} \tag{1}$$

其中 r 为距离，$k=\frac{2\pi}{\text{波長}}$，c 为波的傳播速度，t 为时間，$i=\sqrt{-1}$，則可根据基尔霍夫公式[1]把求任一点 P 的扰动的問題化为一个求面积分的問題．后来瑪吉(Maggi)[2]，柯特勒(Kottler)[3,4]等人又証明可把这面积分化为一个綫积分，于是 P 点的扰动 u 为：

$$u=\varepsilon u_0+u'=\varepsilon\frac{1}{\overline{QP}}e^{ik(\overline{QP}-ct)}+u' \tag{2}$$

$$u'=-\frac{e^{-ikct}}{4\pi}\int_{\Gamma}\frac{(\boldsymbol{r}_0\times\boldsymbol{r}_1)\cdot\boldsymbol{t}}{r_0r_1(r_0r_1+\boldsymbol{r}_0\cdot\boldsymbol{r}_1)}e^{ik(r_0+r_1)}ds \tag{3}$$

其中 Γ 是衍射物体上的一条閉曲綫，它把物体分为(按几何光学)"亮"与"暗"兩部分．ds 为其綫段元，$\boldsymbol{t}$ 为 ds 的切綫單位矢量．$\boldsymbol{r}_0$、$\boldsymbol{r}_1$ 分别表示由光源 Q 及观察点 P 到 ds 的矢徑，其長度分别为 r_0，r_1．如果 P 点在几何暗影内則 $\varepsilon=0$；在影外則 $\varepsilon=1$．

貝克尔(Baker)与考蒲孙[4]曾由此証明了当波長很短时，几何光学为波动光学的第一級近似．本文則把他們的方法稍加改变，并进一步証明了：当波長与所考慮的距离比起来为非常小时，第二級近似为可把(3)式的綫积分化为有限个量的代数和而不需积分．这可使計算大为簡化，并且使任何形狀物体的衍射花样(diffraction pattern)都可以用簡單形狀的解表出．显然本方法对光波，超声波等的普通衍射問題是适用的．

令：

$$R=r_0+r_1 \tag{4}$$

并設 $\frac{dR}{ds}$ 只在閉曲綫 Γ 的有限个点 S_1，$S_2\cdots S_j\cdots S_N$ 上等于零，这些点对应于 $R=R_1$，$R_2\cdots R_j\cdots R_N$．引入無量綱的符号：

$$\omega=\frac{R}{R_j} \tag{5}$$

* 1957 年 6 月 5 日收到．

于是(3)式变为：

$$u' = -\frac{1}{4\pi}\int_{\Gamma}\phi(\omega)e^{ikR_j\omega}\frac{ds}{d\omega}\,d\omega \tag{6}$$

其中

$$\phi(\omega) = \frac{(\boldsymbol{r}_0\times\boldsymbol{r}_1)\cdot\boldsymbol{t}}{r_0r_1(r_0r_1+\boldsymbol{r}_0\cdot\boldsymbol{r}_1)}e^{-ikct} \tag{7}$$

$\frac{ds}{d\omega}$ 在除去 $\omega=1$ 的諸点外皆有限，所以把(6)式分成兩部分 u_1' 及 u_2'. u_2' 为在 $\omega=1$ 諸点鄰域中的积分；u_1' 則为沿諸鄰域外的綫段的积分. 若 P 点不恰在几何影的边緣上，則 $\phi(\omega)$ 有限，所以 $|\phi(\omega)|<K$；又在 u_1' 的积分区域內有 $\left|\frac{ds}{d\omega}\right|<K_2$；$K_1$, K_2 都是有限正数. 因为波長很短，即 $kR_j=\frac{2\pi}{\lambda}R_j\to\infty$，所以：

$$\left|u_1'\right| \leqslant \left|\frac{1}{4\pi}\sum_{j=1}^{N}K_1K_2\frac{1}{kR_ji}\int_{\omega_j+\varepsilon}^{\omega_{j+1}-\varepsilon}de^{ikR_j\omega}\right| \leqslant \frac{2K_1K_2}{4\pi}\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{kR_j}\to 0 \tag{8}$$

于是(6)式就变成了

$$u' = u_2' = -\frac{1}{4\pi}\sum_{j=1}^{N}\int_{\omega_j-\varepsilon}^{\omega_j+\varepsilon}\phi(\omega)\frac{ds}{d\omega}e^{ikR_j\omega}\,d\omega \tag{9}$$

在 $\omega_j-\varepsilon$ 到 $\omega_j+\varepsilon$ 区間內可写成

$$\omega = \omega_j + \frac{1}{m!}\left(\frac{d^m\omega}{ds^m}\right)_j(s-s_j)^m + \frac{1}{(m+1)!}\left(\frac{d^{m+1}\omega}{ds^{m+1}}\right)_j(s-s_j)^{m+1}+\cdots \tag{10}$$

其中 m 是大于 1 的正整数. 由上式再应用冪級数的反演定理[5]，在 $s=s_j$ 的附近可得：

$$\frac{ds}{d\omega} = \sum_{n=1}^{\infty}b_n(\omega-\omega_j)^{\frac{n}{m}-1} = \sum_{n=1}^{\infty}b_n(\omega-1)^{\frac{n}{m}-1} \tag{11}$$

系数 b_n 可由(10)(11)求出. 于是(9)式变为：

$$u' = -\frac{1}{4\pi}\sum_{j=1}^{N}\int_{\omega_j-\varepsilon}^{\omega_j+\varepsilon}\phi(\omega)e^{ikR_j\omega}\sum_{n=1}^{\infty}b_n(\omega-\omega_j)^{\frac{n}{m}-1}\,d\omega \tag{12}$$

如果我們像(8)式那样略去含 $\frac{1}{kR_j}$ 一次方以上的各項，則上式中对 $n\geqslant m$ 的諸項，显然可应用与求 u_1' 相同的方法而視为得零. 所以第二个求和号只从 $n=1$ 求到 $n=m-1$ 就可以了. 又若 $\phi(\omega)$ 連續，b_n 有限，而 $|\varepsilon|\ll 1$，則上式可写作：

$$u' = -\frac{1}{4\pi}\sum_{j=1}^{N}[\phi(\omega)]_{\omega=\omega_j}e^{ikR_j}\sum_{n=1}^{m-1}(b_n)_{\omega=\omega_j}\int_{\omega_j-\varepsilon}^{\omega_j+\varepsilon}(\omega-\omega_j)^{\frac{n}{m}-1}\cdot e^{ikR_j(\omega-\omega_j)}\,d\omega \tag{13}$$

为了便于計算再引入符号：

$$v = kR_j(\omega-\omega_j) = kR_j(\omega-1) \tag{14}$$

因为当 $\omega=1$ 时 $\frac{d\omega}{ds}=0$，所以这时变换(11)不是保角变换[这里我們認为积分(3)是在 s-复数平面內的路积分，而現在通过 ω 把它变换成在 v-复数平面內的路积分]，变换后 $R-R_j$ 处的角度將增加 m 倍. 于是可以看出式(8)至(13)的积分上下限写得不严

格．若

$$|kR_j\varepsilon| \to |\infty|, \tag{15}$$

則(13)式的积分应写作：

$$\int_{1-\varepsilon}^{(1-\varepsilon)e^{m\pi i}} (\omega-\omega_j)^{\frac{n}{m}-1} e^{ikR_j(\omega-\omega_j)} d\omega = -\frac{1}{(kR_j)^{\frac{n}{m}}} \int_{\infty}^{\infty e^{m\pi i}} e^{iv} v^{\frac{n}{m}-1} dv \tag{16}$$

这积分应当是个路积分．由(10) 及 (14)式可以看出我們已把 $s=s_j$ 的單叶鄰域变成了 $v=0$ 的 m 叶鄰域．又因为 $\frac{n}{m}<1$, 只有 $v=0$ 为極点，所以 (16) 式的路积分应当如此理解，在 v 平面上它由三部分組成：

1．由 ∞ 沿实軸积分到实軸上的一点 δ ($\delta \to +0$)．

2．沿以 $v=0$ 为圓心 δ 为半徑的圓 c 轉 $m\pi$ 角．因为 $v=0$ 为支点所以若 $m>2$ 則我們已达到黎曼曲面的另一頁了．

3．再从 $e^{m\pi i}\delta$ 沿直綫积分到 $\infty e^{m\pi i}$．

$$\text{即式(16)之积分} = \int_{\infty}^{\delta} + \int_{c(\delta)} + \int_{e^{m\pi i}\delta}^{e^{m\pi i}\infty} \tag{17}$$

我們知道第一个积分为[6]：

$$\int_{\infty}^{0} e^{iv} v^{\frac{n}{m}-1} dv = -\int_{0}^{\infty} e^{iv} v^{\frac{n}{m}-1} dv = -e^{\frac{1}{2}\frac{n}{m}\pi i} \Gamma\left(\frac{n}{m}\right), \tag{18}$$

其中 $\Gamma\left(\frac{n}{m}\right)$ 为咖馬(gamma)函数．于是(13)式变成了：

$$u' = -\frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^{N} \phi(R_j) e^{ikR_j} \sum_{n=1}^{m-1} (b_n)_j \frac{1}{(kR_j)^{\frac{n}{m}}} \left[e^{\frac{i}{2}\frac{n}{m}\pi} - (-1)^n e^{\frac{i}{2}(-1)^m \frac{n}{m}\pi}\right] \Gamma\left(\frac{n}{m}\right) \tag{19}$$

把(7)代入(19)，再利用(2)，(3)，則計算衍射問題的一組公式就可以化为：

$$\begin{cases} u = \varepsilon u_0 + u' & (20) \\ u' = -\dfrac{e^{-ikct}}{4\pi} \displaystyle\sum_{j=1}^{N} \left[\frac{(\boldsymbol{r}_0 \times \boldsymbol{r}_1)\cdot \boldsymbol{t}}{r_0 r_1 (r_0 r_1 + \boldsymbol{r}_0 \cdot \boldsymbol{r}_1)}\right]_{R=R_j} e^{ikR_j} \sum_{n=1}^{m-1} \frac{[b_n]_{R=R_j}}{(kR_j)^{\frac{n}{m}}} \left[e^{\frac{\pi}{2}\frac{n}{m}i} \right. & \\ \qquad\qquad \left. - (-1)^n e^{\frac{\pi}{2}(-1)^m \frac{n}{m} i}\right] \Gamma\left(\dfrac{n}{m}\right) & (21) \\ R_j \text{ 滿足 } \left(\dfrac{dR}{ds}\right)_{R=R_j} = \cdots = \left(\dfrac{d^{m-1}R}{ds^{m-1}}\right)_{R=R_j} = 0; \quad \left(\dfrac{d^m R}{ds^m}\right)_{R=R_j} \neq 0 & (22) \end{cases}$$

其中 u_0、R 由(2)及(1)式决定．若 P 点在几何暗影内 $\varepsilon=0$; 在影外則 $\varepsilon=1$． b_n 可由(10)及(11)定出．当然式(21)中对各个 R_j 可以有不同的 m．

在通常簡單而重要的情况下，曲綫 Γ 的形狀簡單，若对所有的 R_j 都滿足 $m=2$，則：

$$[b_1]_j = \frac{1}{\sqrt{2!\left(\frac{d^2\omega}{ds^2}\right)_{\omega=\omega_j}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{R_j}\left(\frac{d^2 R}{ds^2}\right)_{R=R_j}}} \tag{23}$$

(21)式簡化为：

$$u^{l}=-\sum_{j=1}^{N}\left[\frac{(\boldsymbol{r}_0\times\boldsymbol{r}_1)\cdot\boldsymbol{t}}{r_0r_1(r_0r_1+\boldsymbol{r}_0\cdot\boldsymbol{r}_1)}\right]_{R=R_j}\frac{e^{ikR_j+\frac{\pi}{4}i-ikct}}{\sqrt{8\pi k\left(\frac{d^2R}{ds^2}\right)_{R=R_j}}} \tag{24}$$

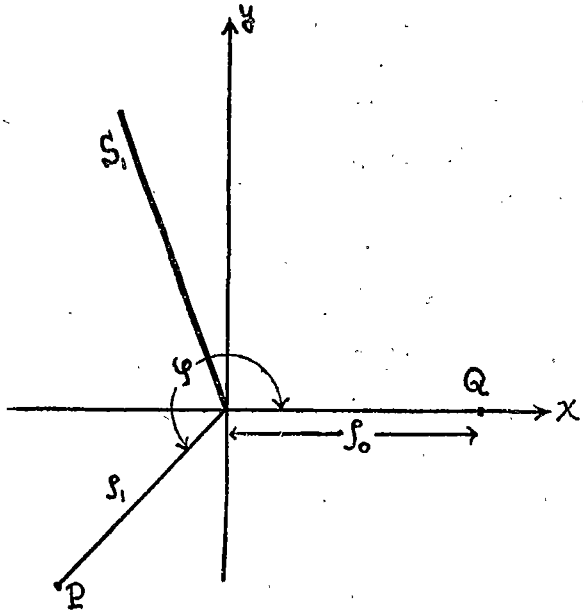
(24)中的 $\left(\frac{d^2R}{ds^2}\right)_{R=R_j}$ 还可能是正也可能是負，这要看 R_j 为極小値或極大値而定．若 $\left(\frac{d^2R}{ds^2}\right)_j=0$ 則必須用(21)去計算才成．

显然应用稳定位相法[7] (Method of Stationary phase)也很容易直接得出 (24) 式(若 $m=2$)．

堪盤(van Kampan)[8] 也曾应用稳定位相法把計算衍射問題的面积分直接化成了若干个临界点的作用之和．但它的計算較复杂，計算衍射問題也比利用本文的(24)式費事．

应　　用

1. 球面波对直边緣的衍射



設有一半無限平面 S_1，射于其上的波可被全部吸收．令其直边緣与 z 軸重合．另有一点光源 Q 置于 x 軸上，与原点 o 的距离为 ρ_0，發出單色球面波：

$$u=\frac{e^{ik(r-ct)}}{r} \tag{25}$$

今討論一点 $P(\rho_1\cos\varphi,\ \rho_1\sin\varphi,\ z_1)$ 的扰动情况．則 Q 与 P 到屏边緣任一点 $M(o,\ o,$

z)的矢徑 $\boldsymbol{r}_0$ 与 $\boldsymbol{r}_1$ 分别为：

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{r}_0 &= -\boldsymbol{i}\rho_0 + \boldsymbol{k}z \\ \boldsymbol{r}_1 &= -\boldsymbol{i}\rho_1 \cos\varphi - \boldsymbol{j}\rho_1 \sin\varphi + \boldsymbol{k}(z-z_1) \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

其中 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 为沿 x, y, z 軸的單位矢量.

令

$$\frac{dR}{dz} = \frac{z}{r_0} + \frac{z-z_1}{r_1} = 0 \tag{27}$$

設当 $\frac{dR}{dz}=0$ 时 $R=R_m$，当然为一極小值．可以看出：

$$R_m = [(\rho_0+\rho_1)^2 + z_1^2]^{\frac{1}{2}} \tag{28}$$

于是：

$$\left(\frac{d^2R}{dz^2}\right)_{R=R_m} = \left[\frac{1}{r_0} + \frac{1}{r_1} - \frac{z^2}{r_0^3} - \frac{(z-z_1)^2}{r_1^3}\right]_{R=R_m} = \frac{R_m^2 - z_1^2}{r_0 r_1 R_m} \tag{29}$$

再以 β 表示当 $R=R_m$ 时的 r_0 与 ρ_0 間的夾角，也就是光源 Q 到一点 $P'(\rho_1, 0, z)$ 的聯綫与 x 軸的夾角，則当 $R=R_m$ 时：

$$\left.\begin{aligned} r_0 &= \rho_0 \sec\beta; \\ r_1 &= \rho_1 \sec\beta; \\ z_1 &= R_m \sin\beta; \\ z(z-z_1) &= -\rho_0\rho_1 \tan^2\beta \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

把(26)，(28)，(30)代入(24)式中，得：

$$u' = \frac{-\rho_0\rho_1 \sin\varphi}{\rho_0\rho_1 \sec^2\beta(\rho_0\rho_1 \sec^2\beta + \rho_0\rho_1 \cos\varphi - \rho_0\rho_1 \tan^2\beta)} \frac{e^{i\left(kR_m+\frac{\pi}{4}\right)-ikct}}{\sqrt{8\pi k \frac{R_m(1-\sin^2\beta)}{\rho_0\rho_1 \sec^2\beta}}} =$$

$$= -\frac{e^{i\left(kR_m+\frac{\pi}{4}\right)-ikct}}{\sqrt{8\pi k \rho_0\rho_1 R_m}} \tan\frac{\varphi}{2} \tag{31}$$

这与貝克尔与考浦孙[4]由积分直接算出的近似結果完全相同.

2. 平面波对直边緣的衍射

若同上例而为一平面波沿 $-x$ 方向傳播，則显然可認为：

$$\boldsymbol{r}_0 \cdot \boldsymbol{r}_1 = -\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{r}_1 = \rho_1 \cos\varphi$$

$$(\boldsymbol{r}_0 \times \boldsymbol{r}_1)\cdot\boldsymbol{t} = (-\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{r}_1)\cdot\boldsymbol{k} = \rho_1 \sin\varphi$$

$$\left(\frac{d^2R}{ds^2}\right)_j = \left(\frac{d^2 r_1}{dz^2}\right)_j = \frac{1}{\rho_1}$$

于是

$$u' = -\frac{\tan\frac{\varphi}{2}}{\sqrt{8\pi k \rho_1}} e^{i\left(k\rho_1+\frac{\pi}{4}\right)-ikct}$$

这与考浦孙和菲尔若(Ferrar)[6] 由綫积分得出的結果完全相同.

本文承郭永怀先生看过，并承給予很多帮助和指教，作者仅在此致以衷心的謝意.

参 考 文 献

[1] Kirchhoff: Vorlesungen über Math. Physik. 2 (Optik) (Leipzig 1891).

[2] Maggi: *Annali di Mat.* (2) **16** (1888), 21—48.

[3] F. Kottler: *Ann. der Phys.* **70** (1923), 405—456.

[4] Baker and Copson: *The Math. Theory of Huygens Principle* (Oxford 1950).

[5] H. Batemen: *Higher Transcendental Functions*, 1953. Vol. 1.

[6] Copson and Ferrar: *Proc. Edin Math. Soc.* **5** (1938), 159—168.

[7] J. Focke: Asymptotische Entwicklungen mittels der Methodeder Stationaren Phase, 1954. Akad.-Verlag Berlin.

[8] N. G. van Kampan: *Physica*, **14** (1948), 575—589.

A SIMPLIFIED METHOD ON THE CALCULATION OF DIFFRACTION PROBLEMS

CHANG HOU-MEI

(*Institute of Mechanics, Academia Sinica Peking, China*)

ABSTRACT

Kottler has shown that the diffraction problem of a monochromatic spherical scalar wave can be expressed as a line-integral, instead of a Kirchhoff's surface integral. The disturbance at a point P can thus be expressed as:

$$u=\varepsilon u_0+u'=\varepsilon\frac{1}{\overline{QP}}e^{ik(\overline{QP}-ct)}+u' \tag{2}$$

$$u'=-\frac{e^{-ikct}}{4\pi}\int_\Gamma\frac{(\boldsymbol{r}_0\times\boldsymbol{r}_1)\cdot\boldsymbol{t}}{r_0r_1(r_0r_1+\boldsymbol{r}_0\cdot\boldsymbol{r}_1)}e^{ik(r_0+r_1)}ds \tag{3}$$

Where $\boldsymbol{r}_0$, $\boldsymbol{r}_1$ represent respectively the distance vectors from a point-source Q and an observing point P to the element ds of a closed curve Γ; $\varepsilon=0$ if the segment $\overline{QP}$ does not cut the surface S bounded by Γ, and $\varepsilon=1$ if it cuts S once.

It will be demonstrated in this paper that this line-integral can be reduced to a sum for which integration is not required. This can be shown in the following. It is noted that $\frac{dR}{ds}=\frac{d(r_0+r_1)}{ds}=0$ only at a finite number of points S_1, $S_2\cdots S_N$, which correspond to R_1, R_2, $\cdots R_N$. Now let $w=\frac{R}{R_j}$. The contribution of the integral in (3) will tend to zero, if S does not lie in the region $|s-s_j|\leqslant\varepsilon$, and when the wave length λ tends to zero. So we have:

$$u'=-\frac{1}{4\pi}\sum_{j=1}^{N}\int_{\omega_j-\varepsilon}^{\omega_j+\varepsilon}\phi(\omega)e^{ikR_j\omega}\frac{ds}{d\omega}e^{ikR_j\omega}d\omega. \tag{9}$$

This is a contour integral. In $|s-s_j| \leqslant \varepsilon$ if we expand $\frac{ds}{d\omega}$ in power series, we have:

$$u' = -\frac{1}{4\pi}\sum_{j=1}^{N}[\phi(\omega)]_{\omega=\omega_j} e^{ikR_j}\sum_{n=1}^{m-1}(b_n)_{\omega=\omega_j}\int_{\omega_j-\varepsilon}^{\omega_j+\varepsilon}(\omega-\omega_j)^{\frac{n}{m}-1}e^{ikR_j(\omega-\omega_j)}d\omega \qquad (13)$$

The contribution of the terms for which $n \geqslant m$, can similarly be shown to become zero, if $\frac{1}{kR_j}$ is negligible.

Let

$$v = kR_j(\omega-\omega_j) = kR_j(\omega-1) \qquad (14)$$

we note that the point of $v=0$ is a branch point in v-plane. If $\frac{dR}{ds} = \cdots\cdots = \frac{d^{m-1}R}{ds^{m-1}} = 0$ but $\frac{d^mR}{ds^m} \neq 0$, the angle at $S=S_j$ would be magnified m times. Therefore the upper and lower limit of integration should be written as:

$$\int_{1-\varepsilon}^{(1-\varepsilon)e^{m\pi i}}(\omega-\omega_j)^{\frac{n}{m}-1}e^{ikR_j(\omega-\omega_j)}d\omega = \frac{1}{(kR_j)^{\frac{n}{m}}}\int_{\infty}^{\infty e^{m\pi i}}e^{iv}v^{\frac{n}{m}-1}dv \qquad (16)$$

There is merely one pole at $v=0$. So we have:

$$u' = -\frac{1}{4\pi}\sum_{j=1}^{N}\left[\frac{(\boldsymbol{r}_0\times\boldsymbol{r}_1)\cdot\boldsymbol{t}}{r_0r_1(r_0r_1+\boldsymbol{r}_0\cdot\boldsymbol{r}_1)}\right]_{R=R_j}e^{ikR_j}\sum_{n=1}^{m-1}\frac{[b_n]_{R=R_j}}{(kR_j)^{\frac{n}{m}}}\left[e^{\frac{\pi}{2}\frac{n}{m}i} - (-1)^n e^{(-1)^m\frac{\pi}{2}\frac{n}{m}i}\right]\Gamma\left(\frac{n}{m}\right). \qquad (21)$$

This essentially solves the problems of diffraction.

In a simple but important case $m=2$, the expression (21) reduces to:

$$u' = -\sum_{j=1}^{N}\left[\frac{(\boldsymbol{r}_0\times\boldsymbol{r}_1)\cdot\boldsymbol{t}}{r_0r_1(r_0r_1+\boldsymbol{r}_0\cdot\boldsymbol{r}_1)}\right]_{R=R_j}\frac{e^{ikR_j+\frac{\pi}{4}i-ik c t}}{\sqrt{8\pi k\left(\frac{d^2R}{ds^2}\right)_{R=R_j}}} \qquad (24)$$

Two examples will be given:

1. The diffraction of spherical waves by a "black" half-plane. Let z-axis be its straight edge (Fig. 1), from (24) we have:

$$u' = \frac{e^{i\left(kR_m+\frac{\pi}{4}\right)-ik c t}}{\sqrt{8\pi k\rho_0\rho_1R_m}}\tan\frac{\varphi}{2} \qquad (31)$$

where R_m is the minimum of the value (r_0+r_1).

2. Diffraction of plane waves by a "black" half-plane. For this problem, it is shown

$$u' = -\frac{\tan\frac{\varphi}{2}}{\sqrt{8\pi k\rho_1}}e^{i\left(k\rho_1+\frac{\pi}{4}\right)+ik c t}.$$

Both of the above results agree with other theoretical calculations, but the present method is believed to be simpler.