

等离子体湍流对电子的加速

刘 振 兴

(中国科学院空间物理研究所)

黄 迎 雷

(中国科学院力学研究所)

摘 要

本文讨论了等离子体湍流对电子加速的两种模型：(1) 假定在空间中存在一个空间均匀的等离子体湍流区，当具有一定初始分布的电子束通过此湍流区时，研究湍流场对电子束的加速过程；(2) 在某一封闭的区域中，存在着具有一定初始分布和空间均匀的等离子体，当某种类型的等离子体波突然传入此等离子体区，然后考察此区中电子的加速过程。在这两种模型中，可能存在着某种电子消失机制。假定湍谱是幂指数形式，我们给出了不同类型湍流扩散系数的普遍形式。利用较简单的数学方法，求解了包括消失过程的一维准线性动力学方程，对于给定的初始分布，得出了分布函数的解析解，并给出了平均能量时间关系的表达式。另外，对于特定的湍谱指数，解出了当平行电场和湍流同时存在时的分布函数。最后，对所得结果进行了数值分析和讨论。

一、引 言

等离子体湍流对带电粒子(包括电子和离子)的加速，不论在实验室等离子体还是在空间等离子体中都是十分重要的。在等离子体理论著作^[1,2]中曾对湍流加速问题进行过广泛的论述，然而，这些工作仅限于一般的讨论，并未具体求解描述湍流对粒子加速扩散过程的动力学方程。因而不能给出被加速粒子的分布函数形式，限制了对湍流加速扩散过程深入和细致的了解。吴京生等曾利用给出的湍流扩散系数，求解了一维的动力学方程，给出了当时间 t 很大时的分布函数和平均能量的渐近表达式^[3]。但这一结果只能了解大时间 t 时的能量时间关系，不能了解粒子加速的全部时间过程。

针对上述的问题，我们试图对湍流加速的时间过程作进一步的讨论。这里提出了两种模型：第一种模型是具有一定分布的电子束，当其通过空间均匀的等离子体湍流区时，该电子束被湍流场的加速过程；第二种模型是将某种类型的等离子体波注入有限区域的等离子体中，然后考察该等离子体区中电子的加速过程。这两种模型在实验室和空间等离子体中都是有实际意义的。在加速过程中，电子可能存在着某种加速机制，例如电子和离子的复合及电子从加速区中逸出等消失机制。因此，在动力学方程中我们考虑了电子的消失过程。

本文1982年11月6日收到，1983年6月4日收到修改稿。

假定湍谱分布是幂指数形式,我们导出了一个表示不同类型湍流扩散系数的普遍表达形式.采用比较简单的数学方法,求解包括消失过程的一维动力学方程,在给定的初始分布条件下,得出了适合所有时间的分布函数,并讨论了电子平均能量的时间关系.另外,讨论了在特定湍谱分布(湍谱指数 $\alpha = 4$)的情况下,平行电场和湍流同时作用时的电子的分布函数.

二、模型和方程

我们只限于讨论沿磁力线运动的一维问题,而且假定等离子体和湍流是空间均匀的.在这种情况下,分布函数只是速度和时间的函数.本文讨论两种具体的加速模型:

1. 试验电子束通过均匀等离子体湍流区的加速过程.设在某一空间区域中存在着某种类型的等离子体湍流,当具有某一初始分布的电子束通过此湍流区时,电子束会受到加速.这种模型适用于研究极区沉降电子的加速过程.

2. 设在某一封闭的区域中充满着均匀的等离子体,在初始时此区域中不存在湍流,而且等离子体具有一定的初始分布.如在某一时刻,突然注入某种等离子体波,或者等离子体波从别的区域传入该区域,通过某种机制迅速达到稳定的饱和状态.在湍流起伏场的作用下,此区中的电子会受到加速.

在上述的两种模型中,电子可能存在着某种消失机制,因此,在方程中应该包含消失项.

基本方程

本文着重讨论极区沉降电子的加速过程,这种加速过程正是符合上述的第一种加速模型.最近的卫星探测结果表明,在极区上空某一高度范围内(2000—8000 km),存在着一个加速区.在这一加速区中,观测到较强的等离子体湍流和大尺度的平行电场.来自等离子体片中的电子,当其沿磁力线沉降,通过此加速区时会受到加速.

对于极区沉降电子的加速过程,我们只考虑沿磁力线的一维问题,这是很好的近似.在不考虑电场的情况下,描述湍流对电子加速的方程,通常是用下面形式的扩散方程

$$\frac{\partial f_c}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial v_{\parallel}} \left(D_{\parallel} \frac{\partial f_c}{\partial v_{\parallel}} \right). \quad (1)$$

这里 f_c 为被加速电子的分布函数, v_{\parallel} 和 D_{\parallel} 分别为沿磁力线方向的速度和湍流扩散系数.

当考虑电子的消失过程时,在方程(1)中应该包括消失项.在我们讨论的问题中,引起电子消失的最可能的机制是电子和离子的复合.如果电子的消失是由于电子和离子的复合引起的,则在方程(1)中,应考虑碰撞效应 $\left(\frac{\partial f_c}{\partial t} \right)_c$. 对于这种消失机制,可将 $\left(\frac{\partial f_c}{\partial t} \right)_c$ 表示为 $\frac{f_c}{\tau_0}$, 这里 τ_0 表示电子的生存时间.这样,考虑了消失过程的扩散方程为

$$\frac{\partial f_c}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial v_{\parallel}} \left(D_{\parallel} \frac{\partial f_c}{\partial v_{\parallel}} \right) - \frac{f_c}{\tau_0}. \quad (1.1)$$

下面讨论湍流扩散系的表达形式.假定湍流是各向同性的,并假定湍流已达到稳定的饱和状态,沿磁力线的湍流扩散系数(量纲是 $L^2 T^{-3}$)可表示为

$$D_{\parallel}^{\sigma} = \frac{1}{m_e} \int \frac{\bar{u}_k^{\sigma} W_k^{\sigma} \omega^{\sigma}}{v^2} d^3k = \frac{1}{m_e} \int \frac{\bar{u}^{\sigma} W_k^{\sigma} \omega^{\sigma} dk}{v^2}. \quad (2)^{1)}$$

这里 σ 表示不同类型的湍流, \bar{u}_k^{σ} 为不同等离子体波的平均发射概率, W_k^{σ} 为不同等离子体湍流的能谱, ω^{σ} 为不同波的角频率。

本文的主要目的,是讨论不同的湍谱形式对电子加速的影响,而不是从理论上讨论湍谱本身。探测结果表明,湍谱的分布形式一般表现为波数 k 或角频率 ω 的负幂指数形式。因此,湍谱符合下面的分布形式:

$$W_k^{\sigma}(k) = \begin{cases} \left(\frac{k_m}{k_{\parallel}}\right)^{\alpha} W_0^{\sigma}, & \text{当 } k_{\parallel} > k_m; \\ 0, & \text{当 } k_{\parallel} < k_m. \end{cases} \quad (3)$$

这里 α 为湍谱指数, k_m 表示最小的波数, W_0^{σ} 为常数,表示各种湍流能量的大小。

本文只讨论静电湍流对电子的加速。在极区上空已观测到各种频段的静电波,如低混杂波、静电离子回旋波,可能还存在着离子声波和朗缪尔波。在各向同性的假定下,朗缪尔波 ($\omega^l \approx \omega_{pe}$) 的平均放射概率可表示为^[1]

$$\bar{u}_k^l = \frac{\pi}{2} \frac{m_e}{n_e v} \frac{\omega_{pe}^3}{k^3} \begin{cases} 1, & \text{当 } \omega_{pe}/k_{\parallel} < v_{\parallel}; \\ 0, & \text{当 } \frac{\omega_{pe}}{k_{\parallel}} > v_{\parallel}, \end{cases} \quad (\omega_{pe} > \omega_{He}).$$

离子声波的平均放射概率 \bar{u}_k^i 为^[1]

$$\bar{u}_k^i = \frac{\pi}{2} \frac{m_i}{n_e v} \frac{(\omega^s)^3}{k^3} \approx \frac{\pi}{2} \frac{m_i v_s^3}{n_e v} \begin{cases} 1, & \text{当 } v_s < v; \\ 0, & \text{当 } v_s > v, \end{cases} \quad (k d_e^{-1} \ll 1).$$

这里 v 为离子速度, d_e 为德拜长度。将平均放射概率 \bar{u}_k 代入 (2) 式,并利用 (3) 式,发现不论是朗缪尔波或是离子声波,都可表示为如下的形式:

$$D_{\parallel}^{\sigma} = D_{0\parallel}^{\sigma} \left(\frac{v_{\parallel}}{v_{eth}}\right)^{\alpha-3}. \quad (4)$$

对于低混杂波,也可表示为 (4) 式的形式^[3]。这里 $D_{0\parallel}^{\sigma}$ 是与速度 v 无关的常数,表示上述几种湍流系数的大小, v_{eth} 为电子的热速度。

将 (4) 代入 (1) 式,并简写 $v_{\parallel} \sim v$, $D_{0\parallel} \sim D_0$, 即得

$$\frac{\partial f_e}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial v} \left[D_0 \left(\frac{v}{v_{eth}}\right)^{\alpha-3} \frac{\partial f_e}{\partial v} \right] - \frac{f_e}{t_0}. \quad (5)$$

再讨论初始条件和边界条件

根据分布函数的基本性质,当速度 v 为无穷时, $f_e \rightarrow 0$ 。另外一个边界条件可用如下的方法得到: 将 (5) 式两端对 v 积分,并注意在 $v = \infty$ 时 f_e 的性质,可得

$$D_0 \left(\frac{v}{v_{eth}}\right)^{\alpha-3} \frac{\partial f_e}{\partial v} \Big|_{v=0} = - \left(\frac{dn}{dt} + \frac{n}{t_0}\right) = g(t).$$

显然,函时 $g(t)$ 决定于电子的消失过程。如初始时分布函数是已知的,则问题的边界条件和初始条件可写成

1) 在 (2) 式中 ω^{σ} 应是 1 次方,参考文献 [1] 中写为 $[\omega^{\sigma}]^2$, 作者认为原文有误。

$$\text{当 } \nu = 0 \text{ 时, } D_0 \left(\frac{\nu}{\nu_{c1h}} \right)^{\alpha-3} \frac{\partial f_c}{\partial \nu} = - \left(\frac{dn}{dt} + \frac{n}{t_0} \right) = g(t), \quad (6.1)$$

$$\text{当 } \nu = \infty \text{ 时, } f_c = 0, \quad (6.2)$$

$$\text{当 } t = 0 \text{ 时, } f_c = \varphi(\nu). \quad (6.3)$$

将方程无量纲化,令

$$u = \frac{\nu}{\nu_{c1h}}, \quad \tau = D_0 \nu_{c1h}^{-2} t, \quad \tau_0 = D_0 \nu_{c1h}^{-2} t_0,$$

$$F(u, \tau) = \frac{\nu_{c1h}}{n_0} f_c, \quad N = n/n_0, \quad \varphi(u) = \frac{\nu_{c1h}}{n_0} \varphi(\nu),$$

则方程(5)和边界条件可写成

$$\frac{\partial F}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial u} \left[u^{-\nu} \frac{\partial F}{\partial u} \right] - \frac{F}{\tau_0}, \quad (7)$$

$$\text{当 } u = 0, \quad u^{-\nu} \frac{\partial F}{\partial u} = - \left(\frac{dN}{d\tau} + \frac{N}{\tau_0} \right) = g(\tau), \quad (8.1)$$

$$\text{当 } u = \infty, \quad F = 0, \quad (8.2)$$

$$\text{当 } \tau = 0, \quad F = \varphi(u), \quad (8.3)$$

这里 $\nu = \alpha - 3$.

三、方程的解

采用分离变量法求解,令

$$F(u, \tau) = T(\tau)\phi(u),$$

$$x = \left(\frac{2}{\nu+2} \right) u^{\frac{\nu+2}{2}}, \quad \tau = \frac{\nu+1}{\nu+2}, \quad (\alpha \neq 5)$$

则方程(7)可写成

$$\frac{dT}{d\tau} + \left(\frac{1}{\tau_0} + \lambda^2 \right) T = 0, \quad (9)$$

$$\frac{d}{du} \left[u^{-\nu} \frac{d\phi}{du} \right] + \lambda^2 \phi = 0. \quad (10)$$

(9)式的解为

$$T_1(\tau) = e^{-\left(\frac{1}{\tau_0} + \lambda^2\right)\tau}. \quad (11)$$

再求解方程(10). 引入新变量,令

$$\phi(u(x)) = \left(\frac{\nu+2}{2} x \right)^{\frac{\nu+1}{\nu+2}} \varphi^*(x),$$

则方程(10)可写为贝塞尔方程的形式

$$x^2 \frac{d^2 \varphi^*}{dx^2} + x \frac{d\varphi^*}{dx} + \left[(\lambda x)^2 - \left(\frac{\nu+1}{\nu+2} \right)^2 \right] \varphi^* = 0, \quad (12)$$

方程(12)的解可写成

$$\varphi_1^*(x) = C_1(\lambda) J_\tau(\lambda x) + C_2(\lambda) J_{-\tau}(\lambda x). \quad (13)$$

利用(11)和(13),可将分布函数 $F(u(x), \tau)$ 写成

$$F(u(x), \tau) = e^{-\tau/\tau_0} \left(\frac{\nu+2}{2}\right)^r x^\tau \int_0^\infty e^{-\lambda^2} [C_1(\lambda)J_\tau(\lambda x) + C_2(\lambda)J_{-\tau}(\lambda x)] d\lambda, \quad (14)$$

式中的系数 $C_1(\lambda)$ 和 $C_2(\lambda)$ 可用边界条件 (8.1) 和初始条件 (8.3) 来确定. 由边界条件 (8.1) 可得 $C_1(\lambda)$:

$$C_1(\lambda) = 2\lambda^{1-\tau} 2r^{-1} \Gamma(\tau) \left(\frac{\nu+2}{2}\right)^{-\tau+\frac{\nu}{\nu+2}} \mathcal{L}^{-1}[e^{-\tau/\tau_0} f(\tau)](\lambda^2), \quad (\alpha < 5) \quad (15)$$

(下标 λ^2 表示拉氏反演的原函数以 λ^2 为变量), 而当 $\alpha > 5$ 时, 边界条件不满足, 问题无解.

由初始条件 (8.3) 得

$$\varphi(u(x)) = \left(\frac{\nu+2}{2}\right)^r \int_0^\infty [C_1(\lambda)J_\tau(\lambda x) + C_2(\lambda)J_{-\tau}(\lambda x)] d\lambda.$$

利用 Fourier-Bessel 积分展开式^[4]

$$f(x) = \int_0^\infty \lambda J_\tau(\lambda x) d\lambda \int_0^\infty \rho J_\tau(\lambda \rho) f(\rho) d\rho, \quad \left(0 < x < \infty, \tau > -\frac{1}{2}\right)^{[4]}$$

可得

$$C_2(\lambda) = \lambda \int_0^\infty \rho J_{-\tau}(\lambda x) \left[\left(\frac{\nu+2}{2}\right)^r \rho^\tau \varphi(u(\rho)) - \int_0^\infty C_1(\lambda') J_\tau(\lambda' x) d\lambda' \right] d\rho, \quad (16)$$

式中 $C_1(\lambda)$ 由 (15) 表示. 将 (15) 和 (16) 代入 (14) 即得分布函数的积分解为

$$\begin{aligned} F(u(x), \tau) = & e^{-\tau/\tau_0} \left(\frac{\nu+2}{2}\right)^r \left\{ \int_0^\infty C_1(\lambda) e^{-\lambda^2} J_\tau(\lambda x) d\lambda \right. \\ & + \left(\frac{\nu+2}{2}\right)^{-\tau} \frac{1}{2\tau} e^{-\frac{\nu}{4\tau}} \int_0^\infty \rho^{1-\tau} \varphi(u(\rho)) e^{-\frac{\rho^2}{4\tau}} I_{-\tau}\left(\frac{x}{2\tau} \rho\right) d\rho \\ & \left. - \frac{1}{2\tau} e^{-\frac{x^2}{4\tau}} \int_0^\infty d\lambda C_1(\lambda) \int_0^\infty d\rho \rho e^{-\frac{\rho^2}{4\tau}} J_\tau(\lambda \rho) I_{-\tau}\left(\frac{x}{2\tau} \rho\right) \right\}. \quad (17) \end{aligned}$$

下面对 (17) 式进行具体的分析和讨论.

1. 对给定的消失机制条件下分布函数的形式

设电子的消失过程可表示为

$$\frac{dN}{d\tau} = -k_L N,$$

式中 k_L 为常数, 表示电子的平均生存时间的倒数, 由 (8.1) 可得

$$g(\tau) = \left(k_L - \frac{1}{\tau_0}\right) e^{-\frac{\tau}{\tau_0}} \quad (18)$$

将 (18) 代入 (15), 得

$$C_1(\lambda) = 2r\Gamma(\tau) \left(\frac{\nu+2}{2}\right)^{-\tau+\frac{\nu}{\nu+2}} \left(k_L - \frac{1}{\tau_0}\right) \lambda^{1-\tau} \delta\left[\lambda^2 - \left(k_L - \frac{1}{\tau_0}\right)\right], \quad (19)$$

这里 $\left(k_L - \frac{1}{\tau_0}\right) \geq 0$; 当 $k_L - \frac{1}{\tau_0} < 0$ 时无解.

1) 条件 $\tau > -\frac{1}{2}$ 并非必要条件, 可延拓至 $\tau > -1$ 结果仍收敛.

将(19)代入(17)得

$$F(u(x), \tau) = e^{-\tau/\tau_0 x^\tau} \left\{ \frac{1}{2\tau} e^{-\frac{x^2}{4\tau}} \int_0^\infty \rho^{1-\tau} \varphi(u(\rho)) e^{-\rho^2/4\tau} I_{-\tau} \left(\frac{x}{2\tau} \rho \right) d\rho \right. \\ \left. - 2\tau^{-1} \Gamma(\tau) \left(\frac{\nu+2}{2} \right) \left(k_L - \frac{1}{\tau_0} \right)^{1-\frac{\tau}{2}} \left[e^{-x^2/4\tau} I_\tau \left(\frac{x}{2\tau} \rho \right) J_\tau \right. \right. \\ \left. \left. \times \left(\sqrt{k_L - \frac{1}{\tau_0}} \rho \right) d\rho - e^{-(k_L - \frac{1}{\tau_0})} J_\tau \left(\sqrt{k_L - \frac{1}{\tau_0}} x \right) \right] \right\}. \quad (20)$$

由上式可看出以下事实:

花括号中的第一项不包括 k_L 和 τ_0 , 只与初始分布有关, 这说明这一项纯是由于湍流加速引起的分布函数的变化部分. 第二项与初始分布无关, 从物理上来说这是不可能的, 这表明 $k_L > \frac{1}{\tau_0}$ 是不符合我们所讨论的物理过程的, 说明时间常数 k_L 正是等于 $\frac{1}{\tau_0}$. 最后将分布函数的解写成

$$F(u(x), \tau) = e^{-\tau/\tau_0} \frac{x^\tau}{2\tau} e^{-x^2/4\tau} \int_0^\infty \rho^{1-\tau} \varphi(u(\rho)) e^{-\rho^2/4\tau} I_{-\tau} \left(\frac{x}{2\tau} \rho \right) d\rho. \quad (21)$$

2. 在一定的初始分布时分布函数的形式

设在初始时电子的初始速度都相同, 可表示为 δ 函数分布

$$\varphi(u(\rho)) = \delta(u(\rho) - u_0(x_0)), \quad (22)$$

将(22)代入(21)积分得

$$F(u(x), \tau, u_0(x_0)) = e^{-\tau/\tau_0} \left(\frac{\nu+2}{2} \right)^{\frac{\nu}{\nu+2}} x_0^\tau e^{-\frac{x^2+x_0^2}{4\tau}} \frac{x^\tau}{2\tau} I_{-\tau} \left(\frac{xx_0}{2\tau} \right). \quad (23)$$

当不考虑消失机制时, 即 $\tau_0 \rightarrow \infty$,

$$F(u(x), \tau, u_0(x_0)) = \left(\frac{\nu+2}{2} \right)^{\frac{\nu}{\nu+2}} x_0^\tau e^{-\frac{x^2+x_0^2}{4\tau}} \frac{x^\tau}{2\tau} I_{-\tau} \left(\frac{xx_0}{2\tau} \right). \quad (23)'$$

下面讨论两种极端的情况(不考虑消失).

(1) 强湍流或长时间的情况, 即 $\tau \gg \frac{xx_0}{2}$ 或 $\frac{xx_0}{2\tau} \rightarrow 0$, 这时 $I_{-\tau} \left(\frac{xx_0}{2\tau} \right)$ 的渐近式为

$$I_{-\tau} \left(\frac{xx_0}{2\tau} \right) \approx \frac{1}{\Gamma(1-\tau)} \left(\frac{xx_0}{2\tau} \right)^{-\tau} + \dots$$

分布函数的渐近表达式为

$$F(u(x), \tau, u_0(x_0)) = \frac{2}{\Gamma(1-\tau)} \left(\frac{\nu+2}{2} \right)^{\frac{\nu}{\nu+2}} \left(\frac{1}{4\tau} \right)^{\frac{1}{\nu+2}} e^{-\frac{x^2+x_0^2}{4\tau}}. \quad (24)$$

(2) 对于弱湍流或时间很短时, 即 $\tau \ll \frac{xx_0}{2}$ 或 $\frac{xx_0}{2\tau} \rightarrow \infty$, 这时有

$$I_{-\tau} \left(\frac{xx_0}{2\tau} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{xx_0}{2\tau} \right)^{-1/2} e^{xx_0/2\tau},$$

分布函数渐近表达式为

$$F(u(x), \tau, u_0(x_0)) = \left(\frac{\nu+2}{2}\right)^{\frac{\nu}{\nu+2}} \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} (xx_0)^{\frac{\nu}{2(\nu+2)}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4\tau}}. \quad (25)$$

四、平均能量的时间变化关系

吴京生等曾讨论过当时间 t 很大时平均能量的时间关系的渐近形式^[3]. 这里我们将给出适合所有时间的能量时间关系. 平均能量可定义为

$$\bar{\varepsilon}(u_0(x_0), \tau) = \int_0^{\infty} u^2 F(u(x), \tau, u_0(x_0)) du, \quad (26)$$

将 (23) 代入 (26) 积分得

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}(u_0(x_0), \tau) &= \left(\frac{\nu+2}{2}\right)^{\frac{4}{\nu+2}} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{\nu+2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\nu+2}\right)} e^{-x_0^2/4\tau} (4\tau)^{\frac{2}{\nu+2}} \\ &\quad \times {}_1F_1\left(\frac{3}{\nu+2}, \frac{1}{\nu+2}, \frac{x_0^2}{4\tau}\right). \end{aligned} \quad (27)$$

考虑两种极端情况的平均能量变化:

1. 当 $\tau \gg \frac{x_0^2}{4}$ 或 $\frac{x_0^2}{4\tau} \ll 1$ 时,

超几何函数的渐近式为

$${}_1F_1(\alpha, \gamma, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n}{n!(\gamma)_n} z^n,$$

故有

$$\begin{aligned} {}_1F_1\left(\frac{3}{\nu+2}, \frac{1}{\nu+2}, \frac{x_0^2}{4\tau}\right) &\approx \frac{\left(\frac{3}{\nu+2}\right)_0}{0! \left(\frac{1}{\nu+2}\right)_0} \left(\frac{x_0^2}{4\tau}\right)^0 + \frac{\left(\frac{3}{\nu+2}\right)_1}{1! \left(\frac{1}{\nu+2}\right)_1} \frac{x_0^2}{4\tau} \\ &= 1 + 3 \frac{x_0^2}{4\tau}, \end{aligned}$$

将上式代入 (27) 式得

$$\bar{\varepsilon}(u_0(x_0), \tau) = \left(\frac{\nu+2}{2}\right)^{\frac{4}{\nu+2}} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{\nu+2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\nu+2}\right)} (4\tau)^{\frac{2}{\nu+2}} \left(1 + \frac{3x_0^2}{4\tau}\right). \quad (28)$$

由 (28) 式看出, 当 t 很大时 $\frac{x_0^2}{4\tau} \rightarrow 0$, 平均能量 $\bar{\varepsilon}$ 的时间关系是 $\bar{\varepsilon} \sim \tau^{\frac{3}{5-a}}$.

2. 当 $\tau \ll \frac{x_0^2}{4}$, 或 $\frac{x_0^2}{4\tau} \gg 1$ 时,

$$\begin{aligned}
 {}_1F_1\left(\frac{3}{\nu+2}, \frac{1}{\nu+2}, \frac{x_0^2}{4\tau}\right) &\approx \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\nu+2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{\nu+2}\right)} e^{x_0^2/4\tau} \left(\frac{x_0^2}{4\tau}\right)^{\frac{2}{\nu+2}} \\
 &\times \left\{1 + \frac{\left(\frac{-2}{\nu+2}\right)_1 \left(\frac{\nu-1}{\nu+2}\right)_1}{1! \left(\frac{x_0^2}{4\tau}\right)^1}\right\} \\
 \varepsilon(u_0(x_0), \tau) &= \left(\frac{\nu+2}{2} x_0\right)^{4/\nu+2} \left[1 - \frac{2(2-\alpha)}{5-\alpha} \frac{4\tau}{x_0^2}\right]. \quad (29)
 \end{aligned}$$

由上式看出, 当 $\frac{x_0^2}{4\tau} \gg 1$ 时, $\varepsilon = \varepsilon_0(0, u_0(x_0))$, 表示当 τ 很小时电子几乎不受到加速.

五、在给定的湍谱指数下湍流和电场的联合加速

设在湍流加速区中存在着大尺度的均匀稳恒的平行电场, 其方向是沿磁力线向上. 当沉降电子通过此区域时会受到湍流和电场的同时加速.

当电场 E_{\parallel} 存在时, 如果不考虑电子的消失过程, 动力学方程和相应的初始和边界条件可写成

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial v} \left[D_0 \left(\frac{v}{v_{cth}} \right)^{-\nu} \frac{\partial f}{\partial v} \right] - \frac{eE_{\parallel}}{m_e} \frac{\partial f}{\partial v}, \quad (30.1)$$

$$f(v, t)|_{v=\infty} = 0, \quad (30.2)$$

$$\left[\frac{eE_{\parallel}}{m_e} f - D_0 \left(\frac{v}{v_{cth}} \right)^{-\nu} \frac{\partial f}{\partial v} \right] \Big|_{v=0} = 0 \quad (\nu = 3 - \alpha), \quad (30.3)$$

$$f(v, t)|_{t=0} = \varphi(v). \quad (30.4)$$

将方程无量纲化, 令

$$u = \frac{v}{v_{cth}}, \quad \tau = D_0 v_{cth}^{-2} t, \quad \varepsilon_{\parallel} = \frac{e v_{cth}}{m_e D_0} E_{\parallel},$$

$$F(u, \tau) = \frac{v_{cth}}{n_0} f(v, t), \quad \varphi(v) = \frac{v_{cth}}{n_0} \varphi^*(u).$$

则方程和初始、边界条件可写成

$$\frac{\partial F}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial u} \left[u^{-\nu} \frac{\partial F}{\partial u} \right] - \varepsilon_{\parallel} \frac{\partial F}{\partial u}, \quad (31.1)$$

$$F(u, \tau)|_{u=\infty} = 0, \quad (31.2)$$

$$\left[\varepsilon_{\parallel} F - u^{-\nu} \frac{\partial F}{\partial u} \right] \Big|_{u=0} = 0, \quad (31.3)$$

$$F(u, \tau)|_{\tau=0} = \varphi^*(u). \quad (31.4)$$

本文只限于讨论湍谱指数 $\alpha = 4$ 的情况. 当 $\alpha = 4$ 时, $\nu = -1$, 仍采用分离变量法求解, 解法可参看第三节. 令 $u = \left(\frac{x}{2}\right)^2$, 得分布函数的通解为

$$F(u(x), \tau) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda^2 \tau} \left(\frac{\lambda x}{2}\right)^{\varepsilon_{\parallel}} [C_1(\lambda) J_{\varepsilon_{\parallel}}(\lambda x) + C_2(\lambda) J_{-\varepsilon_{\parallel}}(\lambda x)] d\lambda.$$

利用边界条件 (31.3) 和初始边界 (31.4) 可定出 $C_1(\lambda)$ 和 $C_2(\lambda)$, 最后可得 (31) 的解为

$$F(u(x), \tau) = \frac{x^{\varepsilon_{\parallel}}}{2\tau} e^{-x^2/4\tau} \int_0^{\infty} \rho^{1-\varepsilon_{\parallel}} \varphi(u(\rho)) I_{\varepsilon_{\parallel}}\left(\frac{x}{2\tau} \rho\right) d\rho. \quad (32)$$

如取初始分布为

$$\varphi(u(x)) = \delta[u(x) - u_0(x_0)],$$

将 $\varphi(u)$ 代入 (32) 式积分得

$$F(u(x), \tau, u_0) = x_0^{-\varepsilon_{\parallel}} e^{-\frac{x_0^2}{4\tau}} \frac{x^{\varepsilon_{\parallel}}}{\tau} e^{-\frac{x^2}{4\tau}} I_{\varepsilon_{\parallel}}\left(\frac{xx_0}{2\tau}\right). \quad (33)$$

由 (33) 式可讨论 τ 的两种极端情况:

(1) 当 $\tau \ll \frac{xx_0}{2}$ 时, 将 $I_{\varepsilon_{\parallel}}$ 展开取第一项得

$$F(u(x), \tau, u_0(x_0)) = \frac{1}{\sqrt{\pi\tau}} \left(\frac{1}{xx_0}\right)^{1/2} \left(\frac{x}{x_0}\right)^{\varepsilon_{\parallel}} e^{-\frac{1}{4\tau}(x-x_0)^2}. \quad (34)$$

将 (34) 式与不存在电场的 (25) 式相比, 可以看出多了因子 $\left(\frac{x}{x_0}\right)^{\varepsilon_{\parallel}}$, 这反映了电场的加速效应.

(2) 当 $\tau \gg \frac{xx_0}{2}$ 时, 将 $I_{\varepsilon_{\parallel}}\left(\frac{xx_0}{2\tau}\right)$ 展开取第一项得

$$F(u(x), \tau, u_0(x_0)) = \frac{4}{\Gamma(1 + \varepsilon_{\parallel})} \left(\frac{1}{4\tau}\right) \left(\frac{x^2}{4\tau}\right)^{\varepsilon_{\parallel}} e^{-\frac{x^2}{4\tau}}. \quad (35)$$

比较 (35) 和 (24) 两式可以看出, 电场的加速效应表现为 $\left(\frac{x^2}{4\tau}\right)^{\varepsilon_{\parallel}}$.

再考虑平均能量的变化

$$\bar{\varepsilon}(u_0, \tau) = \int_0^{\infty} u^2 F(u, \tau, u_0) du,$$

将 (33) 式代入上式积分得

$$\bar{\varepsilon}(u_0, \tau) = \frac{1}{16} (2 + \varepsilon_{\parallel}) (1 + \varepsilon_{\parallel}) e^{-\frac{x_0^2}{4\tau}} {}_1F_1\left(3 + \varepsilon_{\parallel}, 1 + \varepsilon_{\parallel}, \frac{x_0^2}{4\tau}\right). \quad (36)$$

由 (36) 式可讨论大 τ 值和小 τ 值的两种极端情况:

(1) 当 $\tau \ll \frac{x_0^2}{4}$ 时, 将超几何级数展开得

$$\bar{\varepsilon}(u_0, \tau) = \bar{\varepsilon}(0, u_0) \left[1 + 2(2 + \varepsilon_{\parallel}) \frac{4\tau}{x_0^2} + \dots\right]. \quad (37)$$

与无电场情况相比, 可以看出多了因子 $2\varepsilon_{\parallel} \frac{4\tau}{x_0^2}$. 在零级近似时, 平均能量不变, 在一级近似时, $\bar{\varepsilon}$ 按 τ 的一次方规律增加.

(2) 当 $\tau \gg \frac{x_0^2}{4}$ 时, 将 (36) 展开得

$$\bar{\varepsilon}(\tau) = \frac{1}{8} (4\tau)^2 + \frac{3\varepsilon_{\parallel} + \varepsilon_{\parallel}^2}{16} (4\tau)^2. \quad (38)$$

可见,上式右端第一项与电场 ε_{\parallel} 无关,纯是湍流加速,第二项是电场加速,而且两项都是按 τ^2 的规律变化的. 由(38)式可以看出,当 $\varepsilon_{\parallel} = 0.56$ 时,电场加速和湍流加速的效应相同;当 $\varepsilon_{\parallel} > 0.56$ 时,电场加速大于湍流加速;而当 $\varepsilon_{\parallel} < 0.56$ 时,湍流加速大于电场加速.

在以上的计算中,都是用无量纲的形式表示. 可以很方便地写出有量纲的形式. 平均能量 $\bar{E}(\tau)$ 可写成

$$\bar{E}(\tau) = \frac{1}{2} m_e v_{eth}^2 \bar{\varepsilon},$$

分布函数可写成

$$f(v, \tau, v_0) = \frac{n_0}{v_{eth}} F(u, \tau, u_0).$$

六、讨论和结论

利用(25)式我们计算了当 τ 值较小时不同湍谱指数 α 和不同 τ 值时分布函数的变化,结果如图 1a—图 1c 所示. 图 1d 表示利用精确公式(23)的计算结果. 在计算中取 $n_0 = 10^{-1} \text{cm}^{-3}$, $v_{eth} = 10^9 \text{cm/s}$, $u_0 = 1$, $\varepsilon_0 = 1$ (初始能量为 1keV). 图 1 没有考虑电子的消失过程,即 $\tau_0 \rightarrow \infty$.

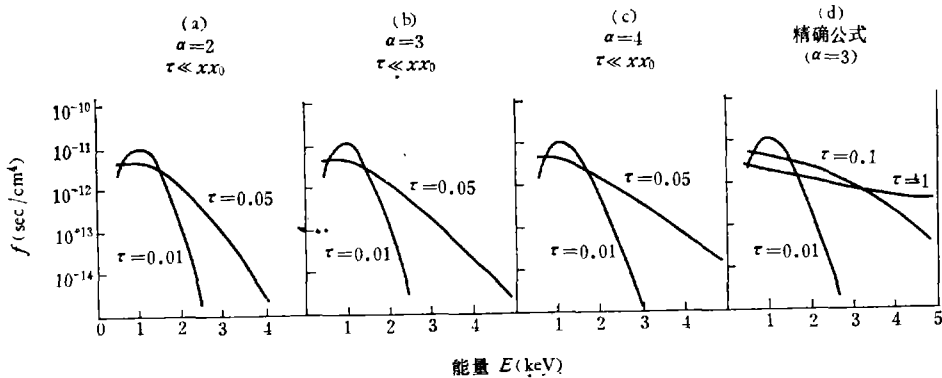


图 1 湍流加速引起的电子分布函数的变化

由图 1 可以看出:(1) 湍谱指数 α 愈大,高能的电子数愈多,这说明湍谱指数愈陡,湍流加速效应越显著;(2) 随着时间 τ 的增加,高能的电子增加得很快,这说明湍流加速是很迅速的.

根据本文的理论分析,提出以下初步的结论:

1. 等离子体湍流对电子的加速扩散效应是很显著的. 对于初始速度相同的电子束,当其通过湍流加速区时,分布函数发生显著的变化.

2. 湍谱的分布形式,对分布函数和加速效应有很大的影响,湍谱指数愈大,即湍谱分布愈陡时,加速效应愈显著.

3. 湍流加速过程进行得很快, 随着时间的增加, 高能电子数很快地增加。

4. 电子平均能量随时间的变化规律, 在加速过程中是变化的, 当时间很小时, 加速效应很不显著。但当时间较长时, 平均能量随时间的变化关系符合一定的规律, 即按 $\bar{\varepsilon} \sim \tau^{\frac{2}{5-\alpha}}$ 的规律变化, τ 的方次取决于湍谱指数 α 。

5. 当湍谱指数 $\alpha > 5$ 时, 定解问题 (7) 的边界条件不能满足, 问题无解, 这与一般情况下湍谱指数不超过 5 的事实是一致的。

参 考 文 献

- [1] Kaplan, S. A. and Tsytovich, V. N., Plasma Astrophysics, Translated and ed by D ter Haar Pergamon Press Oxford, New York, Toronto Sydney, Braunschweig, 276, 1973.
- [2] Tsytovich, V. N., Theory of Turbulent Plasma, Translated by D. I. Burdick, Chapter 5, 1977.
- [3] Wu, C. S., J. D. Gaffey, Jr, and B. Liberman, Statistical acceleration of electrons by lowerhybrid turbulence, *Journal of Plasma Physics*, Vol. 25, 391, 1981.
- [4] 列别捷夫著, 张夔译, 特殊函数及其应用, 162, 高等教育出版社, 1957.
- [5] Диткин, В. А., Кузнецов, П. И., 张夔译, 运算微积手册, 146, 科学出版社, 1958.

THE ACCELERATION OF ELECTRONS BY THE PLASMA TURBULENCE

LIU ZHEN-XING

(*Institute of Space Physics, Academia Sinica*)

HUANG YING-LEI

(*Institute of Mechanics, Academia Sinica*)

Abstract

In this paper we discuss two acceleration models of electrons by the plasma turbulence: 1. A region of homogeneous plasma turbulence occurs on the high-latitude auroral field lines at altitudes ranging from 2000 km to 8000 km, when the electrons with determinate velocity distribution of the plasma sheet flows through this plasma turbulence region; these electrons can be accelerated by the plasma turbulence. This model can be used to discuss the acceleration of auroral electrons. 2. The homogeneous plasma with determinate velocity distribution exists in a closed region. When the plasma wave turbulence injects into this plasma region, the electrons can be accelerated by the plasma turbulence. The general form of turbulent diffusion coefficient is given assuming a power law spectral energy density. The quasilinear kinetic equation is solved by using simple mathematical method and the distribution function and mean energy of electrons are given for various cases.