第1卷 第4期 力学学报 Vol 1, No. 4
1957年11月 CHINESE JOURNAL OF MECHANICS November, 1957

远程星际航行*

錢學森

(中国科学院力学研究所)

有了火箭技术在近十几年来的發展，人們現在已經認为完全有可能到太陽系的行星或衛星上去旅行．但是要到另外一个太陽系，要到另外一个恒星上去，那是另外一回事，那是科学技术的更高的一个阶段．这里的問題是恒星間的距离太大：就是到离我們最近的星、半人馬座比鄰星也要4.2光年，或約40万亿公里；到肉眼能看到的最近的星、天狼星就更远，要8.6光年，或約82万亿公里．所以即使我們用20公里/秒的速度来航行，这差不多是現在火箭技术可能达到的最高速度了，然而到半人馬座比鄰星还需要6万多年，到天狼星就要約12万年．这些航行时間比起人的寿命来是太長久了，所以到恒星去旅行还不是現有的科学技术所能做到的．但这并不阻碍我們研究到恒星上的条件，也就是研究在一定条件下远程星际船可能有的性能．这也就是本文的目的．

推进剂問題

其实这个远程星际航行必須要以接近光速的速度航行才够快；但是要达到接近于光的速度，非把火箭的噴气速度也加到接近于光速不可，这就需要超强度的核子推进剂．如果w是噴气速度，c是光速，ε是推进剂在"燃燒"过程中質量轉化[1)]为动能的部分．假如我們不計質量轉化为热能的部分，那么$(1-\varepsilon)$是推进剂質量留在噴气中的部分，利用相对論里的能量定律就得到

$$\varepsilon c^2=\left[\frac{(1-\varepsilon)}{\left(1-\frac{w^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}}-(1-\varepsilon)\right]c^2 \tag{1}$$

因此，

$$\varepsilon=1-\left(1-\frac{w^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{2}$$

所以当噴气速度w很小的时候，正如我們所想見，$\varepsilon\simeq\frac{1}{2}\frac{w^2}{c^2}$；而当噴气速度是等于光速的时候，$\varepsilon=1$，也就是全部質量轉化为动能，这就是光子火箭了．在其他情况下，ε

* 1957年1月9日收到.

1) 关于这样提法是否恰当問題請看附录.

和 $\frac{w}{c}$ 的关系見圖1. 当 $\frac{w}{c}=\frac{1}{2}$，也就是当噴气速度是光速的一半的时候，ε 就差不多是14%，也就是推进剂質量的14%必須轉化为动能，这要求远远超过現有的核子燃料所能做到的程度. 所以要实現恒星旅行或远程星际航行，我們还有待于超强度的核子燃料.

可是如果能够得到接近光速的噴气速度，因而可以达到接近光速的航行速度，那么就有重要的相对論上的效果. 例如，如果 V 是星际船的航行速度，T^0 是一个固定于地球的坐标系統里的时間，T 是一个固定于星际船的坐标系統里的时間. 换言之，T^0 是地球上的时間，而 T 是星际船里的时間. 那么依照相对論定理，$T\leqslant T^0$，而其关系是

$$T=T^0\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{3}$$

因此，如果 $V=0.9c$，那么 T 只有 T^0 的43.5%. 其它的情况在圖1中表示出来，当 V 越接近于 c，在星际船里的生活时間就越显得短.

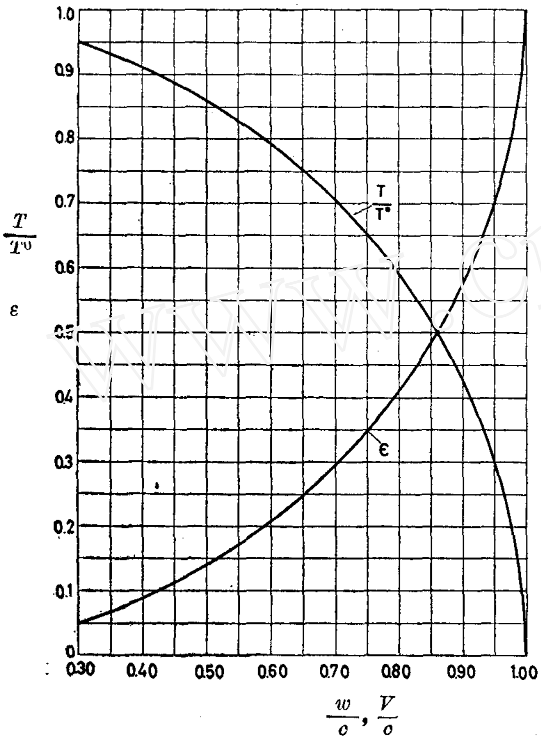

圖1. 推进剂質量轉化为能部分 ε 与噴气速度 w 的关系；两个时間的比率 $\frac{T}{T^0}$ 与航行速度 V 的关系. c 是光速.

匀加速度运动

如果我們用( )^0 来代表固定于地球的坐标系統里的各个量，用( )来代表固定于星际船的坐标系統里的各个量；例如 u^0 是星际船对地球来說的速度，u 是星际船对星际船来說的速度，所以 $u=0$. a^0 是星际船对地球来的加速度，a 就是星际船里面的人所感到的加速度，那么

$$a^0=\left(1-\frac{u^{02}}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}a \tag{4}$$

令 t^0 代表地球上的时間，t 就是星际船里的时間，那么

$$a^0=\frac{du^0}{dt^0}=\frac{du^0}{dt}\frac{dt}{dt^0}=\frac{du^0}{dt}\left(1-\frac{u^{02}}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{5}$$

所以从(4)和(5)公式得出

$$dt=\frac{1}{a}\frac{du^0}{1-\frac{u^{02}}{c^2}} \tag{6}$$

如果我們把火箭推进机設計得使星际船里人所覺得的加速度 a 是不变的，那么把（6）式积分就很容易地得出計算星际船里的人所感到的加速时間 T_a，

$$\frac{a}{c}T_a=\frac{1}{2}\ln\frac{1+\dfrac{V}{c}}{1-\dfrac{V}{c}} \tag{7}$$

这个关系在圖 2 里表示出来.

（5）公式也可以换写作

$$a^0=\frac{du^0}{dx^0}\frac{dx^0}{dt^0}=\frac{c^2}{2}\frac{d}{dx^0}\left(\frac{u^{0^2}}{c^2}\right) \tag{8}$$

x^0 就是从地球上看来星际船所走的距离. 把（4）式和（8）式結合起来就得到

$$\frac{adx^0}{c^2}=\frac{1}{2}\frac{d(u^{0^2}/c^2)}{\left(1-\dfrac{u^{0^2}}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \tag{9}$$

当加速时終了的时候，$u^0=V$. 如果 x_a^0 代表在均匀加速过程中，星际船所走的距离，那么由（9）公式积分得出

$$\frac{ax_a^0}{c^2}=\frac{1}{\left(1-\dfrac{V^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}}-1 \tag{10}$$

这个关系也在圖 2 表示出来.

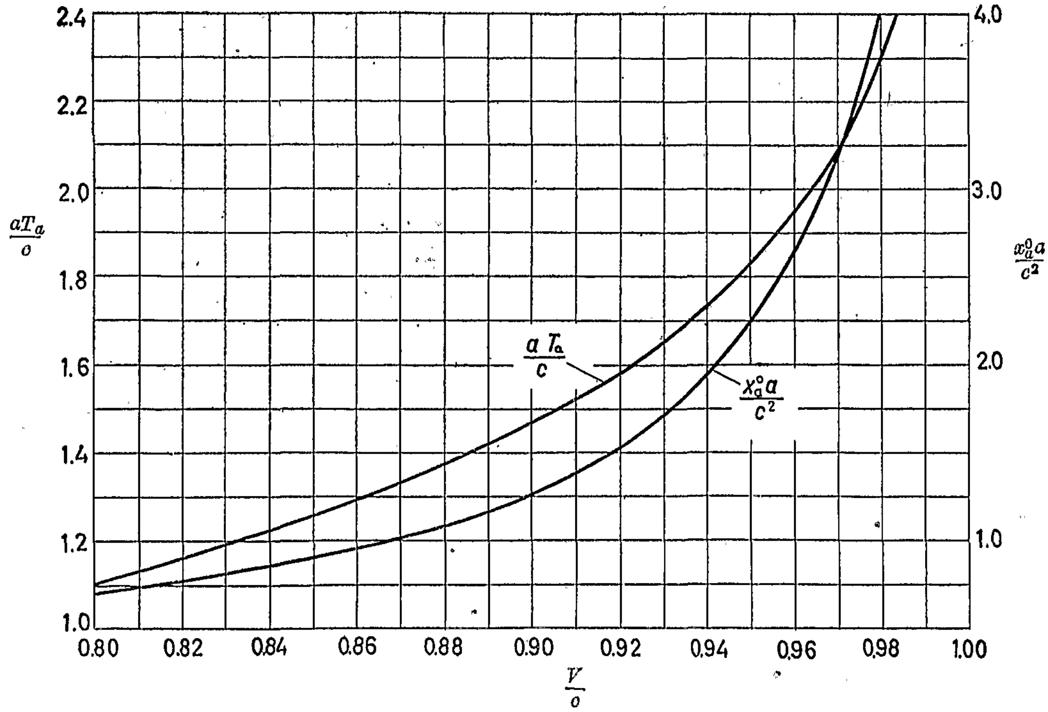

圖 2. 匀加速度运动. a 是加速度，c 是光速，T_a 是星际船里的加速时間，x_a^0 是加速过程中所走的距离，V 是終了速度(最大速度).

推进剂的重量比

推进剂在星际船总重量中所占的比率是 J. 阿克莱 (文献 1) 早就算出来了. 如果 M^0 是星际船在速度等于 u^0 时候的静質量, M_1^0 是星际船起飞时候 ($u^0=0$) 的静質量, 那么阿克莱給出

$$\frac{M^0(u^0)}{M_1^0}=\left(\frac{1-\frac{u^0}{c}}{1+\frac{u^0}{c}}\right)^{\frac{c}{2w}} \tag{11}$$

当火箭作用停止的时候, M^0 也就是終了静質量 M_2^0, V_{u^0} 是星际船的速度 $u^0=V$, 因此就由 (11) 得出静質量比 ν 为

$$\frac{1}{\nu}=\frac{M_2^0}{M_1^0}=\left(\frac{1-\frac{V}{c}}{1+\frac{V}{c}}\right)^{\frac{c}{2w}} \tag{12}$$

自然, $(M_1^0-M_2^0)$ 是在起飞时候星际船里所藏的推进剂質量, 所以如果 μ 是推进剂重量在起飞总重量所占的比率, 那么依照 (12) 公式,

$$\mu=(M_1^0-M_2^0)/M_1^0=1-\frac{1}{\nu} \tag{13}$$

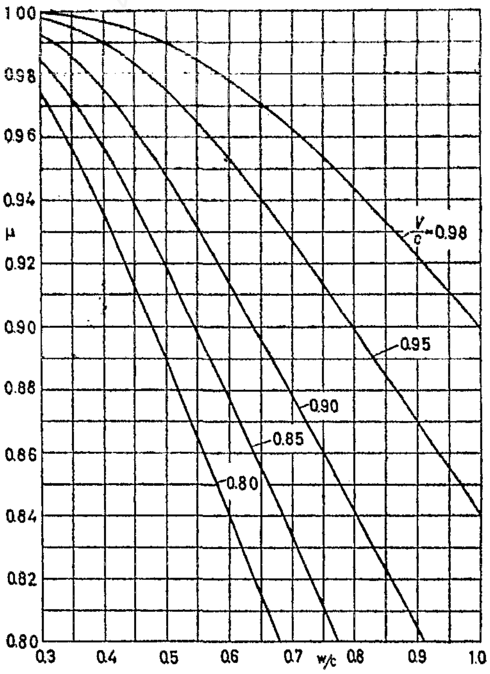

圖 3. 推进剂重量比 μ 与終了速度 V 及噴气速度的关系.

圖 3 把 μ 和 $\frac{V}{c}$ 以及 $\frac{w}{c}$ 的关系表示出来. 因为即使引用多級火箭的原理, 推进剂总重量在起飞时候也不宜占全重的 98% 以上, 由圖 3 就立刻可以看出来要接近光速非把噴气速度也提到半倍光速以上不可.

变加速度运动

現在讓我們来算一算火箭推进剂消耗率和加速度的关系. 我們可以先把 (11) 公式对数微分而得到

$$-\frac{dM^0}{M^0}=\frac{du^0}{w\left(1-\frac{u^{0^2}}{c^2}\right)} \tag{14}$$

但是 dM^0 的質量是静質量, 在星际船里的人看来就要大些, 是 $dM^0\Big/\left(1-\frac{u^{0^2}}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}$. 因此星际船里的工程师看来, 推进剂的消耗率是 $\dot{m}$, 也就是

$$\dot{m}=-\frac{dM^0}{dt}\frac{1}{\left(1-\frac{u^{0^2}}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}}=-\frac{dM^0}{dt^0}\frac{1}{\left(1-\frac{u^{0^2}}{c^2}\right)} \tag{15}$$

把这个公式和(14)公式結合起来，我們就得到

$$a^0=\frac{w\dot{m}}{M^0}\left(1-\frac{u^{0^2}}{c^2}\right)^2 \tag{16}$$

再引用(4)公式，我們就得出星际船里所感到的加速度 a 和推进剂消耗率 $\dot{m}$ 間的关系：

$$a=\frac{w\dot{m}}{M^0}\left(1-\frac{u^{0^2}}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{17}$$

很可以想像，为了使一定的机器正常地运轉，推进剂的消耗率必須保持不变，那么由(17)公式我們可以看出来加速度 a 的变化．要 $\dot{m}$ 不变，a 就得变，运动也就成为变加速度的．如果 a_1 表示起飞时候的加速度，a_2 是終了时候在星际船里的人所感到的加速度，那么依照(17)公式和(12)公式，

$$a_1/a_2=(M_2^0/M_1^0)\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}=\left(\frac{1-\frac{V}{c}}{1+\frac{V}{c}}\right)^{\frac{c}{2w}}\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \tag{18}$$

这个关系我們用圖4表示出来．我們可以看到：由于起飞时候的質量大，初始加速度要比終了加速度小得多，而尤其是当 ν 很大的时候．所以如果我們因为限于人的生理条件，不能把最大的加速度 a_2 用得太大，那么 a_1 就会太小，因而大大地延長了加速度时間．不过在这种情况下，由于結構設計上的限制，我們必須用多級火箭的原理，这也使得我們能适当地改变每級火箭的推进剂消耗率，使得每級火箭的加速度变化不大．自然，当級数多的时候，这样做就使得运动接近于匀加速度运动．

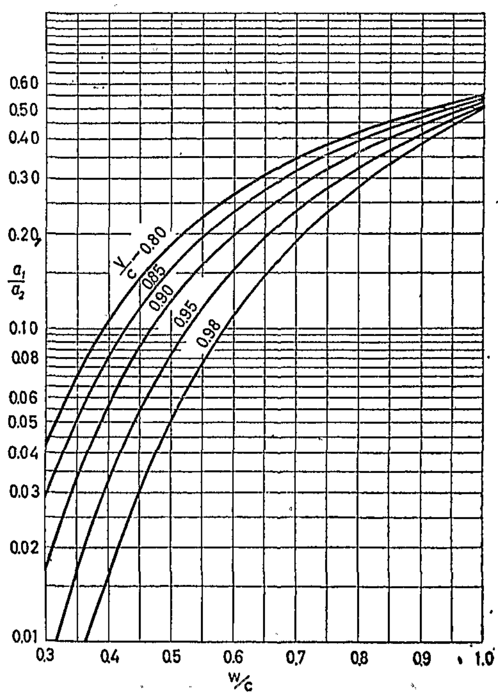

圖4．在一定推进剂消耗率条件下的初始加速度 a_1 和終了加速度 a_2 的比率．V 是終了速度，w 是噴气速度，c 是光速．

由(16)公式我們知道

$$a^0=\frac{du^0}{dt^0}=\frac{du^0}{dt}\left(1-\frac{u^{0^2}}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\frac{w\dot{m}}{M^0}\left(1-\frac{u^{0^2}}{c^2}\right)^2 \tag{19}$$

利用(11)公式，就可以得到

$$dt=\frac{M^0}{w\dot{m}}\left(1-\frac{u^{0^2}}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}}du^0=\frac{M_1^0}{w\dot{m}}\left(\frac{1-\frac{u^0}{c}}{1+\frac{u^0}{c}}\right)^{\frac{c}{2w}}\left(1-\frac{u^{0^2}}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}}du^0 \tag{20}$$

如果像前面所說的一样，$\dot{m}$ 保持不变，那么在星际船里的加速时間 T_a 是可以由(20)积分得到的，

$$\frac{w\dot{m}T_a}{M_1^0 c}=\int_0^{\frac{V}{c}}(1-\xi)^{\frac{c}{2w}-\frac{3}{2}}(1+\xi)^{-\left(\frac{c}{2w}+\frac{3}{2}\right)}d\xi \tag{21}$$

我們也可以用(17)公式来把这个方程写作一个更有用的形式，那就是

$$\frac{a_2T_a}{c}=\nu\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}\int_0^{\frac{V}{c}}(1-\xi)^{\frac{c}{2w}-\frac{3}{2}}(1+\xi)^{-\left(\frac{c}{2w}+\frac{3}{2}\right)}d\xi \tag{22}$$

当 $\frac{w}{c}=1$ 的时候，$\frac{c}{2w}=\frac{1}{2}$，(22)式中的积分很容易地算出为

$$\frac{a_2T_a}{c}=\frac{\nu}{2}\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left[1-\frac{1}{1+\frac{V}{c}}+\frac{1}{2}\ln\frac{1+\frac{V}{c}}{1-\frac{V}{c}}\right] \tag{23}$$

同样地，当 $\frac{w}{c}=\frac{1}{2}$ 的时候，$\frac{c}{2w}=1$，我們得出

$$\frac{a_2T_a}{c}=\frac{\nu}{3}\left[2\left\{\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{1+\frac{V}{c}}\right\}+\frac{V}{c}\right] \tag{24}$$

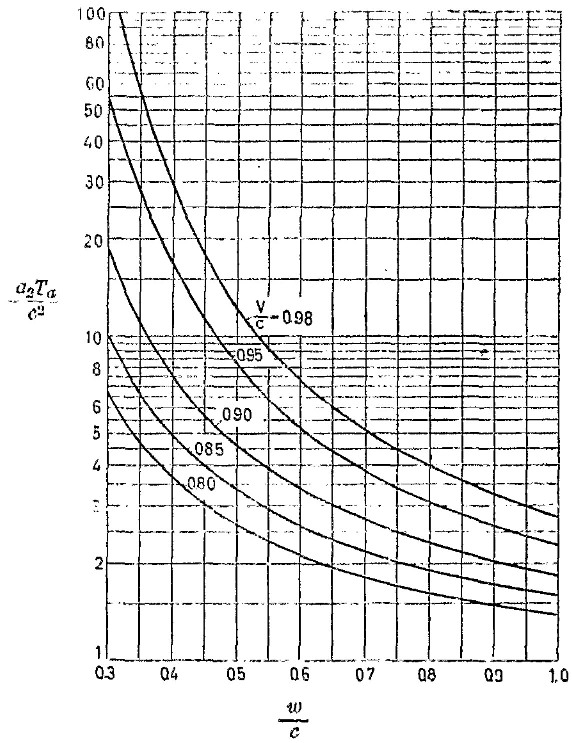

图 5. 在一定推进剂消耗率条件下的加速时間 T_a (在星际船里的)，a_2 是終了(最大)加速度，V 是終了速度，w 是噴气速度，c 是光速.

再当 $\frac{w}{c}=\frac{1}{4}$, $\frac{c}{2w}=2$ 时，我們得到

$$\frac{a_2 T_a}{c}=\frac{\nu}{5}\left[\frac{4}{3}\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{2}{3}\frac{1}{1+\frac{V}{c}}-2\frac{1-\frac{V}{c}}{\left(1+\frac{V}{c}\right)^2}-\frac{1}{3}\frac{V}{c}\right] \tag{25}$$

这些公式的結果都在圖 5 中描写出来.

最后，我們可以把（8）和（19）兩公式結合起来，再引用（11）公式就能計算星际船在 $\dot{m}$ 保持不变条件下的加速距离 x_a^0. 这个公式是

$$\frac{a_2 x_a^0}{c^2}=\nu\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}\int_0^{\frac{V}{c}}\left(\frac{1-\xi}{1+\xi}\right)^{\frac{c}{2w}}\frac{\xi\,d\xi}{(1-\xi^2)^2} \tag{26}$$

当 $\frac{w}{c}=1$ 的时候，$\frac{c}{2w}=\frac{1}{2}$，我們有

$$\frac{a_2 x_a^0}{c^2}=\frac{1}{3}\left[\left(\frac{1+\frac{V}{c}}{1-\frac{V}{c}}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{V}{c}-\left(1+\frac{V}{c}\right)+\frac{1}{\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}}\right] \tag{27}$$

当 $\frac{w}{c}=\frac{1}{2}$, $\frac{c}{2w}=1$ 的时候，相应地

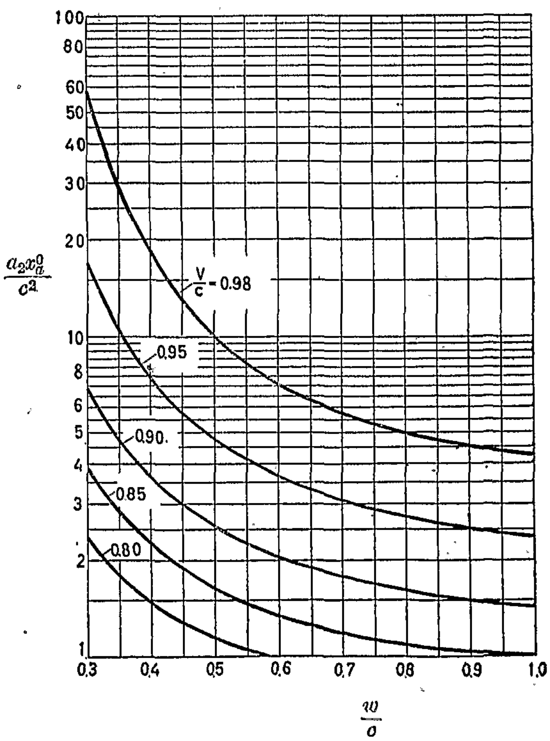

圖 6. 在一定推进剂消耗率条件下的加速过程中所走的距离 x_a^0, a_2 是終了（最大）加速度，V 是終了速度，w 是噴气速度，c 是光速.

$$\frac{a_2 x_a^0}{c^2}=\frac{1}{4}\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{1-\frac{V}{c}}\left\{\frac{1}{1+\frac{V}{c}}-1\right\}+\frac{1}{2}\left(\frac{1+\frac{V}{c}}{1-\frac{V}{c}}\right)\ln\left(\frac{1+\frac{V}{c}}{1-\frac{V}{c}}\right)\right] \tag{28}$$

而当 $\frac{w}{c}=\frac{1}{4}$, $\frac{c}{2w}=2$ 时，我們得出

$$\frac{a_2 x_a^0}{c^2}=\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1+\frac{V}{c}}{1-\frac{V}{c}}\right)^2\left[\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\frac{1}{\left(1+\frac{V}{c}\right)^2}+\frac{1}{3}\frac{1}{\left(1+\frac{V}{c}\right)^3}\right] \tag{29}$$

这些公式的結果在圖 6 中划出来.

实例

有了上面的这些計算，我們就能很容易地計算出远程星际船的性能. 現在讓我們举兩个实例：第一个是到半人馬比鄰星的星际船. 这星距地球有 4.2 光年，我們設想星际船的最高速度是 0.80 倍光速，$\frac{V}{c}=0.8$，而 $\frac{w}{c}=0.6$. 我們从圖 3 得出 $\mu=0.8396$，也就是要达到这最高速度需要的推进剂重量占起飞重量的 83.96%，机器、結構、人員等占 16.04%. 这是有可能做到的. 不过到达比鄰星的时候，星际船的速度还要减为零才行. 所以我們的星际船其实是一个兩級火箭，当减速开始的时候我們把第一級火箭的空壳抛去，只有第二級火箭到比鄰星上去. 从圖 4 我們得出初始加速度和終了加速度的比 $\frac{a_1}{a_2}$ 为 0.267；从圖 6 我們得出 $\frac{a_2 x_a^0}{c^2}$ 的值为 0.96，因此，如果我們設想最大加速度是 $a_2=2000$ 厘米/秒^2（差不多是地面加速度的兩倍），那么

$$\frac{x_a^0}{c}=\frac{0.96\times3\times10^7}{2000}\text{秒}=0.456\text{年} \tag{30}$$

这也就是說在加速度过程中，星际船已經走了 0.456 光年. 如果减速过程完全同加速过程相似，那么减速中也走 0.456 光年，而一共走 0.912 光年. 因此，用最高速度走的一段是 $4.2-0.912=3.3$ 光年，而所用的时間就是 $T^0=\frac{3.3}{0.8}$ 年. 但是依照圖 1，$\frac{T}{T^0}=0.6$，所以在星际船上的时間是 $T=0.6\times\frac{3.3}{0.8}=2.47$ 年. 依照圖 5，$\frac{a_2 T_a}{c}=2.11$，因此在星际船上所感到的加速时間 T_a 是由下式来算，

$$T_a=\frac{2.11\times3\times10^{10}}{2000}\text{秒}=1.004\text{年} \tag{31}$$

减速过程也要用同一样的时間，所以一共是 2 年. 这再加上等速航行的一段时間，全航程时間是 4.5 年，也就是在星际船上的人感到要等待 4.5 年才能到达半人馬座比鄰星.

第二个例子是到天狼星去的星际船. 地球离天狼星有 8.6 光年，我們設想 $\frac{w}{c}=$

0.6，但最高速度加到 $\frac{V}{c}=0.94$，这样就不可用兩級火箭而必需用很多級的火箭，所以我們可以近似地認它为匀加速的火箭．从圖 2 中，我們得出 $\frac{ax_a^0}{c^2}=1.94$，所以如果我們仍然用 $a=2000$ 厘米/秒^2，那么

$$\frac{x_a^0}{c}=\frac{1.94\times 3\times 10^{10}}{2000}\text{秒}=0.923\text{年} \tag{32}$$

也就是加速过程中星际船走了 0.923 光年．减速过程也是如此，所以一共走 1.846 光年．剩下来的距离是 $8.6-1.846=6.755$ 光年．用 0.94 倍光速来走这段距离要用 $\frac{6.755}{0.94}$ 年，但是在星际船上的时間要短許多，照圖 1，$T=0.341\times\frac{6.755}{0.94}=2.450$ 年．用圖 2 我們知道 $\frac{aT_a}{c}$ 是 1.732，所以

$$T_a=\frac{1.732\times 3\times 10^{10}}{2000}\text{秒}=0.823\text{年} \tag{33}$$

但是减速也要用 0.823 年，所以航行总时間在星际旅行者們看来是 4.1 年．

文　献

[1] J. Ackeret: Helvetica Physica Acta, 19 卷 103 頁 (1946).

附　录

有人是反对質量轉化为能量这种提法的．他們的理由是：質量如果轉化为能量，那么是不是就等于說、質量消灭了而能量又憑空生出来了呢？如果是的話，那么是不是物質消灭了呢？物質消灭了的說法是唯心主义的，所以这种質量轉化为能量的提法也是唯心主义的，是不正确的．他們認为正确的提法是：在燃燒的过程中有动能产生，而这动能所联系的質量是推进剂質量的 ε 部分．他們認为没有什么質量变能量的事；在变化前的总質量和变化后的总質量没有什么兩样，在变化前的总能量和变化后的总能量也没有什么兩样；質量是守恒的，能量也是守恒的．而爱因斯坦的著名公式是質量和能量的联系公式．

我不同意这种看法．我認为爱因斯坦的公式不但指出質量和能量是联系着的，而且它指出質量和能量是不可分割的，是一体，不是兩件东西，是一件东西，是一个“質能量”．天下根本不存在没有能量的質量，也不存在没有質量的能量．但是質能量有它的兩面：有質的一面，也有能的一面．这就像一个杯子有向陽的一面，也有向陰的一面，陰陽兩面其实都是杯子，是分不开的．当我們說質量轉化为能量的时候，我們的意思是：質能量的質的一面轉化为質能量的能的一面．就好像把杯子轉个向，使向陽的变成向陰的一样．这里完全没有什么消灭了，什么生出了的意思；既然是一个东西，怎么能分辨消灭和生出呢？

当然，我們也应該說明：質量和能量分別守恒的看法是有缺点的，缺点是这个提法过分强調了“不变”，說質量并没有变成能量，能量也不会变成質量．但是实际上，是不是什么都没有“变”呢？自然不是的，事实是有着活生生的变化的，所以过分强調不变也就脱离了事实．其实这里的困难是不肯引入“質能量”这一个新概念的原故，想一面保留古老的質量和能量互不相干的看法，而一面又要照顧爱因斯坦公式，結果就有点弄到牽强生硬，有点机械．

INTERSTELLAR ASTRONAUTICS

TSIEN HSUE-SHEN

(*Institute of Mechanics, Academia Sinica*)

ABSTRACT

The problem of rocket travel to other suns of the space with relativistic speeds is studied. Here the mass equivalent of the energy liberated in the propellant of the rocket motor must be an appreciable fraction of the original mass of the propellant. This is a requirement not met by the presently available nuclear fuel and points the direction for further research before actual travel to distant stars can be realized. Assuming the availability of such superfuel, the paper gives formula for calculating the time of acceleration or deceleration and the distance travelled during acceleration or deceleration and other characteristics as functions of various parameters such as final speed, exhaust velocity etc. Fig. 2 gives the time T_a of uniform acceleration or deceleration for the occupients of the spaceship and the distance x_a^0 in space travelled during these periods as functions of the final velocity V and the uniform acceleration or the uniform deceleration a felt by the occupients of the spaceship, c being the velocity of light. Fig. 4 gives the fractions μ of propellant loading required to accelerate to various final velocity V as functions of the exhaust velocity w. Fig. 4 gives the ratio of initial acceleration a_1 and final acceleration a_2 of a spaceship with a rocket engine "burning" at a constant rate from the point of view of the occupients of the spaceship. Fig. 5 and 6 give respectively the time T_a for occupients of the spaceship for acceleration and the distance x_a^0 travelled during acceleration as functions of final acceleration a_2 felt by the occupients of the spaceship, final velocity V and the exhaust velocity w. Numerical calculation shows that for travel to Sirius, a star at a distance of 8.6 light years from the earth, acceleration to $V=0.94c$ with $w=0.6c$ and at the uniform rate of 2 m/sec^2 with respect to the occupients would require $T_a=0.823$ years and an equal time for deceleration. The time for travel at uniform speed of $V=0.94c$ is 2.450 years from the point of view of the occupients of the spaceship. To them then, the total travel time to Sirius is 4.1 years.