

泥沙在靜水中的沉澱運動

(I) 含砂濃度對沉速的影響*

蔡 樹 棠

(中國科學院力學研究所)

一. 引 言

在討論輸砂問題時候, 沉降速度是一個相當重要的因素。很多事實證明, 含砂濃度的大小對砂子的沉降速度來說影響是非常大的。所以在討論泥沙沉降速度時候, 必須要考慮到含砂濃度對它的影響。過去曾經有過很多人在這方面做過很多工作(詳見附錄), 但是有些工作計算繁複^[1], 有些工作在物理圖案方面很不清楚^[2], 或者在處理過程中存在着若干不確定性^[1]。本文根據流體動力學的基本理論, 考慮了由於其它泥沙顆粒的存在使泥沙顆粒附近水的流線向裏的壓縮。根據這樣一個簡單的物理圖案, 我們得到了一個非常簡單的沉速和濃度的關係式。將得到的結果和實驗結果比較, 理論和實驗相當符合。

二. 沉速和濃度的關係

在一般討論泥沙沉速問題時候, 都應用斯托克斯公式。但是斯托克斯公式是一個圓球在無窮大的靜止流體中的沉降速度的公式。對於很多砂子同時下沉的情形, 斯托克斯公式顯然是不能應用的。因此我們必須考慮砂子之間的相互影響, 對斯托克斯公式進行修正。

在砂子沉澱的實際情形裏, 砂子的大小是參差不齊的, 形狀也是很不一樣的, 而且砂子的分佈也並不是均勻的, 速度也是各不相同的。不過作為第一級近似, 我們可以取下面的模型來代替實際的複雜的流動。我們把砂子看做是同樣大小的圓球。這些圓球形成一個正立方體的排列, 每個圓球都排在

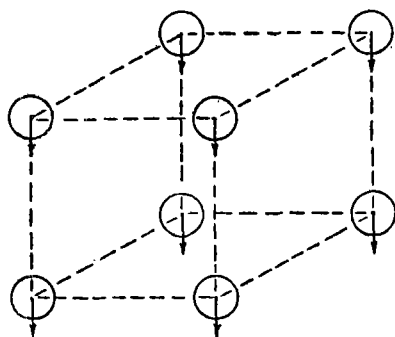


圖 1

* 1956 年 3 月 22 日收到。

立方體的頂角上。這些圓球都以同樣速度下沉。整個圖案就像圖 1 上所畫的那樣。

設圓球的直徑為 d ，相鄰兩球中心間的距離為 s 。再設單位體積內砂子所佔的體積為 ρ 。那麼單位體積裏所包含的圓球的數目

$$n = \frac{\rho}{\frac{1}{6} \pi d^3}, \quad (1)$$

單位長度裏所排列的球的數目為

$$\sqrt[3]{\frac{\rho}{\frac{1}{6} \pi d^3}},$$

相鄰兩球中心間的距離

$$s = \sqrt[3]{\frac{\frac{1}{6} \pi d^3}{\rho}}; \quad (2)$$

所以直徑和相鄰兩球中心間的距離的比值為

$$\frac{d}{s} = \sqrt[3]{\frac{\rho}{\frac{\pi}{6}}}. \quad (3)$$

我們現在來討論在同一水平面裏相鄰近的兩個球。它們的中心各自在 O 點和 B 點 (圖 2)。設圓球的沉降速度為 U 。我們現在來討論兩球中心聯線的中點 A 上的速度。由於我們所考慮的問題是靜水中的沉澱。所以當球以速度 U 下沉的時候，在 A 點的水必須上升。從連續方程可以知道，

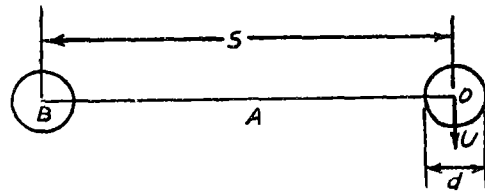


圖 2

砂子下沉的體積必須和水上昇的體積相等。這樣我們可以知道，水在 A 點的上昇速度是和含砂體積 ρ 的一次方同級的。當含砂濃度不是非常大的時候，我們可以把 ρ 的一次方項略去，那麼我們就可以把 A 點的速度作為零。

我們取和砂子一起運動的坐標系作為參考系，把 xy 平面取得和水平面平行，原點取在某一個球的中心 O 點， z 軸取得和地面垂直，向上為正。現在我們來討論水流穿過按照正立方形排列着的球的流動問題。我們可以設想對一個圓球附近的水流干擾最大的是鄰近的幾個球。而鄰近的幾個球中間，又以在同一水平面裏的幾個球對水流的阻礙摩擦作用為最厲害。我們認為砂子沉速的改變，主要是因為有了其它砂子的存在，使砂子顆粒附近水流的流線向裏緊縮，近似於兩個固壁間的流動，這樣就使阻力大大增加，也就使得沉速大大減小。

我們現在來研究這樣的流動狀態和斯托克斯所討論的情形比較，究竟有什麼不同。我們把圓球 O 單獨拿出來討論。我們可以看到在斯托克斯所討論的情形裏，流體流動的速度在離無窮遠的地方才達到最大值 U ，而我們現在討論的情形裏是在離球中心 $\frac{s}{2}$

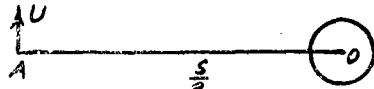


圖 3

的 A 點就達到了最大值 U 。解決這樣的問題的第一級近似，我們可以取一個斯托克斯流體的水流來代替原來的水流。使這個斯托克斯流體的水流在 A 點也產生速度 U 。設這一個水流在無窮遠處的速度

為 U' ，那麼從斯托克斯所給出的解，我們得到在 A 點的速度為

$$U_A = U' \left(1 - \frac{3}{4} \frac{d}{s} - \frac{1}{4} \frac{d^3}{s^3} \right).$$

略去式中 $\frac{d}{s}$ 的高次項，得到

$$U_A = U' \left(1 - \frac{3}{4} \frac{d}{s} \right). \quad (4)$$

根據上面所說的看法， U_A 必須要等於 U ，所以

$$U = U' \left(1 - \frac{3}{4} \frac{d}{s} \right),$$

因此

$$U' = \frac{U}{1 - \frac{3}{4} \frac{d}{s}}. \quad (5)$$

再根據斯托克斯公式，我們得到圓球上所受的阻力

$$R = 6\pi\mu \frac{U}{1 - \frac{3}{4} \frac{d}{s}} \cdot \frac{d}{2} = 3\pi\mu \frac{Ud}{1 - \frac{3}{4} \frac{d}{s}}. \quad (6)$$

在流動定常時候，阻力應該和作用在球上的重力和浮力的合力相抵消。我們用 G 代表重力和浮力的合力，就得到

$$R = 3\pi\mu \frac{Ud}{1 - \frac{3}{4} \frac{d}{s}} = G.$$

設我們用 U_0 代表單個圓球的下沉速度，我們就有

$$3\pi\mu U_0 d = G.$$

消去 G ，最後得到

$$U = U_0 \left(1 - \frac{3}{4} \frac{d}{s} \right), \quad (7)$$

或

$$\frac{U}{U_0} = 1 - \frac{3}{4} \frac{d}{s}. \quad (7)'$$

三. 理論和實驗結果的比較

根據林秉南^[1]所做的實驗,我們現在把他的實驗結果和理論結果的比較表列如下:

A 帶角的粒子 $U_0=0.586$ 厘米/秒

標 號	實驗 U 值(厘米/秒)	$\frac{d}{s}$	$\frac{3}{4} \frac{d}{s}$	$1 - \frac{3}{4} \frac{d}{s} = \frac{U}{U_0}$	實驗 $\frac{U}{U_0}$
1	0.515	0.165	0.124	0.876	0.879
2	0.527	0.141	0.106	0.894	0.899
3	0.539	0.117	0.088	0.912	0.920
4	0.515	0.164	0.123	0.877	0.879
5	0.515	0.172	0.129	0.871	0.879
6	0.497	0.187	0.140	0.860	0.848
7	0.497	0.189	0.142	0.858	0.848
8	0.515	0.145	0.109	0.891	0.879
9	0.501	0.120	0.090	0.910	0.855
10	0.555	0.128	0.096	0.904	0.947
11	0.497	0.214	0.161	0.839	0.848
12	0.484	0.223	0.167	0.833	0.826
13	0.439	0.313	0.235	0.765	0.749
14	0.425	0.409	0.307	0.693	0.725
15	0.405	0.407	0.305	0.695	0.691
16	0.407	0.398	0.299	0.701	0.695
17	0.422	0.374	0.281	0.719	0.720
18	0.427	0.373	0.280	0.720	0.729
19	0.470	0.257	0.193	0.807	0.802
20	0.473	0.255	0.191	0.809	0.807
21	0.473	0.226	0.170	0.830	0.807
22	0.497	0.210	0.158	0.842	0.848
23	0.492	0.199	0.149	0.851	0.840
24	0.455	0.260	0.195	0.805	0.776
25	0.470	0.254	0.191	0.809	0.802
26	0.513	0.157	0.118	0.882	0.875

B 玻璃球 $U_0=0.670$ 厘米/秒

標 號	實驗 U 值(厘米/秒)	$\frac{d}{s}$	$\frac{3}{4} \frac{d}{s}$	$1 - \frac{3}{4} \frac{d}{s} = \frac{U}{U_0}$	實驗 $\frac{U}{U_0}$
1	0.495	0.381	0.286	0.714	0.739
2	0.507	0.304	0.228	0.772	0.757
3	0.532	0.249	0.187	0.813	0.794
4	0.484	0.344	0.258	0.742	0.722
5	0.547	0.236	0.177	0.823	0.816
6	0.552	0.211	0.158	0.842	0.824
7	0.578	0.189	0.142	0.858	0.863
8	0.509	0.359	0.269	0.731	0.760
9	0.497	0.339	0.254	0.746	0.742
10	0.571	0.151	0.113	0.887	0.852
11	0.599	0.145	0.109	0.891	0.894
12	0.496	0.319	0.239	0.761	0.740

我們把得到的理論和實驗結果畫在圖 4 上。

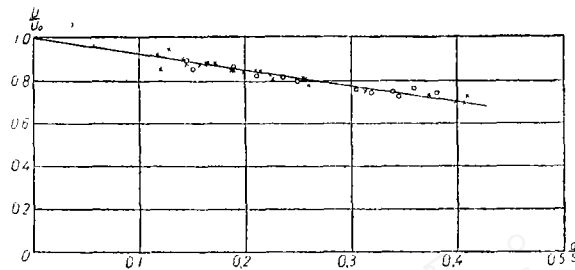


圖 4

四. 討 論

從得到的結果我們可以看出，當含砂濃度不是很大時，含砂濃度是影響沉速最大的因素。在我們討論這問題時，略去了水的上升速度和其他 $\frac{d}{s}$ 的高次各項，得到了在濃度不太大時，沉速和濃度的關係的第一級近似式。當然這樣的討論是極端粗糙的，對於濃度較高的情形是不能適用的。不過在濃度較高的時候，有其他別的因素必須考慮進去。首先，從力學性質來說，砂子在空間的隨機分佈，和砂子速度的參差不齊，以及砂子顆粒的形狀等等因素在高濃度時候，都得考慮進去。其次，從化學性質來說，在濃度高的時候，化學的膠結作用就成了控制現象的主要因素。僅僅從力學性質來考慮是不可能得出很好的結果的。

最後，我衷心的感謝錢學森先生對我的親切的指導和熱心的教誨。同時也感謝所內其他同志對我的幫助。

附 錄

關於濃度和沉速的關係，過去的文獻原文都沒有找到，下面的簡述是根據林秉南的博士論文上所引的材料摘下的。

1. 坎尼罕^[3]把問題化成一個圓球在一個不動的同心圓球包絡面裏運動。最後得出的結果是

$$\frac{U_0}{U} = \frac{1 + \frac{1}{4} \left(\frac{d}{D}\right)^5}{1 - \frac{9}{4} \frac{d}{D} + \frac{5}{2} \left(\frac{d}{D}\right)^3 - \frac{9}{4} \left(\frac{d}{D}\right)^5 + \left(\frac{d}{D}\right)^6},$$

式中 D 是包絡面的直徑。坎尼罕在他的文章裏把 D 取做 s ，最後得到的公式是

$$\frac{U_0}{U} = 1 + \frac{9}{4} \frac{d}{s} + \left(\frac{9}{4} \frac{d}{s}\right)^2 + \dots$$

這個式子要比實驗結果大得很多。

2. 沈^[4] 沿着坎尼罕同樣的路綫下來，他把坎尼罕討論裏原有的不動的包絡面用一個以一定速度下沉的包絡面代替。最後的結果是

$$\frac{U_0}{U} = \left(\frac{16+4m^5}{16-18m-5m^3+9m^5-2m^6} \right) \times \left\{ 1 - \frac{9m-13m^3+6m^6}{-16(1+2\epsilon)+9(4\epsilon+3)m+10(\epsilon+1)m^3+9(2\epsilon+1)m^5+4(\epsilon+2)m^6} \right\};$$

式中 $m = \frac{d}{2s}$ ， ϵ 是隨排列變化的常數，對正立方排列 $\epsilon = \frac{4}{\pi} - 1$ 。

3. 馬克諾^[5] 和其他人在坎尼罕公式裏把 D 用 $\frac{10}{3}s$ 代替，得到

$$\frac{U_0}{U} = 1 + 0.675 \frac{d}{s} + \left(0.675 \frac{d}{s} \right)^2.$$

這個公式和實驗比較接近。

4. 斯莫勒柯夫斯基^[6] 根據流體力學的斯托克斯線性化方程用疊加原理來討論問題。用逐次漸近法使速度在邊界上為零。這樣的手續只有在第一級近似時候比較方便，並且在濃度大的時候是不收斂的。

5. 勃格斯^[7] 也用疊加原理來討論問題，不過用的是斯托克斯線性化方程的另一個解，得到

$$\frac{U_0}{U} = 1 + \frac{\pi}{6} (\lambda_1 + \lambda_2) n d^3;$$

式中 λ_1, λ_2 是和排列形式有關的係數，對於矩形排列

$$\lambda_1 = 4.9 a n^{1/3}, \quad \lambda_2 = 0.67 a^{-2} n^{-2/3} - 1,$$

式中 a 是球半徑， n 是單位體積內球的數目；最後得到

$$\frac{U_0}{U} = 1 + 1.4 \frac{d}{s} - 0.523 \left(\frac{d}{s} \right)^3 + 1.28 \left(\frac{d}{s} \right)^4.$$

6. 尤基大^[8] 把濃度的影響考慮作球在一個管子裏運動，得到

$$\frac{U_0}{U} = 1 + 0.835 \frac{d}{s}.$$

7. 地拉帕^[9] 做了一些實驗，研究了一些沉澱的一般現象。

8. 林秉南^[1] 做了實驗，並且也做了理論分析。他根據疊加原理把奧秦的解疊加起來，計算繁複，在取積分範圍時候有一些不確定性。最後得到不同瑞諾數時不同的公式。

參 考 文 獻

[1] 林秉南, "Effect of Spacing and Size Distribution on the Falling Velocity of Sediment". A dissertation

- submitted in partial fulfillment of the requirements for the degree of doctor of philosophy, in the department of mechanics and hydraulics, in the graduate college of the State University, of Iowa (Aug. 1951).
- J. S. Mcnown and 林秉南, Proc. 2nd Midwestern Conference on Fluid Mechanics (1952).
- [2] P. G. W. Hawksley, "The effect of concentration on the settling of suspensions and flow through porous media" some aspect of fluid flow (1951).
- [3] E. Cunningham, On the velocity of steady fall of spherical particles through fluid medium, *Proc. Royal Soc. of London*, **83**. (1910).
- [4] S. F. Shen, "An approximate formula for the descending velocity in a viscous fluid of the particles in a uniformly distributed cloud", unpublished manuscript, Iowa Inst. of Hydraulic Res.
- [5] J. S. Mcnown, H. M. Lee, M. B. Mcpherson and S. M. Engez, "Influence of boundary proximity on the drag of spheres", Proceedings of the 7th International Congress for Applied Mechanics London. (1948).
- [6] M. S. Smoluchowski, "On the practical Applicability of Stokes' Law of Resistance, and the Modification of it Required in Certain Gases", Proceedings of the 5th International Congress of Mathematicians. Cambridges Press. (1913).
- [7] J. M. Burgers, "On the Influence of the Concentration of a Suspension upon the Sedimentation Velocity (In particular for a suspension of spherical particles)," *Proc. Ned. Akad. Wet. Amsterdam*, **44**, 1045, 1177, and **45**, 9, 126.
- [8] Uchida, Shigeo, "Slow Viscous Flow past Closely Spaced Spherical Particles," *Jap. Inst. Sci. Technol.* **3** (1949), 97—104.
- [9] Rouse, Hunter, Suspension of Sediment in Upward Flow, Bulletin 26, University of Iowa studies in Engineering, or Delapp, Warren, "Sediment Behavior in Upward Flow," M. S. Thesis, Department of Mechanics and Hydraulics, State University of Iowa, (1940).

О САЖДЕНИЕ НАНОСЫ (I) ВЛИЯНИЕ КОНЦЕНТРАЦИИ

Цай Шу-тань

(Институт механики, Академия наук Китая)

Краткое содержание

При изучении вопросов перенесания наносов, скорость опускания является одним из важных факторов. Многими фактами подтверждено, что концентрация наносов имеет очень большое влияние на скорость их опускания. В связи с этим при изучении скоростей опускания наносов необходимо учесть их концентрацию. Много работ было произведено многими специалистами по этому вопросу, но одни работы имеют слишком сложное исчисление, другие не дают четкой физической картины или имеется какая-то неопределенность в их выводах. Данная работа обсуждает на основе основных теорий гидродинамики, сужение внутрь линий тока вокруг частиц наносов которое делает движение воды между наносами близким к стенками. Исходя с этого получена зависимость скоростей опускания наносов от их концентрациях. После сравнения полученные результаты с лабораторными данными, оказывается, что теория достаточно совпадает с практиком.