

表面曲率对边界层的影响与边界层 外缘附近的连结问题*

潘 良 儒

(中国科学院力学研究所)

摘 要

利用一种严格的边界层外缘条件重新计算了不可压缩非粘性流体绕二维曲面的运动, 求出曲度对表面剪力与速度剖面的影响. 墨菲曾首次研究此题, 其结果与本文的结果比较, 在质与量上均有出入, 因此说明如何准确选择边界层与势流对此类问题的重要性.

结果还表明凸面曲度使表面剪应力较平面的剪应力小, 也使边界层内的速度比平面的小. 反之, 凹面曲度使表面剪应力较平面的大, 也使边界层的速度比平面的大. 又曲度对表面剪应力的影响小, 对速度剖面影响大.

引 言

物体的表面曲率对边界层具有影响. 影响二维边界层的是物体的纵向表面曲率 h , 在轴对称边界层中有影响的是纵向表面曲率与横向表面曲率, 本文只讨论纵向表面曲率对二维边界层的影响, 设 σ 与 $\frac{dh}{dx}$ 各自代表边界层的厚度与曲率沿表面的梯度. 若 σh 及 $\sigma^2 \frac{dh}{dx}$ 与单位量比较起来是很小的话, 曲率是可以忽略的, 假如 σh 同 $\sigma^2 \frac{dh}{dx}$ 与单位量同级或比较起来不太小的话, 表面曲率就显得重要了. 本文目的之一是分析曲率究竟对边界层有些什么影响. 通常边界层的问题都是根据普朗脱 (Prandtl) 的边界层理论来计算的, 但普朗脱的理论只能应用到边界层很薄与边界层以外的流 (以下简称外流) 在边界层外缘附近变化不太大的情况, 但是在厚边界层与外流在边界层外缘附近变化大的情况下还没有清楚的理论. 因此有些作者仍用普朗脱理论来计算这一类的问题, 曾碰到数学上极大的困难, 其结果也往往不正确, 郭永怀先生同本文作者在文献^[1]中曾讨论过关于厚边界层与其有旋外流连结的问题, 因此本文目的之二是借研究表面曲率对边界层的影响来进一步阐明边界层一些理论, 也就是要说明边界层与外流的连结问题, 墨菲 (James s. Murphy)^[2] 已研究过中曲率与高曲率对不可压缩流体绕曲面的

* 1957年6月收到.

本文解析解及数值解系由中国科学院力学研究所陈小仲, 袁志辉, 贾玉芳, 郭雅君等同志计算, 特此表示衷心的感谢.

边界层的影响。令 A 为常数, $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{R}}$, $R =$ 雷诺数, 他假设曲度 $K = \frac{A}{\varepsilon\sqrt{x}}$, 表面压力梯度 $P_w = 0$, 用比较量级大小的分析的方法加上表面曲率的影响, 得出运动方程; 再根据 $P_w = 0$ 的条件, 用无旋条件得出外流速度在表面附近的分布, 然后用在边界层边缘某点的速度与速度梯度同外流在该点的速度与速度梯度相等作为边界层的外边界条件, 其余的边界条件是表面速度为零, 本文作者认为上面墨菲的外边界条件在理论上欠正确。本文为了建立如何来连结高表面曲率的边界层与其外流的理论起见, 重新计算墨菲在文献[2]中所提出的题目, 以作为比较。由于外边界的困难, 墨菲未能获得表面剪应力的分析解, 利用本文建议的外流与边界层连结方法, 可以求出其级数解。至于边界层速度分布与墨菲的也大有差异, 由于本文所讨论的题目局限于一特殊的曲面与表面压力梯度为零, 很难作一个满足上面两个同样条件的实验来证明理论推算的结果。本文作者拟另文计算任意曲面与任意表面压力分布的边界层问题, 以期能用实验证明理论, 或应用到机翼或叶栅设计方面。

运 动 方 程

如图 1 所示, 墨菲所处理的题目是一不可压缩粘性流体绕二维曲面的定常运动, 为方便起见, 可采用曲坐标, 取驻点 O 为原点, X' 为沿曲面距驻点的距离, Y' 是距表面的距离, 表面曲率是一连续函数 $k'(m)$, 正值代表凸面, 负值代表凹面, 那么适合于本题目的运动方程是^[3]:

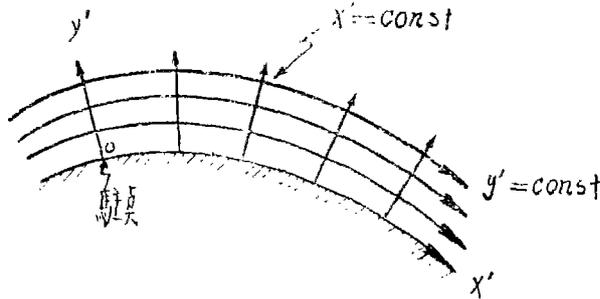


图 1. 绕任意柱面的二维运动坐标

$$\frac{1}{1+k'y'} u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} + \frac{k'u'v'}{1+k'y'} = -\frac{1}{\rho'} \frac{\partial p'}{\partial x'} +$$

$$+ \nu \left[\frac{1}{(1+k'y')^2} \frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} - \frac{y'}{(1+k'y')^3} \frac{\partial k'}{\partial x'} \frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{k'}{1+k'y'} \frac{\partial u'}{\partial y'} - \right.$$

$$\left. - \frac{k'^2 u'}{(1+k'y')^2} + \frac{2k'}{(1+k'y')^2} \frac{\partial v'}{\partial x'} + \frac{v'}{(1+k'y')^3} \frac{\partial k'}{\partial x'} \right]. \quad (1.1)$$

$$\frac{1}{1+k'y'} u' \frac{\partial v'}{\partial x'} + v' \frac{\partial v'}{\partial y'} - \frac{kv'^2}{1+k'y'} = -\frac{1}{\rho'} \frac{\partial p'}{\partial y'} + \nu \left[\frac{1}{(1+k'y')^2} \frac{\partial^2 v'}{\partial x'^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 v'}{\partial y'^2} - \frac{y'}{(1+k'y')^3} \frac{\partial k'}{\partial x'} \frac{\partial v'}{\partial x'} + \frac{k'}{1+k'y'} \frac{\partial v'}{\partial y'} - \frac{k'^2 v'}{(1+k'y')^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{u'}{(1+k'y')^3} \frac{\partial k'}{\partial x'} - \frac{2k'}{(1+k'y')^2} \frac{\partial u'}{\partial x'} \right]. \quad (1.2)$$

連續方程式是:

$$\frac{\partial w'}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial y'} [(1+k'y')v'] = 0 \quad (1.3)$$

設 U_0 及 L 分別代表在任何流中应当考慮的特征速度及長度。那麼為了使上列各式無量綱化, 引進下列一組參數:

$$\left. \begin{aligned} w' &= \frac{u}{U_0}, & v' &= \frac{v}{U_0}, \\ y' &= \frac{y}{L}, & x' &= \frac{x}{L} \\ K' &= KL, & P' &= \frac{P}{\rho u_0^2} \\ \text{雷諾數} &= R = \frac{\rho U_0 L}{\mu} = \frac{1}{\varepsilon^3} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

則運動方程可化為:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+ky} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{kuv}{1+ky} = -\frac{1}{1+ky} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{R} \left[\frac{1}{(1+ky)^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \right. \\ \left. - \frac{y}{(1+ky)^3} \frac{\partial k}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{k}{1+ky} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{k^2 u}{(1+ky)^2} + \right. \\ \left. + \frac{2k}{(1+ky)^2} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{v}{(1+ky)^3} \frac{\partial k}{\partial x} \right]. \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+ky} u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{kv^2}{1+ky} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{R} \left[\frac{1}{(1+ky)^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \right. \\ \left. - \frac{y}{(1+ky)^3} \frac{\partial k}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{k}{1+ky} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{k^2 v}{(1+ky)^2} - \right. \\ \left. - \frac{u}{(1+ky)^3} \frac{\partial k}{\partial x} - \frac{2k}{(1+ky)^2} \frac{\partial u}{\partial x} \right]. \end{aligned} \quad (3.2)$$

連續方程式為:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} [(1+ky)v] = 0. \quad (3.3)$$

邊界層運動方程

解上面非綫性方程組顯然是極端困難的, 蒲蘭脫首次用比較各物理量絕對值大小的方法來簡化了納威爾·斯陀克斯 (Navier Stokes) 方程, 這就是習用的邊界層方程組, 本題同樣的用絕對值大小分析法求邊界層運動方程組。根據蒲蘭脫理論, 在邊界層中可以作如下的假定:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} = o\left(\frac{1}{\varepsilon}\right), & \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = o\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right) \\ u = o(1), & \quad \frac{\partial u}{\partial x} = o(1) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = o(1); & \quad \frac{\partial p}{\partial x} = o(1) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

設表面曲率很大, 但 $\frac{\partial k}{\partial x}$ 不大于 $\frac{1}{\varepsilon}$ 級, 即

$$\left. \begin{aligned} k &= o\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \\ \frac{dk}{dx} &\neq o\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

墨非根据連續公式(3.3)与(5)式中的假定計算出边界層的法綫速度 v 是 ε 級, 即

$$v = o(\varepsilon) \quad (6)$$

將(4)、(5)及(6)式中各物理量的絕對值大小代入(3.1), (3.2)及(3.3)式, 保存量級为 $o(1)$ 的, 取消量級比 $o(1)$ 小的, 則得边界層运动方程組为:

$$\frac{1}{1+ky} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{kuv}{1+ky} = -\frac{1}{(1+ky)} \frac{\partial p}{\partial x} + \varepsilon^2 \left[\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{k}{1+ky} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{k^2 u}{(1+ky)^2} \right] \quad (7.1)$$

$$\frac{k\varepsilon^2}{1+ky} = \frac{\partial p}{\partial y} \quad (7.2)$$

及連續方程为:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} [(1+ky)v] = 0 \quad (7.3)$$

实际上列各式不但可以应用于大曲率, 也可以应用到中曲率。(7.2)式系表示由于表面曲率而产生的离心力与法綫上的压力梯度必須平衡。(7.1), (7.2)及(7.3)各式中均有一奇点 $y = -\frac{1}{k}$, 因而墨非認為应用到凹面边界層將受到限制, 严格的說, 如果凹表面曲率半徑小于或者等于边界層厚度的話, 則奇点落在边界層內, 那么运动方程便不能采用如前面所示的曲坐标。然而, 普通的表面形狀是奇点远在边界層以外, 所以奇点并不导致数学上的困难。

边 界 条 件

可以分兩部份来討論边界条件:

(1) 在物体的表面速度为容, 即

$$u = v = 0 \quad (8.1)$$

(2) 边界層与其外流連結的問題, 这也就是本文討論的重点。一般在雷諾数很大而外流在物体表面附近变化不大的情况下, 边界層的外緣边界条件是: 在边界層空間無限远的切綫速度 u_1 等于外流在物体表面的切綫速度 u_0 即:

$$\lim_{\substack{\eta \rightarrow \infty \\ \eta = y/\delta}} u_1(x, \eta) = u_0(x, y) \Big|_{y=0} \quad (8.2)$$

虽然在某些情况下,它是正确的代表外缘边界条件,可是令人费解的是:外流在物体表面的速度与在边界层空间无限远处的速度并不是代表物理空间同一点的速度,为什么可以令它们相等呢?

从数学与物理两方面的观点来看,(8.2)式所示的外缘条件只是近似的,可以从此出发,推演出较严格准确的外缘条件.事实上边界层边缘的流场与外流 $y=O(\varepsilon)$ 的区域的流场是代表同一物理空间的流场,因此,根据边界层的特性,边界层边缘的流场应该渐近地近似外流空间 $y=O(\varepsilon)$ 的区域的流场.其误差是 $O(e^{-\eta^2})$.

即当 $R \gg 1$ 时

$$\lim_{\substack{\eta \rightarrow R \\ \eta = y/\varepsilon}} u_1(x, \eta, \varepsilon, h) = u_0(x, y, \varepsilon, h) + O(e^{-\eta^2}) = u_0(x, \varepsilon\eta, \varepsilon, h) + O(e^{-\eta^2}) \quad (8.3)$$

此处 u_1 及 u_0 各自代表边界层与外流的切线流速.这里还需要解释 u_1 及 u_0 为什么是 ε 的函数.如果边界层很厚的话,即是 ε 不是小到可以忽略的话,那么厚边界层对外流产生影响,因此 u_0 是 ε 的函数,结果 u_1 不仅是 x 与 η 的函数,也是 ε 的函数.如果 ε^2 变成不可忽略的话,在外流中还需要考虑粘性.根据上面的推论可以更进一步推广,即是可压缩的或不可压缩的边界层的其他物理量,如法向速度,压力,温度及密度等,也应当有同样的性质,即:

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{\eta \rightarrow R \\ \eta = y/\varepsilon}} Q_1(x, \eta, \varepsilon, h, M) &= Q_0(x, y, \varepsilon, h, M) + O(e^{-\eta^2}) = \\ &= Q_0(x, \varepsilon\eta, \varepsilon, h, M) + O(e^{-\eta^2}) \end{aligned} \quad (8.4)$$

Q_1 及 Q_0 各自代表附面层与外流的某一对应的物理量,本题所应用的只是如(8.3)式所示的切线速度条件,本文作者曾应用(8.4)式到高超音速边界层问题^[1].

边界层与外流连结的问题即如上述,那么我们可以用非粘性的理想流的理论求出其某一特别曲面的外流,一旦有了外流,也就肯定了边界层,本文只讨论外流是势流的情形,在边界层外缘附近的外流可以根据无旋及其在表面的切线速度分布两个条件求出来,即

$$\frac{1}{1+ky} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{ku}{1+ky} = 0 \quad (9.1)$$

从(6)式可以知道在边界层外缘附近, $\frac{\partial v}{\partial x} = O(\varepsilon)$,但本文不考虑 ε 级的影响,所以上式可以简化为:

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{ku}{1+ky} = 0. \quad (9.2)$$

积分上式得:

$$u = \frac{D(x)}{1+ky}. \quad (9.3)$$

$D(x)$ 是外流在物体表面上的切线流速沿表面的分布,下面将根据它同表面压力分布的关系来推算它,忽略(7.1)及(7.2)中的粘性项及 ε 级项的方程组,就是边界层外缘附近的外流运动方程组,即

$$wu_x = -P_x \quad (9.4)$$

$$\frac{kw^2}{1+ky} = \frac{\partial P}{\partial y} \quad (9.5)$$

注意(9.5)式在边界层内也是适用的,切线方向的压力梯度 P_x 可以分为两部分,一部分是沿物体表面的压力梯度 P_{1x} , 另一部分是 P_{2x} , 是由于表面曲度所产生的,并且沿法线方向变的,从(9.5)式得:

$$P_{2x} = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^y \frac{kw^2}{1+ky} dy \quad (9.6)$$

从(9.6)式可以看出在物体表面的 P_{2x} 是零,所以沿表面量出来的压力梯度是代表 P_{1x} , 当 $y=0$ 时,(9.4)式可化为:

$$wu_x = -P_x.$$

积分上式得:

$$w = D(x) = \sqrt{2(P_0 - P_1)}. \quad (9.7)$$

P_0 是驻点压力.

前面已经找出 $D(x)$ 与压力分布的关系,对一任意曲度的物体,一旦量出它的表面压力分布,就可由(9.7)式求得外缘条件,当然某些简单情况是可用势流理论来计算 $D(x)$ 的,还有一点值得提到的:如果外流是有旋的,而且也知道边界层外边缘附近的流量分布的话,那么我们也可以根据流量公式求出外缘边界条件,因为本文的目的仅是与墨菲的论文作一比较,而借以说明一些边界层理论,故同墨菲一样,采用 $D(x)=1$, 即外缘边界条件(9.3)式可化为:

$$u_i = \frac{1}{1+ky} \quad (9.8)$$

沿曲率为 $K = -\frac{A}{\varepsilon\sqrt{x}}$ 的边界层流.

边界条件及运动方程既如上述,如果肯定 K 的函数,我们就可以进行推算,同墨菲一样,取

$$K = -\frac{A}{\varepsilon\sqrt{x}} \quad (10)$$

此处 A 是常数,从上式可以求出物体表面曲线,取驻点切线为 X_1' 轴,通过驻点与 X_1' 轴垂直的法线为 Y_1' 轴,令 $\theta = \tan^{-1} \frac{dy_1'}{dx_1'}$, 则表面曲线为:

$$w'_1 = \frac{2\mu}{A^2 \rho u_0} (\theta \sin \theta + \cos \theta - 1)$$

$$y'_1 = \frac{2\mu}{A^2 \rho u_0} (\sin \theta - \theta \cos \theta)$$

当 $A=0.001, 0.002, 0.004, 0.01$ 时的曲线见图 2.

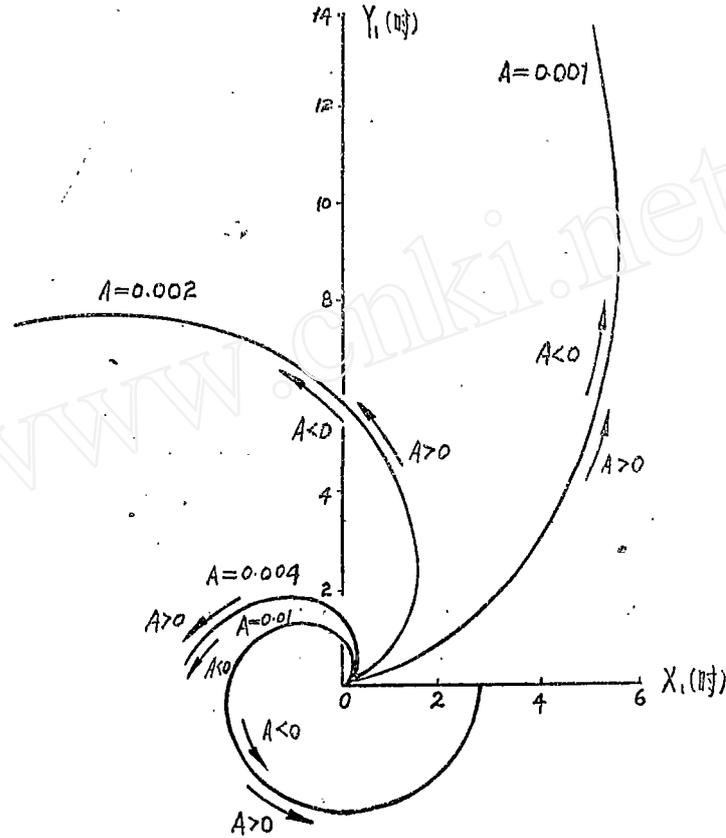


图 2. 表面曲线 $\kappa = \left[\frac{u_0}{2\nu x} \right]^{\frac{1}{2}}$

$$u_0 = 100 \text{ 呎/秒}; \quad \frac{\mu}{\rho} = \nu = 0.0001667 \text{ 呎}^2/\text{秒}.$$

墨菲采取这种特别形状并无实际应用的或物理的特别意义, 只不过是得到了与平板边界层相似的解答而已, 如果采用其他的几何表面, 则计算较为复杂, 然而为了解决工程上的问题, 应采取叶栅或机翼所习用的几何形状, 作者拟另文讨论.

为了适合连续方程式(7.3), 引进流函数 ψ :

故

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ v &= \frac{-1}{1+ky} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (11.1)$$

根据(10)式的表面形状,可以引进参数:

$$\left. \begin{aligned} \eta &= \frac{y}{2\varepsilon\sqrt{\xi}} \\ \xi &= x \end{aligned} \right\} \quad (11.2)$$

及流函数:

$$\psi = \varepsilon\sqrt{\xi} f(\eta) \quad (11.3)$$

故

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{1}{2} f' \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{1}{4\xi} \eta f'' \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{1}{4\varepsilon\sqrt{\xi}} f'' \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{1}{8\varepsilon^2\xi} f''' \\ v &= \frac{1}{2(1+2A\eta)} \frac{\varepsilon}{\sqrt{\xi}} (f'\eta - f) \\ ky &= 2A\eta \end{aligned} \right\} \quad (11.4)$$

将(10)及(11.4)式代入(7.1)式即得边界层运动方程如下:

$$\begin{aligned} f''' + f f'' + 2A f f' + 2A\eta f f'' + 4A\eta f''' + 4A^2 \eta^2 f''' + \\ + 2A f'' + 4A^2 \eta f'' - 4A^2 f' = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

根据边界条件(8.1)及(9.8)式, f 的边界条件应为:

当 $\eta=0$ 时

$$f = f' = 0 \quad (13.1)$$

当 $\eta \gg 1$ 时

$$f' = \frac{2}{1+2A\eta} + o(e^{-\eta}) \quad (13.2)$$

像(10)式所描述的表面形状, A 的绝对值很小, 因此假设 f 是可以用 A 的幂级数来代表, 即

$$f = f_0(\eta) + A f_1(\eta) + A^2 f_2(\eta) + \cdots + A^n f_n(\eta) + \cdots \quad (14)$$

将上式代入(12)式, 令 A^n 的系数等于零, 即得 f_0, f_1, \cdots, f_n 的微分方程如下:

A^0 级:

$$f_0''' + f_0 f_0'' = 0 \quad (15.1)$$

A^1 级:

$$f_1''' + f_1 f_0'' + f_0 f_1'' + 2[f_0 f_0' + \eta f_0'' + f_0'] = 0 \quad (15.2)$$

A^2 级:

$$f_2''' + f_2 f_0'' + f_1 f_1'' + f_0 f_2'' + 2f_0 f_1' + 2f_1 f_0' + 2\eta f_0 f_1'' + 2\eta f_1 f_0'' + 4\eta f_1''' + 4\eta^2 f_0'' + 2f_1'' + 4\eta f_0'' - 4f_0' = 0 \quad (15.3)$$

A^n 级:

$$\begin{aligned} & f_n''' + [f_n f_0'' + f_{n-1} f_1'' + \cdots + f_1 f_{n-1}'' + f_0 f_n''] + \\ & + 2[f_{n-1} f_0' + f_{n-2} f_1' + \cdots + f_1 f_{n-2}' + f_0 f_{n-1}'] + \\ & + 2\eta[f_{n-1} f_0'' + f_{n-2} f_1'' + \cdots + f_1 f_{n-2}'' + f_0 f_{n-1}'] + \\ & + 4\eta f_{n-1}''' + 4\eta^2 f_{n-2}'' + 2f_{n-1}'' + 4\eta f_{n-2}'' - 4f_{n-2}' = 0 \end{aligned} \quad (15.4)$$

同样的可以从 f 的边界条件 (13.1) 及 (13.2) 推算出 f_0, f_1, \dots, f_n 的边界条件如下:

当 $\eta=0$ 时:

$$f_0 = f_1 = \cdots = f_n = f_0' = f_1' = \cdots = f_n' = 0 \quad (16.1)$$

当 $\eta \gg 1$ 时: 可以将 (13.2) 式的右边 $\frac{2}{1+2A\eta}$ 展开成 A 的幂级数并引进 (14) 式, 得:

$$\begin{aligned} f' &= f_0'(\eta) + Af_1(\eta) + \cdots + A^n f_n(\eta) + \cdots \\ &= 2[1 - (2A\eta) + (2A\eta)^2 + \cdots + (-)^n (2A\eta)^n + \cdots] + o(e^{-\eta}) \end{aligned}$$

因此求出 f_0, f_1, \dots, f_n 的边界条件为:

当 $\eta \gg 1$ 时:

$$\left. \begin{aligned} f_0' &= 2 + o(e^{-\eta}) \\ f_1' &= -4\eta + o(e^{-\eta}) \\ f_2' &= 8\eta^2 + o(e^{-\eta}) \\ &\dots\dots\dots \\ f_n' &= (-)^n 2^{n+1} \eta^n + o(e^{-\eta}) \end{aligned} \right\} \quad (16.2)$$

外流与边界层流的相容性

前面既已得到微分方程组 (15) 及边界条件 (16.1) 及 (16.2), 各级的微分方程是三次的, 各阶的边界条件有三个, 可以求得它们的解, 然而外缘条件不只是限制在外缘附近某一点的值, 而是在 $\eta \gg 1$ 时的区域, 要求边界层流场的近似值等于如 (16.2) 式的第一式所示的函数, 既如此严格, 是不是仍然可以满足如此的边界条件呢? 答案是肯定的, 从数学的角度来看, 无论外流与边界层均由纳威尔-斯陀克斯运动方程组所控制, 外流与边界层流的流函数在外缘附近应当有相容性, 换句话说, 外缘附近的某一点满足

(16.2) 式, 那么在外缘附近一区的其他的点就自动的满足如 (16.2) 式所示的外缘条件. 从物理的角度来看, 外流与附面层流在外缘附近一区应该而且能够代表同一个流场, 根据上面的推论由于相容性的存在, (16.2) 式只是代表一个限制条件, 下面来证明是否本题外流与附面层流有相容性, 如果存在, 那么在理论上就算完全解决了本题.

当 $\eta \gg 1$ 时, A 级的微分方程可简化为:

$$f_1''' + f_1''(2\eta - \beta) + 4(2\eta - \beta) = 0 \quad (17.1)$$

从 (16.2) 式的外缘条件得:

$$\left. \begin{aligned} f_1' &= -4\eta \\ f_1'' &= -4 \\ f_1''' &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (17.2)$$

显然 (17.2) 式所示的解是适合 (17.1) 式的, 同样的可以证明 (16.2) 式所示的 A^2 级及 A^n 级外缘边界条件各自适合 (15.3) 及 (15.4) 等式, 这说明外流与附面层流有自动相容性, 问题到此只是求数值解.

数 值 计 算

A^0 级的数值解即是布拉西乌斯 (Blasius) 的平板附面层解, 微分方程组 (15.4) 有特解 g_n 及齐次解 $C_n h_n$; 即 $f_n = g_n + C_n h_n$, C_n 是常数, 当 $\eta \ll 1$ 时,

令

$$f_n = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{b_i \eta^i}{i!} \quad (18.1)$$

将 (18.1) 式代入微分方程组 (15) 各式, 利用边界条件 (16.1) 得各级解如下: 令 $\alpha = 1.32824$:

A^0 级:

$$f_0 = \frac{\alpha \eta^2}{2!} - \frac{\alpha^2 \eta^5}{5!} + \frac{11\alpha^3 \eta^8}{8!} - \frac{375\alpha^4 \eta^{11}}{11!} + \frac{27,897\alpha^5 \eta^{14}}{14!} - \frac{3,817,742\alpha^6 \eta^{17}}{17!} + \dots \quad (19.1)$$

A^1 级:

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= g_1 + C_1 h_1 \\ \text{此处 } g_1 &= \left[\frac{2\alpha \eta^2}{3!} - \frac{10\alpha^2 \eta^5}{6!} + \frac{324\alpha^3 \eta^8}{9!} - \frac{22,896\alpha^4 \eta^{11}}{12!} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2,830,518\alpha^5 \eta^{15}}{15!} - \frac{580,731,910\alpha^6 \eta^{18}}{18!} + \dots \right] \\ h_1 &= \frac{1}{2!} \eta^2 - \frac{2\alpha}{5!} \eta^5 + \frac{33\alpha^2}{8!} \eta^8 - \frac{1,500\alpha^3}{11!} \eta^{11} + \\ &\quad + \frac{139,485\alpha^4}{14!} \eta^{14} - \frac{22,902,822\alpha^5}{17!} \eta^{17} \end{aligned} \right\} \quad (19.2)$$

A^2 级

$$\left. \begin{aligned} f_2 &= g_2 + C_2 h_2 \\ \text{此处} \quad g_2 &= \frac{12\alpha\eta^4}{4!} - \frac{1.16\alpha\eta^7}{7!} + \frac{7,920\alpha^3\eta^{10}}{10!} + \dots \\ h_2 &= h_1 \end{aligned} \right\} \quad (19.3)$$

利用上面的幂级数解计算当 η 小时的几点的值, 然后根据这几点的值用数值解法求得(15.2)及(15.3)两式的特解 g_1 与 g_2 及齐次解 h_1 与 h_2 . 再应用边界条件(17.2)的第一与第二两式求得 $C_1 = -5.767$, $C_2 = -2.30$. 结果就算出 f_1 与 f_2 , 表 1 是 g'_1 , h'_1 , g'_2 , f'_1 及 f'_2 诸函数值. 表 2 是在不同的 A 值的情形下 f' 的函数值, 忽略 A^3 级项. 其余 A^3 级的解可以此类推, 但 A 很小, 普通 A 级解已足够准确了.

结 果 讨 论

本文将分三部份来讨论表面曲率的影响:

1. 对速度剖面的影响:

从图 3 可以看出, 凸面的边界层速度比平面的小, 曲度愈大, 速度也愈小, 最大的速度不在边界层边缘, 而在边界层中约 $\eta = 2.3$ 左右. 反之, 凹面的边界层速度比平面的大, 曲度愈大则速度愈大; 同时, 速度是随 η 单调增加. 当 $A = o\left(\frac{1}{10^3}\right)$ 时, 速度剖面与平面的几乎一样, 可以忽略曲度的影响.

2. 对表面剪应力的影响:

片流附面层的剪应力 τ_0 为:

$$\tau_0 = \mu \left(\frac{\partial u'}{\partial y'} \right)_{y'=0}$$

从(11.4)的第二式及(14)式得:

$$\begin{aligned} \tau_0 &= \frac{\mu u_0}{L A \varepsilon \sqrt{\xi}} [f'_0(0) + A f'_1(0) + A^2 f'_2(0) + \dots + A^n f'_n(0) + \dots] = \\ &= \mu u_0 \left(\frac{u_0}{x'} \right)^{\frac{1}{2}} [0.332 - 1.442A + o(A^2)] \end{aligned}$$

从上式看来, 当 $A = o\left(\frac{1}{10^3}\right)$ 时, 曲度对剪应力的影响小于 1%, 但当 $A = 0.05$ 时, 曲度的影响达 22%, 凸面的表面剪应力比平面的大, 而凹面的比平面的小.

3. 计算的准确度:

上面计算的准确度除受曲度的影响外, 与普通的边界层相同. 本文的计算仅考虑表面曲度至 A^2 级, 曲度对靠近表面的速度剖面影响较小, 但影响边界层边缘的速度则较大, 故对表面剪应力而言, A 级解已足够准确, 但对边缘速度分布与曲度 $k \geq o\left(\frac{1}{10^3}\right)$

表 1.

η	f_0	g_1	h_1	$f_1 = g_1 + c_1 h_1$ $c_1 = -5.787$	g_2	$f_2 = g_2 + c_2 h_1$ $c_2 = -2.3$
0.0	0	0	0	0	0	0
0.1	0.1828	-0.013	0.100	-0.592	0.16	-0.07
0.2	0.2655	-0.053	0.200	-1.209	0.45	-0.01
0.3	0.3979	-0.119	0.299	-1.850	0.88	0.19
0.4	0.5294	-0.211	0.397	-2.510	1.44	0.53
0.5	0.6596	-0.328	0.493	-3.182	2.14	1.01
0.6	0.7876	-0.467	0.586	-3.858	2.96	1.61
0.7	0.9125	-0.627	0.674	-4.530	3.88	2.32
0.8	1.0335	-0.805	0.757	-5.186	4.86	3.12
0.9	1.1495	-0.997	0.833	-5.815	5.88	3.96
1.0	1.2595	-1.198	0.900	-6.407	6.99	4.83
1.1	1.3626	-1.406	0.958	-6.951	7.92	5.72
1.2	1.4580	-1.616	1.007	-7.445	8.93	6.62
1.3	1.5449	-1.826	1.045	-7.872	9.94	7.54
1.4	1.6230	-2.032	1.073	-8.232	10.99	8.52
1.5	1.6921	-2.235	1.092	-8.556	12.14	9.63
1.6	1.7522	-2.435	1.103	-8.817	13.45	10.92
1.7	1.8035	-2.633	1.106	-9.026	15.02	12.48
1.8	1.8467	-2.828	1.101	-9.193	16.91	14.27
1.9	1.8821	-3.021	1.098	-9.320	19.20	16.67
2.0	1.9100	-3.212	1.088	-9.410	21.91	19.40
2.1	1.9393	-3.401	1.077	-9.471	25.07	22.60
2.2	1.9617	-3.578	1.066	-9.585	28.68	26.23
2.3	1.9764	-3.757	1.055	-10.079	32.71	30.20
2.4	1.9756	-3.928	1.044	-10.297	37.09	34.69
2.5	1.9831	-4.094	1.035	-10.540	41.78	39.40
2.6	1.9885	-4.262	1.028	-10.809	46.69	44.33
2.7	1.9923	-4.422	1.021	-11.104	51.81	49.46
2.8	1.9950	-4.578	1.017	-11.420	57.02	54.68
2.9	1.9968	-4.735	1.013	-11.757	62.36	60.09
3.0	1.9980	-4.894	1.010	-12.109	67.72	65.40
3.1	1.9987	-5.054	1.008	-12.474	73.21	70.89
3.2	1.9992	-5.214	1.007	-12.849	78.66	76.25
3.3	1.9995	-5.372	1.006	-13.232	84.29	81.98
3.4	1.9997	-5.531	1.005	-13.620	89.86	87.51
3.5	1.9998	-5.690	1.005	-14.012	95.68	92.37
3.6	1.9999	-5.856	1.004	-14.407	101.39	99.08
3.7	2.0000	-6.023	1.004	-14.804	107.50	105.19
3.8	2.0000	-6.192	1.004	-15.202	113.35	111.04
3.9	2.0000	-6.361	1.004	-15.601	119.85	117.51
4.0	2.0000	-6.530	1.004	-16.000	125.81	123.50
4.1	2.0000	-6.700	1.004	-16.399	132.85	130.51
4.2	2.0000	-6.870	1.004	-16.800	138.75	136.44
4.3	2.0000	-7.040	1.004	-17.200	146.26	141.05
4.4	2.0000	-7.210	1.004	-17.600	152.60	150.29

表 2.
 $f' = f'_0 + A f'_1 + A^2 f'_2$

$w \backslash A$	-0.05	-0.02	-0.001	0.001	0.02	0.05
0.0	0	0	0	0	0	0
0.1	0.16	0.14	0.13	0.13	0.12	0.10
0.2	0.33	0.29	0.27	0.26	0.24	0.21
0.3	0.49	0.44	0.40	0.40	0.36	0.31
0.4	0.66	0.58	0.53	0.53	0.48	0.41
0.5	0.83	0.72	0.66	0.66	0.60	0.51
0.6	0.99	0.87	0.79	0.78	0.71	0.61
0.7	1.15	1.01	0.92	0.91	0.82	0.70
0.8	1.31	1.14	1.04	1.03	0.93	0.79
0.9	1.46	1.27	1.16	1.14	1.04	0.88
1.0	1.60	1.39	1.27	1.25	1.13	0.96
1.1	1.74	1.51	1.37	1.36	1.23	1.04
1.2	1.86	1.61	1.47	1.45	1.31	1.11
1.3	1.97	1.71	1.55	1.54	1.29	1.18
1.4	2.07	1.79	1.63	1.61	1.46	1.24
1.5	2.16	1.87	1.70	1.68	1.53	1.30
1.6	2.23	1.93	1.76	1.74	1.58	1.35
1.7	2.30	1.99	1.81	1.79	1.63	1.40
1.8	2.36	2.04	1.86	1.84	1.67	1.43
1.9	2.41	2.08	1.89	1.87	1.70	1.46
2.0	2.45	2.11	1.92	1.90	1.73	1.49
2.1	2.49	2.14	1.94	1.92	1.75	1.52
2.2	2.52	2.16	1.96	1.94	1.77	1.54
2.3	2.56	2.18	1.98	1.96	1.78	1.55
2.4	2.59	2.20	1.99	1.97	1.79	1.56
2.5	2.62	2.21	1.99	1.97	1.79	1.57
2.6	2.65	2.22	2.00	1.98	1.79	1.57
2.7	2.68	2.24	2.00	1.98	1.79	1.57
2.8	2.71	2.25	2.01	1.98	1.79	1.57
2.9	2.75	2.26	2.01	1.99	1.79	1.57
3.0	2.78	2.27	2.01	1.99	1.78	1.57
3.1	2.81	2.28	2.01	1.99	1.78	1.56
3.2	2.84	2.29	2.01	1.99	1.77	1.56
3.3	2.88	2.30	2.01	1.99	1.77	1.55
3.4	2.91	2.31	2.01	1.99	1.76	1.55
3.5	2.95	2.32	2.01	1.99	1.76	1.54
3.6	2.98	2.33	2.01	1.99	1.75	1.54
3.7	3.01	2.34	2.01	1.99	1.75	1.53
3.8	3.05	2.35	2.02	1.98	1.74	1.53
3.9	3.09	2.36	2.02	1.98	1.74	1.53
4.0	3.12	2.37	2.02	1.98	1.73	1.52
4.1	3.16	2.38	2.02	1.98	1.73	1.52
4.2	3.19	2.39	2.02	1.98	1.72	1.51
4.3	3.23	2.40	2.02	1.98	1.72	1.51
4.4	3.27	2.41	2.02	1.98	1.71	1.51

者,还要增添 A^2 级解始够准确. 从图 3 看来, 约当 $\eta \leq 2.4$ 时, 速度剖面可以 $\frac{f'}{2}$ 来代表, 但当 $\eta \geq 2.4$ 时, 可以 $\frac{1}{1+2A\eta}$ 来代表速度. 因更进一步计算高次级解, 不过是使 $\frac{f'}{2}$ 的值在 η 较大的区域内与 $\frac{1}{1+2A\eta}$ 的值更接近而已.

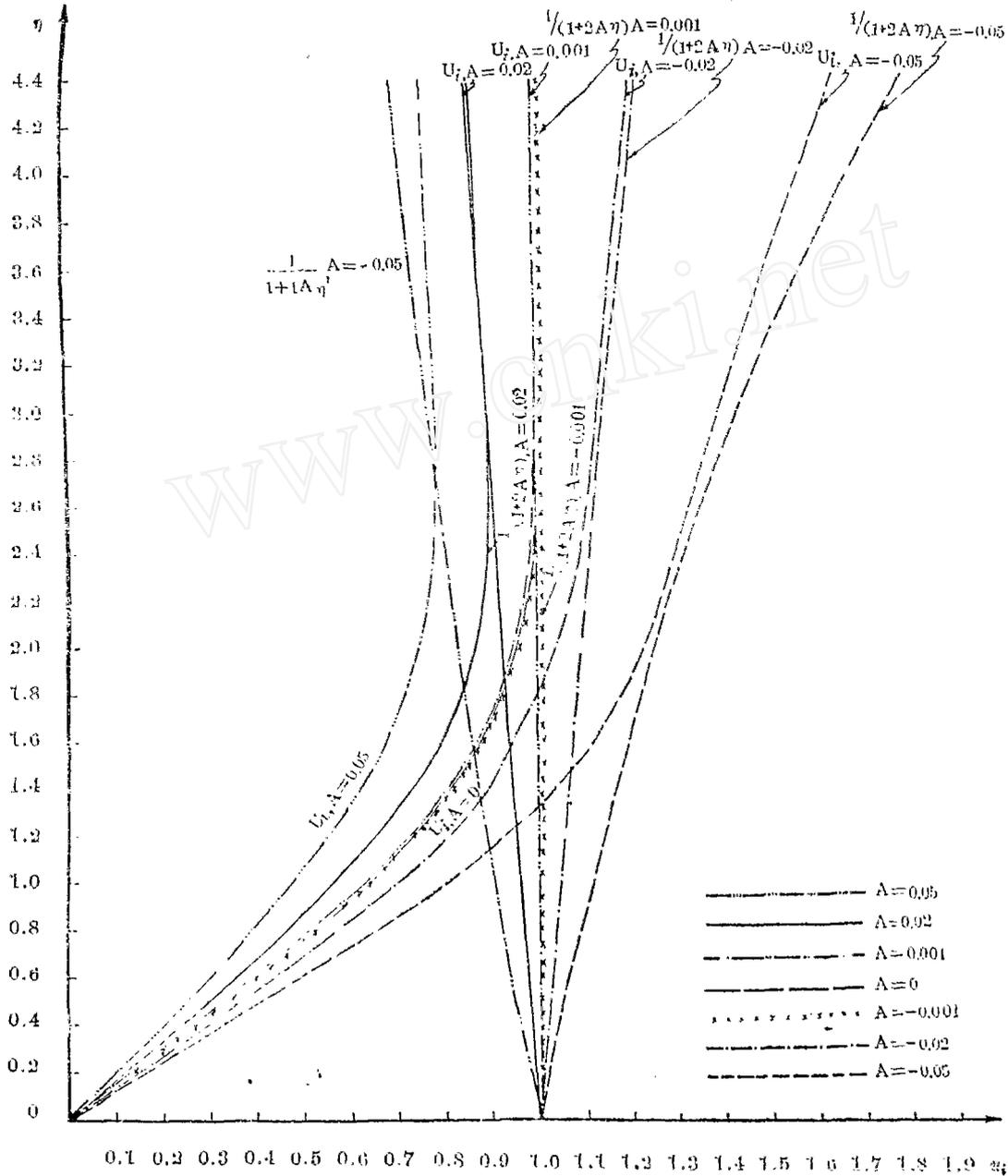


图 3. 沿曲面, 平面, 凹面的速度剖面图

$$U_i + \frac{f'}{2} = \frac{1}{2} (f_0 + 4f_1 + A^2 f_2)$$

参 考 文 献

- [1] Pan, L. J. and Kuo, Y. H. Compressible Viscous Flow Past a Wedge Moving at Hypersonic Speeds, *Journal of Mathematics and Physics*, 36, No. 2, July, 1956.
- [2] James S. Murphy, Some Effects of Surface Curvature on Laminar Boundary-Layer Flow, *Journal of the Aeronautical Sciences*, 20, No. 5, May, 1953.
- [3] Goldstein, S., *Modern Developments in Fluids Dynamics*, 1st Ed., 1 pp. 90—120; Oxford University Press, 1938.

THE EFFECTS OF SURFACE CURVATURE ON LAMINAR BOUNDARY-LAYER FLOW

PAN LIANG-ZU

(Institute of Mechanics, Academia Sinica Peking, China)

ABSTRACT

In at least one case where the potential flow in the neighborhood of the outer edge of the boundary-layer varies rapidly, the boundary-layer theory has not been well understood. The interest in this problem led the author to the study of the laminar flow of a viscous incompressible fluid over a curved surface whose curvature, as has been found previously, displays rather large effects on the nature of boundary-layer flow. The specific point to be investigated here is the question as to how to join the boundary-layer with the potential flow. On the basis of the fact that the viscous effects decay exponentially in the lateral direction, it has been intuitively suggested that, in the neighborhood of the outer edge of the boundary-layer, the velocity in the main stream direction u_i should asymptotically approach that in the main stream.

Namely,

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{\eta \rightarrow R \\ \eta = y/\varepsilon}} u_i(x, \eta, k, \varepsilon) &= u_0(x, y, k, \varepsilon) + o(e^{-\eta^2}) \\ &= u_0(x, \varepsilon\eta, k, \varepsilon) + o(e^{-\eta^2}) \end{aligned} \quad (1)$$

where x and y are the coordinates shown in Fig. 1. $R_0 \left(= \frac{1}{\varepsilon^2} \right)$, K and R denote Reynolds number, the curvature of the surface and a large constant respectively.

By an order-of-magnitude analysis, Murphy obtained the following differential equation of the motion in a boundary-layer over a particular curved surface with curvature $K = \frac{A}{\varepsilon\sqrt{x}}$, along which the surface pressure gradient is zero.