1986 ЖУРНАЛ ТЕХНИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ Том 56,

1986 JOURNAL OF TECHNICAL PHYSICS Vol. 56,

УДК 533.15

О СКОРОСТИ ДИФФУЗИОННОГО СКОЛЬЖЕНИЯ В БИНАРНОЙ ГАЗОВОЙ СМЕСИ

Шэнь Цин

Рассматривается изотермическая бинарная газовая смесь в окрестности плоской сте[нки] с тангенциальным к стенке градиентом концентрации компонентов. Подстановкой фор[маль]ного решения кинетического уравнения в выражения для скоростей вычисляются непо[сред]ственно средние скорости обоих компонентов и определяется скорость скольжения. [Кон]кретные вычисления коэффициентов диффузионного скольжения, проведенные на осн[ове] уравнения Больцмана для бинарной газовой смеси, аппроксимированного согласно п[ро]стейшей модели Borey и Yip [1], и для диффузионного отражения от стенки, дают резу[ль]таты, идентичные с работой [2], исходящей из Gross и Krook [3], использующей совсем [другую] методику. Такое совпадение проливает свет на точность вычисления коэффициента ск[ольжения] концентрации [4, 5], где использованы такие же исходные уравнения и методика реше[ния], как и в настоящей статье. Использованием более точного модельного уравнения резу[льтаты] могут быть существенно улучшены.

1. Рассматривается бинарная газовая смесь компонентов A, B вблизи п[лос]кой стенки $y=0$. Пусть вдоль стенки в направлении x имеется градиент к[он]центраций компонентов

$$n_i = n_{i1} + \frac{dn_i}{dx}\,x \quad (i = A,\ B),$$

а температура и давление смеси постоянны. Проблема определения средних ск[оро]стей u_A, u_B компонентов решается с помощью линеаризованных урав[нений] Больцмана для бинарной смеси, аппроксимированных согласно простейшей м[оде]ли Boley и Yip [1] и BGKW [6, 7] (о выборе собственного значения см. [...])

$$C_{mA}\xi_{Ax}\frac{\partial\Phi_A}{\partial x} + C_{mA}\xi_{Ay}\frac{\partial\Phi_A}{\partial y} = n_A\gamma'_A\left[\nu_A - \Phi_A + 2\xi_{Ax}u_{Ax} + 2\xi_{Ay}u_{Ay} + \tau_A\left(\xi_A^2 - \frac{3}{2}\right)\right] +$$

$$+ n_B\gamma'\left[\nu_A - \Phi_A + 2\xi_{Ax}U_{Ax} + 2\xi_{Ay}U_{Ay} + \frac{1}{2}(\tau_A + \tau_B)\left(\xi_A^2 - \frac{3}{2}\right)\right],$$

$$C_{mB}\xi_{Bx}\frac{\partial\Phi_B}{\partial x} + C_{mB}\xi_{By}\frac{\partial\Phi_B}{\partial y} = n_B\gamma'_B\left[\nu_B - \Phi_B + 2\xi_{Bx}u_{Bx} + 2\xi_{By}u_{By} + \tau_B\left(\xi_B^2 - \frac{3}{2}\right)\right] +$$

$$+ n_A\gamma'\left[\nu_B - \Phi_B + 2\xi_{Bx}U_{Bx} + 2\xi_{By}U_{By} + \frac{1}{2}(\tau_A + \tau_B)\left(\xi_B^2 - \frac{3}{2}\right)\right],$$

$$\begin{pmatrix}\nu_i\\ \mathbf{u}_i\\ \tau_i\end{pmatrix} = \int F_i\Phi_i\begin{pmatrix}1\\ \xi_1\\ \frac{2}{3}\xi_i^2 - 1\end{pmatrix}d\xi_i, \quad i = A,\ B,$$

$$F_i = \pi^{-3/2}\exp(-\xi_i^2), \quad i = A,\ B,$$

где Φ_A, Φ_B — малые отклонения от равновесных функций распределения; $\xi_i = \mathbf{v}/C_{mi}$; $\mathbf{v}$ — молекулярная скорость; $C_{mi} = (2kT/m_i)^{1/2}$; m_i — молекулярные [мас]сы, $i = A,\ B$

$$U_A' = z_A u_A' + z_B \sqrt{m_A/m_B}\, u_B', \quad U_B' = z_A \sqrt{m_B/m_A} + z_B u_B',$$
$$z_A = m_A/(m_A + m_B), \quad z_B = m_B/(m_A + m_B),$$
$$\gamma' = kT/nD_{AB}, \quad \mu\gamma_A' = 2kT/nD_{AA}m_A, \quad \gamma_B' = 2kT/nD_{BB}m_B, \tag{6}$$

где μ — приведенная масса; D_{AB}, D_{AA}, D_{BB} — коэффициенты диффузии.

Легко видеть, что (2), (3) допускают решения вида

$$\Phi_A(\xi_A, x, y) = \Phi_{A1}(\xi_A, y) + cx, \tag{7}$$
$$\Phi_B(\xi_B, x, y) = \Phi_{B1}(\xi_B, y) + dx. \tag{8}$$

После такой подстановки и введения новых переменных

$$\eta_1 = \frac{kT}{D_{AB}\mu C_{mA}} My, \quad \eta_2 = \frac{kT}{D_{AB}\mu C_{mA}} Ny \tag{9}$$

уравнения (2), (3) запишутся как

$$\frac{c'}{M}\xi_{Ax} + \xi_{Ay}\frac{\partial\Phi_{A1}}{\partial\eta_1} + \Phi_{A1} = \nu_A + \frac{M_1}{M}\xi_{Ax}u_{Ax} + \frac{M_2}{M}\xi_{Ax}u_{Ax} +$$
$$+ \frac{M_3}{M}\left(\xi_A^2 - \frac{3}{2}\right)\tau_A + \frac{M_4}{M}\left(\xi_A^2 - \frac{3}{2}\right)\tau_B, \tag{10}$$

$$\frac{d'}{N}\xi_{Bx} + \xi_{By}\frac{\partial\Phi_{B1}}{\partial\eta_2} + \Phi_{B1} = \nu_B + \frac{N_1}{N}\xi_{Bx}u_{Ax} + \frac{N_2}{N}\xi_{Bx}u_{Bx} +$$
$$+ \frac{N_3}{N}\left(\xi_B^2 - \frac{3}{2}\right)\tau_A + \frac{N_4}{N}\left(\xi_B^2 - \frac{3}{2}\right)\tau_B, \tag{11}$$

где M, M_i, N, N_i, $i = 1 \sim 4$ суть коэффициенты, зависящие от относительных масс и диаметров компонентов смеси (см. [5]), а

$$c' = c\frac{D_{AB}\mu C_{mA}}{kT}, \quad d' = d\frac{D_{AB}\mu C_{mA}}{kT}. \tag{12}$$

Предполагается максвелловское отражение обоих компонентов от поверхности

$$\Phi_{A1}(\xi_{Ax}, \xi_{Ay}, \xi_{Az}) = (1 - \alpha_A)\Phi_{A1}(\xi_{Ax}, -\xi_{Ay}, \xi_{Az}), \tag{13}$$
$$\Phi_{B1}(\xi_{Bx}, \xi_{By}, \xi_{Bz}) = (1 - \alpha_B)\Phi_{B1}(\xi_{Bx}, -\xi_{By}, \xi_{Bz}), \tag{14}$$

где α_A, α_B — коэффициенты аккомодации A, B на стенке. Малые отклонения u_A, ν_A, τ_A, u_B, ν_B, τ_B скорости, концентрации и температуры от равновесных значений в общем случае можно представить в виде

$$u_A = ax + \alpha + u_{AK}, \quad u_B = bx + \beta + u_{BK},$$
$$\nu_A = cx + \gamma + \nu_{AK}, \quad \nu_B = dx + \delta + \nu_{BK},$$
$$\tau_A = ex + \varepsilon + \tau_{AK}, \quad \tau_B = fx + \zeta + \tau_{BK}, \tag{15}$$

где u_{AK}, ν_{AK}, τ_{AK}, u_{BK}, ν_{BK}, τ_{BK} исчезают на бесконечности; a, b, c, d, e, f, α, β, γ, δ, ε, ζ — постоянные, подлежащие определению. По условию изотермичности можно заключить, что $e = f = \varepsilon = \zeta = 0$; по условию наличия градиента концентрации только вдоль стенки находим $\gamma = \delta = 0$, а c и d суть те же значения, что и в (7), (8). По форме этих отклонений на бесконечности и из решения исходного уравнения на бесконечности легко видеть, что нулями должны быть α и β. Итак, (15) можно записать в виде

$$u_{Ax} = a + u_{AK}, \quad u_{Bx} = b + u_{BK},$$
$$\nu_A = c + \nu_{AK}, \quad \nu_B = d + \nu_{BK},$$
$$\tau_A = \tau_{AK}, \quad \tau_B = \tau_{BK}. \tag{16}$$

Из уравнения (1) и условия постоянства давления получается выражение c через градиент концентрации и связь между c и d

$$c = \frac{1}{n_{A1}}\frac{dn_A}{dx}, \quad d = -\frac{n_{A1}}{n_{B1}}c. \tag{17}$$

Очевидно, a, b суть средние скорости компонентов A, B у самой стенки. Наша задача заключается в определении a, b из уравнений (10), (11) при макроскопических условиях (4), граничных условиях (13), (14) и условиях на бесконечности (16). Если выразить d' через c', используя (12), (17), а a и b суть численные значения вышеуказанного решения, полученные при $c'=1$, то средняя (размерная) скорость смеси у стенки определяется через a, b (используя (12), (17))

$$w=\frac{n_A}{n}u_{Ax}\,|_{y=0}\,C_{mA}+\frac{n_B}{n}u_{Bx}\,|_{y=0}\,C_{mB}=\left(\frac{n_A}{n}aC_{mA}+\frac{n_B}{n}bC_{mB}\right)c'=$$

$$=\left(2a\frac{m_B}{m_A+m_B}+2b\frac{n_B}{n}\frac{\sqrt{m_Am_B}}{m_A+m_B}\right)D_{AB}\frac{1}{n}\frac{dn_A}{dx}.$$

По определению коэффициента диффузионного скольжения

$$w=\sigma_{AB}D_{AB}\frac{1}{n}\frac{dn_A}{dx},$$

его значение определяется как

$$\sigma_{AB}=2a\frac{m_B}{m_A+m_B}+2b\frac{n_B}{n}\frac{\sqrt{m_Am_B}}{m_A+m_B}.$$

2. Формально можно записать решение (10) в виде

$$\Phi_{A1}\,|_{\xi_{Ay}>0}=\frac{(1-\alpha_A)}{\xi_{Ay}}\int_0^\infty\Big[\nu_{AK}-\frac{c'}{M}\xi_{Ax}+\frac{M_1}{M}\xi_{Ax}u_{Ax}+\frac{M_2}{M}\xi_{Ax}u_{Bx}+\frac{M_3}{M}\times$$

$$\times\left(\xi_A^2-\frac{3}{2}\right)\tau_A+\frac{M_4}{M}\left(\xi_A^2-\frac{3}{2}\right)\tau_B\Big]\exp\left(-\frac{\zeta}{\xi_{Ay}}\right)d\zeta\exp\left(-\frac{\eta}{\xi_{Ay}}\right)+$$

$$+\frac{1}{\xi_{Ay}}\int_0^\eta\Big[\nu_{AK}-\frac{c'}{M}\xi_{Ax}+\frac{M_1}{M}\xi_{Ax}u_{Ax}+\frac{M_2}{M}\xi_{Ax}u_{Bx}+\frac{M_3}{M}\left(\xi_A^2-\frac{3}{2}\right)\tau_A+$$

$$+\frac{M_4}{M}\left(\xi_A^2-\frac{3}{2}\right)\tau_B\Big]\exp\left(-\frac{(\eta-\zeta)}{\xi_{Ay}}\right)d\zeta,$$

$$\Phi_{A1}\,|_{\xi_{Ay}<0}=\frac{1}{|\xi_{Ay}|}\int_\eta^\infty\Big[\nu_{AK}-\frac{c'}{M}\xi_{Ax}+\frac{M_1}{M}\xi_{Ax}u_{Ax}+\frac{M_2}{M}\xi_{Ax}u_{Bx}+\frac{M_3}{M}\left(\xi_A^2-\frac{3}{2}\right)\tau_A+$$

$$+\frac{M_4}{M}\left(\xi_A^2-\frac{3}{2}\right)\tau_B\Big]\exp\left(-\frac{|\eta-\zeta|}{|\xi_{Ay}|}\right)d\zeta.$$

Подстановкой этого решения и аналогичного решения для Φ_{B1} во второе из макроскопических условий (4) получаем интегральные уравнения для u_{Ax} и u_{Bx}

$$\sqrt{\pi}\,u_{Ax}=\frac{c'}{2M}\alpha_AJ_0(\eta_1)+\frac{(1-\alpha_A)}{2}\int_0^\infty J_{-1}(\eta_1+\zeta_1)\left(\frac{M_1}{M}u_{Ax}+\frac{M_2}{M}u_{Bx}\right)d\zeta_1-$$

$$-\frac{c'\sqrt{\pi}}{2M}+\frac{1}{2}\int_0^\infty J_{-1}(|\eta_1-\zeta_1|)\left(\frac{M_1}{M}u_{Ax}+\frac{M_2}{M}u_{Bx}\right)d\zeta_1,$$

$$\sqrt{\pi}\,u_{Bx}=-\frac{n_A}{n_B}\frac{c'}{2N}\alpha_BJ_0(\eta_2)+\frac{(1-\alpha_B)}{2}\int_0^\infty J_{-1}(\eta_2+\zeta_2)\left(\frac{N_1}{N}u_{Ax}+\frac{N_2}{N}u_{Bx}\right)d\zeta_2+$$

$$+\frac{c'\sqrt{\pi}}{2N}\frac{n_A}{n_B}+\frac{1}{2}\int_0^\infty J_{-1}(|\eta_2-\zeta_2|)\left(\frac{N_1}{N}u_{Ax}+\frac{N_2}{N}u_{Bx}\right)d\zeta_2,$$

где

$$J_n(\eta)=\int_0^\infty t^n \exp\left(-t^2-\frac{\eta}{t}\right)dt.$$

По разложении u_{Ax}, u_{Bx} в полиномы от $J_n(\eta_1)$, $J_n(\eta_2)$ можно записать их в виде

$$u_{Ax}=a+\sum_{n=0}^{m} a_n J_n(\eta_1), \quad u_{Bx}=b+\sum_{n=0}^{m} b_n J_n(\eta_2), \tag{24}$$

где a_n, b_n определяются вместе с a, b из уравнений (22), (23) после подстановки в них (24) и интегрирования их по η_1 и η_2 от нуля до бесконечности с весами $\eta_1^l J_0(\eta_1)$ и $\eta_2^l J_0(\eta_2)$, $l=0, 1, \ldots, m+1$. Наличие в уравнениях (22) и (23) членов $-c'\sqrt{\pi}/2M$, $(c'\sqrt{\pi}/2N)$ (n_A/n_B) и прочих постоянных членов лишает возможности использовать η^l как вес интегрирования, как это делалось ранее (см. [4, 5, 8]), зато использование $\eta_1^l J_0(\eta_1)$ и $\eta_2^l J_0(\eta_2)$ как веса для получения моментных уравнений ведет к желаемой цели. Добавление фактора $J_0(\eta)$ лишь немного усложняет процедуру вычисления коэффициентов в полученных алгебраических уравнениях: появляются определенные интегралы кратности, на одну больше прежней, которые все же вычисляются квадратурой Гаусса. Другое изменение в методике вычисления — это введение различных переменных для уравнений (10), (11) вместо одной $\eta=ykT/D_{AB}\mu C_{mA}$. Это вызвано тем, что использование одной переменной не дало сходящихся результатов. После определения a, b из решения алгебраических уравнений уже моментально определяется коэффициент диффузионного скольжения из выражения (20).

3. Средние скорости a, b компонентов A, B у стенки были вычислены таким путем для группы двухкомпонентных смесей, для которых имеются экспериментальные измерения факторов диффузионного скольжения [9, 10]. Величины a, b, а также σ_{AB} по формуле (20) показаны в таблице для $\alpha_A=\alpha_B=1.0$, $n_A/n=0.5$ (для пары N_2, H_2 $n_A/n=0.99$, $n_B/n=0.01$).

Компоненты		a, скорость компонента A	b скорость компонента B	σ_{AB}		
A	B			по формуле (20)	из [2]	экспер. [9, 10]
N_2	H_2	−2.75	198.	.64	.641	.9
	C_2H_2	−0.983	1.05	.106	.107	.13
	C_2H_4	−0.969	1.04	.081	.080	.073
	C_2H_6	−0.927	1.04	.082	.082	.085
	O_2	−0.979	0.958	−.088	−.089	−.10
	A	−0.921	0.931	−.168	−.168	−.22
	CO_2	−0.863	0.969	−.110	−.110	−.20
	C_3H_8	−0.808	1.04	.025	.025	−.13
CO_2	C_3H_8	−0.932	1.07	.136	.137	.11

В мировой литературе имеется обширное сравнение экспериментальных и расчетных значений σ_{AB} (см. [11-13]). Мы приводим лишь теоретические значения σ_{AB} из работы [2] и экспериментальные данные [9, 10]. Замечательно, что наши результаты очень близки к значениям, найденным в [2], хотя в обеих работах исходили из различных модельных уравнений и использовались различные методы расчета. Это показывает на скромную точность наших результатов, а также проливает свет на точность расчетов коэффициента скачка концентрации, основанных на таком же уравнении [4, 5].

Зато если использовать более точные модельные уравнения, например модельные уравнения McCormack 3-го порядка [14], то методикой настоящей работы можно получить улучшенные результаты, которые будут опубликованы позже.

Работа была выполнена во время пребывания в Ленинградском политехническом институте им. М. И. Калинина на Кафедре гидромашиностроения, расчеты были проведены в Вычислительном центре института. Вышеупомянутым учреждениям, особенно ВЦ ЛПИ, приношу глубокую благодарность за помощь, оказанную ими при выполнении работы.

Литература

[1] *Boley C. D., Yip S.* Phys. Fluids, 1972, v. 18, p. 1424—1433.
[2] *Ивченко И. Н., Яламов Ю. И.* О диффузионном скольжении бинарной газовой смеси. МЖГ, 1981, № 4, с. 22—26.
[3] *Gross E. P., Krook M.* Phys. Rev., 1956, v. 102, N 3, p. 593—604.
[4] *Chen C.* J. Fluid Mech., 1983, v. 137, p. 221—231.
[5] *Шэнь Цин.* Коэффициент скачка концентрации в разреженной бинарной газовой смеси. Общий случай. — ЖТФ, 1985, т. 55, № 9, с. 1808—1814.
[6] *Bhatnager P. L., Gross E. P., Krook M.* Phys. Rev., 1954, v. 94, p. 511—525.
[7] *Welander P.* Ark. Fys., 1954, v. 7, p. 507—553.
[8] *Sone Y.* J. Phys. Soc. Japan, 1964, v. 19, p. 1463—1473.
[9] *Schmitt K. H., Waldmann L.* Z. Naturforsch., 1960, v. 15a, p. 843.
[10] *Waldmann L.* On the motion of spherical particles in nonhomogeneous gases. Rarefied Gas Dynamics. 2nd Symposium Acad. Press, 1961, p. 322—344.
[11] *Loyalka P. B.* Phys. Fluids, 1971, v. 14, p. 2599—2604.
[12] *Lang H., Loyalka P. B.* Z. Naturforsch., 1972, v. 27a, N 819, p. 1707.
[13] *Жданов В. М., Смирнова Р. В.* Диффузионное скольжение и бародиффузия газовой смеси в плоском и цилиндрическом каналах. — ПМТФ, 1978, № 5, с. 103—1[illegible].
[14] *McCormack F. J.* Phys. Fluids, 1973, v. 16, N 12, p. 2095—2105.

Институт механики АН Китая
Пекин

Поступило в Редакцию
28 октября 1985 г.