运用学中的一些問題

許國志

（中國科学院力学研究所）

一　緒　　論

运用学是一門比較新的科学。在資本主义國家里，它可以説是發源于第二次世界大战。当大战开始时，英國僅有一支数量很小，但訓練得还不坏的空軍。为了有效地利用它來作战，他們便召集了各方面的科学家來討論。他們把他們的本行中的經驗和方法，搬來尝試解决那些不屬于任何学科的問題。后來美國参战后，便也展开了这一方面的工作。战后那些从事于运用学的工作者，便想利用在战爭中得到的經驗，來解决一些工商業、运輸和交通方面的問題。可是在和平时期，这門科学在資本主义國家里的發展就遭到很多困难。我們在下面引譯兩段一个美國运用学工作者的話。他説："在現階段中，很明顯地我們需要一些水平很高的科学工作者，來从事帶头工作。自然將來在这一門科学中，那些科学家会有極大的用处。但在和平时期，他們通常从事于純科学中更重要的研究（是对他們自己更重要），因此不能來展开一門新的应用科学。"他又説："运用学应用到交通問題上，可能產生对汽車設計修改的建議。但在这門工業中，商業競爭的情况使得把建議付諸实施变得極端困难。"[1]

在社会主义國家里，情形就大不相同了。我們的國民經济是有計划的，各方面都是按比例發展的。我們有劳动競賽而沒有商業競爭。我們的科学家并不是关起門來作"純"科学研究，而是配合國民經济，着眼于整个科学發展方面去貢献他們的力量。运用学在社会主义國家里將会找到英雄用武之地了。

我們不打算給运用学下一个定义，因为这門科学还很不成熟。它的研究范圍也很廣。我們只預备介紹几个例子，使大家知道哪些題目曾經被研究过，哪些方法曾經被采用过。在下面，我們將討論三大类型的問題，(i) 最大效果、(ii) 穩扎穩打、(iii) 势如潮湧。自然还有些其他类型，我們將不討論，比如説，"瓶口問題"、"排隊問題"等等。在結論里，我們再介紹一些我們認为用运用学的方法可以解决的实际問題。

二　最大效果

在許多規划中，我們都要求最高效果。自然我們非常了解要达到这要求，并不是解一个数学方程便能解决，而是有許多其他重要因素包括在內。我們在这里打算講一些極

〔1〕 Morse, Philip M., Kimball, G. E., Methods of operations research, John Wiley, 1952.

簡化了的問題。其中一个原型的，而且到最近还有許多人研究的便是“运費問題”。

假想有三个工厂 A、B、C，比如說是紗厂，供給甲、乙二城的棉紗。甲城消費量，比如說是一千包紗一个月，而乙城是五百包紗。A、B、C 三厂的產量，分别为六百包、五百包及四百包一个月。如是三厂之生產量与二城之消費量确切平衡。同时我們知道由某厂至某城每包棉紗的运价如下：A 厂至甲城每包 1 元、A 厂至乙城每包 1.50 元、B 厂至甲城每包 1.80 元、B 厂至乙城每包 2.00 元、C 厂至甲城每包 1.75 元、C 厂至乙城每包 2.50 元。同时假設甲城每月从 A、B、C 三厂各运 x 包、y 包及 z 包。而乙城每月从 A、B、C 三厂各运 r 包、s 包及 t 包。这样我們便算出甲城每月付运費 $1.00x+1.80y+1.75z$，而乙城每月付运費 $1.50r+2.00s+2.50t$。总运費为兩者之和。問題是如何分配，也就是如何决定我們的未知数 x、y、……t 等，使得总运費为最低。自然在决定未知数时，我們应滿足下列兩組方程式：

$$\begin{cases} x+y+z=1000 \\ r+s+t=500 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+r=600 \\ y+s=500 \\ z+t=400 \end{cases}$$

也就是說，在分配时，我們要供給每一城市以足够而不剩余的数量；同时照顧到每一厂的生產量，使其充分利用。

上面叙述的那个“运費問題”是可以計算出來的。自然这和实际問題还差得远。比如說，运費可能不是固定的，而按貨量作綫性增加。在这种情况下，力学家普拉格 (Prager) 最近也研究过这个問題。

我們再來談談另外一个类似的問題。假設某机構有五百所房子分配給五百家職員居住。房子有間数多少，楼上楼下，离办公处所远近等等不同。家屬有人口多少，老人及小孩的有無，健康情况，以及在那一处所办公之別。根据这种种情况，我們对某一家配給以某一幢房子，可以作一个大略的“使用效率”的估計。比如說，人口多的配給間数多的，年老的不讓他多爬楼，这样使用效率便大。相反如果有四个小孩的人家，配給他高高在上的一小間房，而年青力壯，無老小牽累的夫妇，反安居楼下兩間大屋，这样使用效率便不好。如果我們已經計算出，比如說張家配給第一号房子的使用效率为 a、配給第二号房子的使用效率为 b 等等五百个“使用效率”数字，王家配給第一号房子的使用效率为 c、配給第二号的为 d 等等五百个“使用效率”数字，以此类推。这步工作結束后，下一步工作便是如何根据这許多既得数字，作合理分配，使得“总使用效率”为最高。換句話說，也就是从張家的那五百个使用效率数字中选出一个，这就是說假設配給張家某一号房子。因此剩下來可能配給王家的房子只有四百九十九幢，也就是說从那相对应的四百九十九个使用效率数字中，选出一个。以此类推，共选得五百个数字。問題是如何选法，可以使所选五百个数字之总和为最大。

这个房子分配問題，看起來好像是比較簡單。因为从代数里，我們已經曉得总共有 $500!$ 个可能的不同选法。因此也只有 $500!$ 种总和，我們只要在这些数字里找出一个最大数。不过我們得注意 $500!$ 是一个很不小的数字，如果这样扳指头死算，可得算死人。

問題是如何简化这計算手續。在諾曼（von Neumann）的最近工作中，一种簡化方法已經被得到。

在上面兩个問題里，我們看出問題本身在理論上并不复雜，但是計算手續往往很繁。我們的运費問題只考慮了兩个城市，三个工厂；但在实际情况里，城市和工厂的数目远不止此。在純数学里，我們的兴趣往往是在求得一个存在或唯一性的定理。但在应用数学里，一个計算方法，一个簡單而相当够准确的計算方法更为重要。

我們談过的兩个問題中也存在着一些相异点。比如說，在运費問題里，那些作为出發点的数字，也就是从某厂到某城的运費是确切不移的，那是运輸机構訂出的。但在房屋分配問題里，作为根据的数字，也就是某一人家配給某一房屋的使用效率，在估計时可能有些出入。这方面的个别誤差，可能对总結果有很大的影响。因此一个运用学工作者，必須对实际情况有深切了解。关起門來作研究是不能得到好結果的。

在"最大效果"这一类型里，存在着許許多多实际問題。我們不妨再举几个。例如汽油的配合問題。不同的汽油往往有着不同的化学和物理性質，例如揮發量等等。在实际应用中，我們往往要求某一种化学或物理性質在某一范圍內，例如揮發量不大过或小过某些数字等等。問題是在符合这許多要求下，如何最經济地配合汽油。还有"办公桌和文件箱的問題"。假設有三个办公桌和三个文件箱。每一个在某一办公桌的人每天都要到他自己的文件箱里，比如說取二十次文件。每一箱子到每一桌子的距离是固定的。問題是那一个箱子应該配給那一个桌子，使得每天三个办公的人走路的总距离为最短。还有"巡迴演講"的問題。假想一个科学家居住在北京，他要去好几个大城市作科学报告。报告完畢后，再回到北京。問題是他將如何安排他的旅程，使得总旅程为最短。关于最大效果这一类型的問題，我們已經給了相当多的例子。现在我們將談談穩扎穩打的問題。

三　穩扎穩打

我們假想甲乙双方，作一战略性的賭博。甲方有 m 个战略，乙方有 n 个战略。如果甲方采取战略 i，乙方采取战略 j。則其結果是：甲獲得 $M_{甲}(i,j)$，乙得到 $M_{乙}(i,j)$。如果我們設想那个賭博是一种賭錢方式，則 $M_{甲}(i,j)$ 便为甲赢得的錢，$M_{乙}(i,j)$ 是乙赢的錢。（$M_{甲}$、$M_{乙}$可正可負，正是赢，負是輸。）并且 $M_{甲}(i,j)+M_{乙}(i,j)=0$，也就是 $M_{甲}(i,j)=-M_{乙}(i,j)$。现在我們把所有可能結果，列成下列矩陣：

$$\begin{pmatrix} M_{甲}(1,1) & M_{甲}(1,2) & \cdots\cdots M_{甲}(1,n) \\ M_{甲}(2,1) & M_{甲}(2,2) & \cdots\cdots M_{甲}(2,n) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ M_{甲}(m,1) & M_{甲}(m,2) & \cdots\cdots M_{甲}(m,n) \end{pmatrix}。$$

如此則甲的种种可能赢得的錢数，一目了然。同时甲赢得的就是乙輸出的。所以乙的种种可能結局，从这矩陣中也一目了然。我們现在不妨举一实例。甲乙双方作一擺銅錢的賭博。其規則如下：甲乙双方各拿一銅錢，可任意取正反面。如果双方同为正面或者同为反面，則甲赢一元。否則乙赢一元。每次賭博以兩局为結局。同时如果任一方兩次均

同为正，則額外羸一元。如果双方兩次均同为正，則乙額外羸一元。如果双方兩次均同为反面則甲額外羸一元。如是則甲共有四种战略，（正，正）、（正，反）、（反，正）、（反，反）。乙方亦同此。如是則方陣为：

$$\begin{Bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -2 & 0 \\ -1 & -2 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 3 \end{Bmatrix}。$$

我們現在再繼續作一般性的討論。如果甲采取战略1，因为乙有n种不同战略可取，遂有n种不同結果。（在我們的例子里，如果甲采取（正，正），但乙可采（正，正）、（正，反）、（反，正）、或（反，反）四种中任一种战略。因此遂有四种可能不同的結果，分別为甲羸一元，甲羸一元，甲羸一元，及甲輸一元。）其中必有一最坏結局。（对甲說，在特例中便为甲輸一元。）如果甲采战略2，可作同样分析。以此类推。甲每采一战略，則因为乙有n个战略可用，則n个結局中必有一个对甲方說，是最坏的結局。因此共有m个最坏結局。（在特例中共有四个最坏結局，分別为甲輸一元，甲輸二元，甲輸二元，甲輸三元。）在这m个最坏結局中必有一最好的。也就是說，可能羸得最多，或者是輸得最少。（如果m个最坏結局，都是甲輸錢。就像我們所举的例子，甲至少輸一元。）对应着这m个最坏結局中的最好結局的战略，不妨說是战略i_0，就是甲的穩扎穩打的战略。（在特例中，便是甲采（正，正）战略。）他的所得最少是

$$P_{甲}=\min_{0\leq j\leq n} M_{甲}(i_0,j)。$$

关于为什么这是穩扎穩打的战略，已經說得很清楚。但不妨再旁敲側击的申述一下。假使甲不作像上面那样的分析。当他采取战略1时，在n个結局中必有一个最好的。（在特例中便是甲羸一元。）以此类推，共有m个最好結局。这m个中必有一最好的。假設对应着这最好中的最好的是战略j_0。（在特例中，共有四个最好結局，那便是甲羸一元，甲羸二元，甲羸二元，及甲羸三元。这里面最好的当然是甲羸三元。对应着的战略是（反，反）。）通常这个战略j_0不一定是那穩扎穩打的战略i_0。我們顯然看出，如果乙方相当高明，那么这个‘最好中最好者’的战略，便反而吃虧。（在特例中，如果甲采（反，反）战略，而乙采（反，反）战略，則甲固能羸得三元。設若乙采（正，正）战略，則甲輸三元。較穩扎穩打时，可能多輸四元，或多輸兩元。）因为如果乙采取对策使甲所得的不是那对应战略j_0的n个結局中最好結局，而是那最坏結局，如是則甲所得反較取穩扎穩打时所得为少。

甲取穩扎穩打战略的收穫是

$$P_{甲}=\min_{0\leq j\leq n} M_{甲}(i_0,j)=\max_{0\leq i\leq m}\left[\min_{0\leq j\leq n} M_{甲}(i,j)\right]。$$

对乙方說，他可以作同样分析。得到一个穩扎穩打的战略，其收穫为：

$$\begin{aligned} P_{乙} &= \max_{0\leq j\leq n}\min_{0\leq i\leq m} M_{乙}(i,j)=\max_{0\leq j\leq n}\min_{0\leq i\leq m}\left[-M_{甲}(i,j)\right] \\ &= \max_{0\leq j\leq n}\left[-\max_{0\leq i\leq m} M_{甲}(i,j)\right]=-\min_{0\leq j\leq n}\max_{0\leq i\leq m} M_{甲}(i,j)。\end{aligned}$$

在这样情况下，甲所得应該是負$P_{乙}$，也就是

$$\min_{0\leq j\leq n}\ \max_{0\leq i\leq m}\ M_{甲}(i,j)。$$

我們沒有理由相信 $P_{甲}=-P_{乙}$。但在我們的特例中，我們却有 $P_{甲}=-P_{乙}=-1$。因此研究在哪种情况下，$P_{甲}=-P_{乙}$，便是一个很重要的問題。这便是諾曼的大貢献。我們在此不能細述。

我們講一些实例。假設甲乙双方斗智，在斗智中途，甲可改变其战略，或不改变其战略。乙亦然。因此便有四种可能性如下：(甲变，乙不变)、(乙变，甲不变)、(甲变，乙变)、(甲不变，乙不变)。假設这四种可能性所產生的結果如何，甲乙双方都很明白。所不明白的是甲不知道乙是否变，乙也不知道甲是否变。在这里，我們上面所講述的分析法，便可以用到了。再举第二例。設想一个人比如說帶了兩顆子彈出外打兎子，約好晚飯前归家。夕陽快西下时，兎子一只也沒見，倒看到不少狐狸。問題是要不要打。第三例。甲乙双方作一賭博如下：我們画一棋盤，共有十行十列。甲取其中一小方塊、讓乙猜是在第几行或者是在第几列(乙选擇或者猜行，或者猜列，但必須說明是那一个。)。如果乙猜不中，便得零。如果乙猜中，便得 y。但 y 随甲所选之小方塊在第几行，第几列而异。最后我們举一个較复雜的例。一个潜水艇必須通过一条河道，比如說有 L 公里長。同时它的最大潜水長度是 A 公里，$A<L$。我們的飛机一定要选擇沿河道的一点 x，來往复飛行偵察。假定在 x 点，潜水艇潜入水底，它便能够逃走。否則便有被偵察到的可能。被偵察到的概率是 $P(x)$，随飛机偵察地点而变。自然飛机不能天天在一点偵察，它必須改变其偵察地点，以达变化莫测之妙。潜水艇的潜水处所亦日在变化中。問題在研究潜水艇应采取怎样的战略，無論飛机在那些地点偵察，它被偵察到的概率总小于一固定值。同时也应研究飛机在那些地点進行偵察，無論潜水艇在何处入水，它被偵察到的概率总是大于一固定值。

讓我們結束关于穩扎穩打的討論。

四　勢如潮湧

在近代交通和城市規划里，一个重要的問題便是汽車交通的規划。如何在最小投資和最少意外事件發生的情况下，來享受我們社会日益繁荣所帶給我們日益增大的交通运輸。我們打算略为介紹一些这些方面的研究。現在先介紹几个指标。

流量：$$q=\frac{n}{\tau},$$

这里 n 是指在 τ 一段时間內通过距离为 dx 的一段公路中的汽車数。

濃度：$$k=\frac{\sum_{i=1}^{n} dt_i}{\tau dx},$$

这里 $\sum_{i=1}^{n} dt_i$ 是 n 部汽車通过 dx 長的距离所需时間的总和。因此 $\sum_{i=1}^{n} dt_i/\tau$ 便代表 dx 段內所有汽車的平均数目。"空間平均速度"便被定义如下：

$$v=\frac{q}{k}=\frac{dx}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}dt_i}.$$

濃度和流量顯然存在着下列关系。当濃度等于零时，流量也是零。当濃度很大很大时，也就是交通阻塞，車輛不通时，流量也是零。这是可以被了解的。依据公路的情况，我們可以定出 q-k 圖的 k_j 点(見圖1)。在濃度很小和濃度很大的区域內，从实际經驗中証明濃度和流量存在著一定关系，如圖一实綫部分所示。一个熟習微分学的人，便立即会想到一个 q 的極大值 q_m 一定存在着。这一个極大值便可定义为"公路容量"。

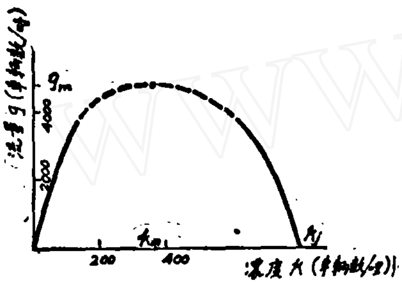

圖1　流量-濃度曲線

这一个極大值并不常被观察到。現在根据上面的理論分析，我們便有一个方法去測量它。但在叙述前，我們得先介紹一些其他数量的測量法。一个基本概念便是波速。当我們看到一片落叶浮在池塘的水面上，我們向水里拋一石子，一个波便傳播出去。而那片落叶只不过随波上下，并沒有改变它的位置。那个波以一定的速度傳播。这个速度便是波速。又假想如果一条街是用橡皮制成，当載重相当大时，便弯成弧狀。我們在地下道里观察，顯然如果車輛都拥在某一段时，該部分街道因此成弧狀。拥挤情况随时变化。我們在地下看不到个別車輛移动，但看到那波动以一定速度傳播。我們現在可以討論計算車輛的办法。

計算車輛的办法，往往是駕一个車，以不变的速度 U 行駛。然后观察者数一数在观察时間 σ 內，他所超过的車的数目 N_1，以及超过他的車的数目 N_2。我們得到下列关系：

$$N_2-N_1=\sigma\cdot q-k\cdot(U\cdot\tau)。$$

这个式子里有兩个未知数 q 及 k。因此用兩种不同的速度 U_1 同 U_2，去做这观察，便得到兩个方程。因此也就解出那兩个未知数 q 及 k。这种測量法是很有啓示的。因为如果設想兩个观察者，在相差 σ 时間內，去开始点查車流数目。他們調整他們的速度 U，使得所得 N_2-N_1 之平均数为一样。这样我們便得到

$$q(t)-k(t)\cdot U=q(t+\sigma)-k(t+\sigma)\cdot U,$$

或者

$$U=\frac{q(t+\sigma)-q(t)}{k(t+\sigma)-k(t)}=\frac{\Delta q}{\Delta k},$$

这里 Δq 和 Δk 是在 σ 时間內，流量和濃度的变化。

在这种情况下，在兩个观察者之間的車輛数目是不变的。同时在任何地方，在观察者們所經过的时間內所經过之車輛数为 $q\cdot\tau$。但 σ 为一固定值，因此沿观察者以速度 U 駛行之道路上 q 保持不变。換言之，即如果流量有变化，則此变化以速度 U 傳播。

如圖1所示。如果 q 为一 k 的函数。則 $C=\frac{dq}{dk}$。任何很小的流量变化，將以此速度傳播。相对公路說，U 可正可負，但它的值永远小于或至多等于"空間平均速度" v 的值

（这个我們在下一段里將看出。）因此相对車流量而言，U恒为負数。也就是說，載着流量变化的波是永远向后傳播。这一个波动概念，在我們的研討中，將占很重要的位置。

在圖 1 中，公路容量曾被定义为 q 的最大值。因此从数学方法看來，要求公路容量也就是要求出一点 k_m。在此点上，其相对应的 q 值为最大。或者說，也就是求在 q—k 曲綫上斜度等于零的一点。在波动語言中，就是求出相对应波动速度为零的 q 值。这样我們便設計出一实际測量法如下。我們在交通灯前，將大量車輛停止。經过相当时間，車輛聚集得很多后再放行。如此則放行后濃度顯然有变化。而流量亦随之而变。一族的波动也跟着產生。每一个載着一特殊的 q 值，用不同的速度 C 傳播出去，或向前，或向后。其中有一波在原停車地点保留不动。因此在該点所量之平均 q 值（从車輛开始發动后至所有被停止之車輛完全通过前）便为公路容量。

除了 q—k 圖外，我們还可以画 v—k 圖。由一些实际观察数值，我們得到圖 2。这个圖因为測量的数字不够多，可能很不准确。但是形狀是大致这样的。在濃度很小时，平均速度不变。这是很容易了解的。在一条公路上有兩部車在行駛，同有 20 部車在行駛，他們的平均速度是相同的，因为他們互不干擾。可是当濃度漸漸增大时，平均速度便受了影响而降低。因此如果我們下定义：当 $\frac{dv}{dk}$ 为負数时，公路便在扨挤狀况下，这是極其自然的。我們看到

$$C=\frac{dq}{dk}=\frac{d}{dk}(kv)=v+k\frac{dv}{dk}。$$

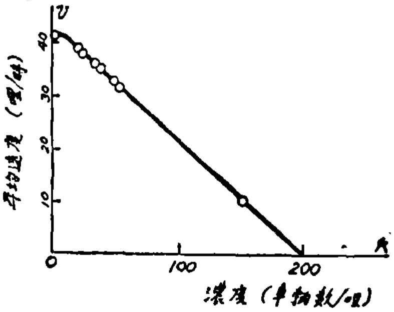

圖 2　速度-濃度曲綫

因为 $\frac{dv}{dk}\leqslant 0$，所以 $C\leqslant v$。这証实了我們在前一節里所說的。

很多問題，我們可以从流量-濃度圖，及波动速度的概念出發，加深研究而得出。我們在这方面打算再介紹一些。

我們的流量-濃度圖是代表在某一段公路內，它的流量和濃度的关系。我們从这个圖里，可以演化出一个空間-时間圖。我們假想公路是順 x 軸而伸展，t 軸代表时間。如此則任何一条綫在空間-时間圖內，便代表一部車或一个波的行駛路程。它的斜度便代表速度。有着相同而不变的速度的波，則將是一族平行直綫。如果公路的前一部分濃度

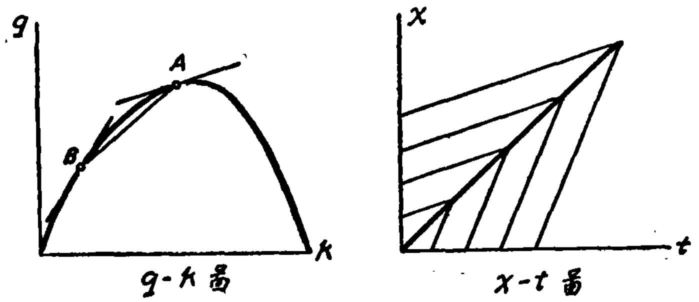

圖　3

大而后面一段濃度低，則我們在流量-濃度圖里，取相应兩点 A 及 B。在 x-t 圖內，画若干平行于 A 点切綫，及平行于 B 点切綫的平行綫。它們因为速度不同，因此斜度不同，后面的波將赶上前面的波。因此一个"冲击波"便形成。这冲击波在 x-t 圖的表示將为一平行于連接 A、B 兩点的割綫的直綫。

我們現在考慮一条不均匀的公路，也就是說它的各段的流量-濃度圖不一样。它中間存在著一条狹窄路。为了簡化起見，我們假想其流量-濃度圖如圖 4 所示。如果流量 q 不超过狹窄路容量 q_n，載着 q 的波通过窄狹路时，速度便暫时降低。离开窄狹路后，又恢复原來的速度。如果流量 q 大于 q_n，則該波進入窄狹区域后，無法通过，不得不折回。因此同后面的波相干擾而造成冲击波。情况很不簡單。这兩种情况，分别如圖 4 及圖 5 所示。我們不作詳細討論了。

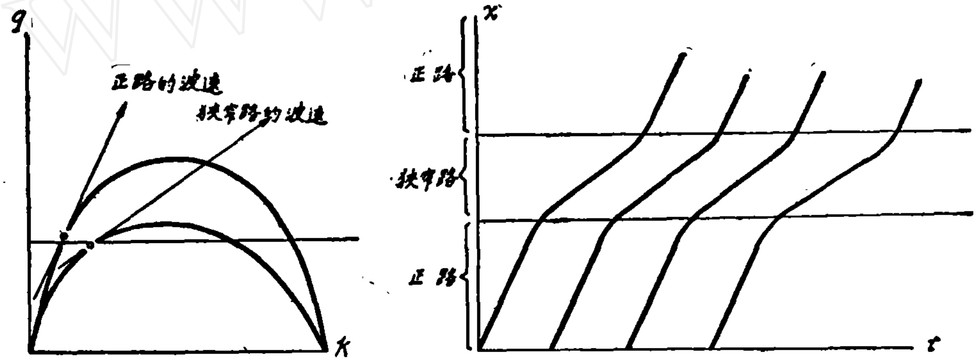

圖 4　波經过狹窄路，流量 q 不超过狹窄路容量 q^n

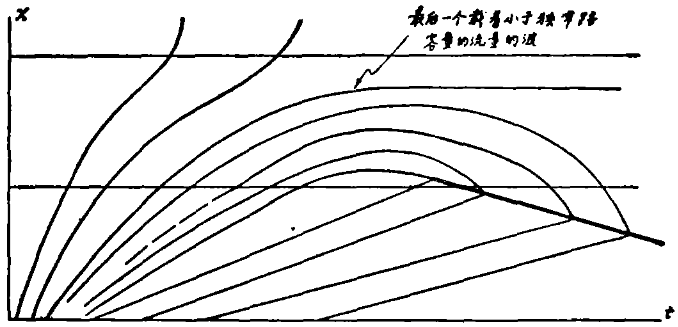

圖 5　波載流量大于狹窄路容量，冲击波便因之造成

上面的分析方法，可以有一些擴充。一方面，这种方法可以用于步行人群的分析，如戲院散場等等。另一方面，在公路上，我們不一定要考慮狹窄路，我們还可以用來分析交叉路口的交通問題等等。

五 展　　望

我們从上面那些例子里，可以看得出一些輪廓。运用学研究些什么問題，以及应用些什么工具。在我們所举的例子里，也像擲骰子在概率論里一样，并不是我們对賭博

有兴趣，而是因为許多問題都可同这些例子联系起來。

很顯然地，在科学發展史中，我們看出，許多以前憑經驗、憑直覚和大量劳动制造的程序，都漸漸补佐以科学方法。这样我們便能在較短的时間內，用較少的人力造出更多、更大、更好的东西來。我們的祖先、劳动人民在粗淺地掌握自然規律后，也能發明造紙術、印刷術等和建筑像天壇、廻音壁那些有名建筑物。可是現在因为化学、物理学和工程等科学的發展，我們便能造出更好的產品，在較短的时間內建筑更多的高楼大厦。在第二節里，我們已經明白指出，用扳指头的算法，也能解决房屋分配問題，可是那得花多少时間和人力！我們要充分利用科学成果。为了达到新的要求，只是用添人加班的方法是不能解决問題的。我們要尋找新方法和新工具。我們决不能因为我們祖先、劳动農民几千年來都是用牛耕地，便不去制造和改良拖拉机。同样我們也不能因为那些在上面我們討論过和在下面將要討論的問題，能有別的方法去解决，便不研究和發展运用学。

我們已經說过，这門科学还很不成熟。但是它的方向和前途是很明确的。我們也講起过在这門科学的發展初期，許許多多各門各类的科学家都貢献过他們的力量，我們相信現在也还需要大家努力。

我們深信，一門科学不僅僅是許許多多个別实例的总和。它应該有自己的体系、問題和方法。力学所以成为一門独立的科学，而不是数学在一些实际問題中的应用，亦正在此。

自然在一門新兴的科学里，問題是不会缺少的。而且从許多已成熟的科学部門中，我們看出他們的發展情况，多是从解决实际問題开始。在这里，因为新的要求往往需要新的方法來解决。当个別的例子和尋求出來的方法積累得愈來愈多时，便起了根本上的質变。一个嚴整的体系便会被發現。自然，一門学科不会脫离其他学科而單独發展和存在，与其他相关学科总有着相互关系。在这一方面，我們相信有利于發展运用学的客观条件是存在着的。近年來，概率論和数学統計突飛猛進，賭博論的逐步成熟，都給运用学准备好了工具。問題是我們怎样好好利用它。而且我們应該注意，那些不但是工具，而且是工作母机。从那里应該產生一些新的工具，新的方法，运用学特有的方法。

我們正在大力建設社会主义工業，發展科学研究。我們要迎头赶上。这客观情况，便是运用学問題的來源，也是运用学用武之地。我們有我們特有的問題。例如產品系列化，鉄路車站的分等，新的城市的規划，車站的設計和选擇，交通系統間的联系，交通工具选擇的原則等等。在这些問題里，运用学的方法都將有助于問題的分析和解决。

在寫这短文时，同力学研究所的許多同事談論过。承他們批評和介紹文献，特在此致以誠意的感謝。